תרגיל 6

1. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ שני מרחבים טופולוגים כך ש־Y בעל תכונה T_2. תהנה $f,g:X\to Y$ פונקציות רציפות ומזדהות על תת קבוצה צפופה A של X. הוכיחו כי $f=g$.
הפריכו את הטענה הקודמת על Y שאינו מקיים T_2.

2. אם $A,B\subseteq X$ קשירות, הוכיחו או הפריכו:
   (א) הפנים של A קשיר
   (ב) $A\cup B$ קשיר
   (ג) $A\cap B$ קשיר

3. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי קשיר. נקודה חוצה היא נקודה $x\in X$ כך ש־$X\setminus\{x\}$ לא קשירה. הוכיחו שאם $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ הומיאומורפיזם, אז x חוצה אם ורק אם $f(x)$ חוצה.
השתמשו בתוצאה זו כדי למיין את הקטעים (פתוחים\סגורים\שאר האפשרויות) עד כדי הומאומורפיזם.

4. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$Y\subseteq X$. אם $\overline{Y}=X$ (כלומר Y צפופה ב־X) ו־Y קשיר, אז גם X קשיר.

5. הוכיחו או הפריכו: $SO_n(\mathbb{R})$, כלומר מרחב המטריצות A שמקיימות $AA^T=I$, הוא קשיר.

6. מתי הטופולוגיה הקו־סופית קשירה?

7. יחסית קל להוכיח שאם פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$ מתאפסת על סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Omega$ שמתכנסת ל־$x\in\Omega$ אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$f_{|B(x,\varepsilon)}\equiv 0$. הראו שבנסיבות כאלה כש־$\Omega$ תת קבוצה קשירה של $\mathbb{C}$ אז מתקיים ש־$f\equiv 0$.

8. הוכיחו שאם לכל $x\in X$ ו־$x\in U\in\tau$ קיימת $x\in V\in\tau$ כך ש־$V\subseteq U$ ו־V סגורה אז X בלתי קשיר לחלוטין. הסיקו שכל מרחב אולטרה־מטרי הוא בלתי קשיר לחלוטין
<u>הערה:</u> למרחב שמקיים את התנאי הזה קוראים מרחב ממימד אפס.

9. נסתכל על טופולוגיית סורגנפרי τ_s על $\mathbb{R}$ שמוגדרת כאיחוד של כל הקטעים מהצורה $[a,b)$, כלומר

$$\tau_s := \left\{ \bigcup_{i\in I} [a_i, b_i) \mid \forall i \in I : a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

(א) הראו שהטופולוגיה הזו בלתי קשירה לחלוטין

(ב) הסיקו שכל פונקציה רציפה $f : \left(\mathbb{R}, \tau_{|*|}\right) \to (\mathbb{R}, \tau_S)$ מהטופולוגיה האוקלידית הינה קבועה.

(ג) הראו שהיא ספרבילית

(ד) מה היחס בינה ובין הטופולוגיה האוקלידית?

10. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ תת קבוצה. הוכיחו ש־$\mathbb{R} \setminus A$ היא בלתי קשירה לחלוטין אם ורק אם A צפופה.

11. אנחנו נגיד שהמרחב (X, τ) קשיר מקומית ב־$x \in X$ אם לכל סביבה $U \in N(x)$ קיימת $V \in N(x)$ קשירה כך ש־$V \subseteq U$. אם זה נכון לכל $x \in X$ אז נגיד ש־X קשיר מקומית. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה)

12. תנו דוגמה של תת מרחב של $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית