ב"ה

חשבון אינפיניטיסימלי 4

תרגיל בית 2

תאריך הגשה: 17.08.2001

1) תהי $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ מסילה חלקה. הוכח או הפרך:

א) אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^a$ גזירה ברציפות אזי $f\circ\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^a$ מסילה חלקה.

ב) אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות אזי $f\circ\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$ גזירה בקטע $[0,1]$.

ג) אם $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה אזי $\gamma\circ f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ מסילה חלקה.

2) מצאו את אורכי המסילות הבאות ($t\in[0,1]$):

א) $\gamma(t)=\left(2+4t,1+5t^2,9+3t\right)$

ב) $\gamma(t)=\left(\sin(\pi t),\cos(\pi t),\ 2\pi+\pi t\right)$

ג) $\gamma(t)=\left(4\sin(t),\cos(2t),\sin(2t)-2t+3\right)$

3) חשבו את האינטגרלים הקויים הבאים על המסילות הבאות ($t\in[0,1]$):

א) $\gamma(t)=\left(t,t^2,2t\right),\quad f(x,y,z)=zy-xy$

ב) $\gamma(t)=\left(\sin(2\pi t),\cos(2\pi t)\right),\quad f(x,y)=4x^2y^2\left(x^2+y^2\right)$

ג) $\gamma(t)=\left(t,t^2,t^2\right),\quad f(x,y,z)=xe^{x^2-y-z}+\sin(zx^2-y^2)$

4) חשבו את האינטגרלים הוקטוריים הבאים על המסילות הבאות ($t\in[0,1]$):

א) $\gamma(t)=\left(t,t^2,3t\right),\ f(x,y,z)=\left(2x^2-y,3x\sin(xz-y),2y\sin\left(y-3x^2\right)\right)$

ב) $\gamma(t)=\left(\sin(2\pi t),\cos(2\pi t)\right),\ f(x,y)=\left(x+2x^2+y^2,2xy+y\right)$

ג) $\gamma(t)=\left(t,t^2,t^2+t\right),\ f(x,y,z)=(x\sin(z-x),x^2\cos\left(x^2\right),\tan(x+y)$

5) תהי γ מסילה חלקה סגורה (כלומר $\gamma(0)=\gamma(1)$) ב-$\mathbb{R}^n$ ותהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(u,v)$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות. הוכח או הפרך את הבאים:

א) אם γ לא חותכת את עצמה והיא נגד כיוון השעון וגם $u''_{yx}=v''_{xx}$ וגם $u''_{yy}=v''_{xy}$ אזי האינטגרל הוקטורי של f על המסילה הוא השטח הכלוא בתוך המסילה כפול הערך של $u'_y-v'_x$ בנקודת ההתחלה של המסילה.

ב) תהי A העתקה ליניארית הפיכה על $\mathbb{R}^2$, אם γ לא חותכת את עצמה ונגד כיוון השעון אזי: $A(\gamma)$ לא חותכת את עצמה ונגד כיוון השעון אם ורק אם הדטרמיננטה של A חיובית.

ג) אם γ לא חותכת את עצמה ונגד כיוון השעון ו- $g:[0,1]\to[0,1]$ רציפה, חח"ע ועל אזי האינטגרל הוקטורי של f על $\gamma\circ g$ שווה לאינטגרל של $u'_y-v'_x$ על התחום ש-γ חוסמת.