פיסיקה למתמטיקאים

משוואות אויילר לגראנג'

1. מסה m מונחת על מישור משופע חסר חיכוך בעל שיפוע θ. המישור מונח על משטח חסר חיכוך. המסה m משוחררת ממנוחה.

(א) הראו כי התנע הקווי נשמר

יהי x_1 מיקום המסה M (עם כוון חיובי ימינה) ו x_2 מיקום המסה m (עם כוון חיובי שמאלה). אזי קורדינטת הגובה של m היא $y_1 = (x_1 + x_2)\tan\theta$. הלגראנג'יאן יהיה אפוא

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\tan^2\theta\right) + mg(x_1 + x_2)\tan\theta.$$

משוואות התנועה הן

$$M\ddot{x}_1 + m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)\tan^2\theta = mg\tan\theta$$

$$m\ddot{x}_2 + m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)\tan^2\theta = mg\tan\theta,$$

ומחיסור שתי המשוואות נקבל $M\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 = 0$, כלומר התנע הקווי נשמר.

(ב) מצאו את תאוצת המסה M

נציב $\ddot{x}_2 = \frac{M}{m}\ddot{x}_1$ במשוואה הראשונה ונקבל

$$\ddot{x}_1 = \frac{mg\tan\theta}{M(1+\tan^2\theta) + m\tan\theta}$$

(ג) מהי הזוית עבורה התאוצה מקסימלית?

נסמן $s = \tan\theta$ ונקבל

$$\ddot{x}_1(s) = \frac{mgs}{M(1+s^2) + ms}.$$

נגזור לפי s ונפתור $\ddot{x}_1'(s) = 0$ עבור s_0. נקבל $s_0 = \tan\theta_0 = \sqrt{\frac{M}{m+M}}$

2. שתי מסות זהות מחוברות ביניהן ע"י מיתר, דרך שתי גלגלות שגדלן זניח. המסה השמאלית נעה אנכית ואילו הימנית חפשייה בנוסף, לנוע הלוך ושוב. הניחו כי בתחילת התנועה, המסה השמאלית במנוחה, ואילו הימנית מבצעת תנודות קטנות עם אמפליטודה זויתית $\epsilon << 1$.

מהי התאוצה הממוצעת (על פני מספר מחזורים) ההתחלתית של המסה השמאלית ? באיזה כוון תנוע ?

פתרון: נסמן ב r_0 את מרחק שתי המסות משתי הגלגלות, בתחילת התנועה. כעת, אם מרחק המסה הימנית מהגלגלת הימנית r, אזי המסה השמאלית מרוחקת $2r_0 - r$ מהגלגלת השמאלית.

האנרגיה הקינטית היא

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

והפוטנציאל

$$V = -mgr\cos\theta - mg(2r_0 - r).$$

לכן, הלגרנג'יאן של המערכת הוא

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr + mgr\cos\theta + \mathcal{L}_0$$

כאשר $\mathcal{L}_0 = 2mgr_0$, תוספת קבועה ל $\mathcal{L}$ שאינה משנה את משוואות התנועה (ולכן ניתן להזניח אותה). משוואת התנועה עבור r תהיה

$$2\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - g(1 - \cos\theta)$$

ועבור θ

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = -gr\sin\theta.$$

בקרוב תנודות קטנות, אם נשמור איברים $\mathcal{O}(\theta)$, נקבל ($\dot{\theta} \simeq \theta << 1$)

$$\ddot{r} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0,$$

כאשר השתמשנו בעובדה שב $t = 0$ $\dot{r} = 0$. כלומר, בסדר המוביל ב θ המסה השמאלית נשארת במנוחה. ניקח כעת איברים $\mathcal{O}(\theta^2)$ ונקבל

$$2\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}g\theta^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0.$$

המסה הימנית מבצעת תנודות עם אמפליטודה $\epsilon << 1$, לכן ניתן לרשום (בסדר המוביל ב ϵ)

$$\theta = \epsilon \cos(\omega t + \varphi),$$

כאשר $\omega = \sqrt{g/r}$. נציב את הפתרון במשוואת התנועה עבור r ונקבל

$$2\ddot{r} = \epsilon^2 g \left(\sin^2(\omega t + \varphi) - \frac{1}{2}\cos^2(\omega t + \varphi) \right).$$

כעת, ממוצע ($\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f dt$) של $\sin^2 t, \cos^2 t$ על פני מחזור הוא $1/2$, ולכן התאוצה הממוצעת על פני מספר מחזורים תהיה

$$\langle \ddot{r} \rangle = \frac{g\epsilon^2}{8},$$

כלומר, המסה השמאלית תטפס באיטיות.