

תרגיל 7

להגשה עד 4.1.17

שאלה 1

יהיו (X, \mathbb{A}, μ) מ"ח, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ב- $L^1(\mu)$. לכל $t \in \mathbb{R}$ נגדיר:

$$F(t) := \int_X f(x) \cos(e^t f(x)) d\mu(x)$$

הוכיחו כי F מוגדרת ורציפה ב- \mathbb{R} .

שאלה 2

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות חסומות (כל אחת בנפרד) מ- X ל- \mathbb{R} , כך ש: $f_n \rightarrow f$ במידה שווה מעל X .

1. הוכיחו כי $\|f\|_U := \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$ (כלומר: f חסומה ב- X), וכי $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_U < \infty$.

2. הוכיחו כי אם (X, \mathbb{A}, μ) מ"ח, וכל f_n מדידה ב- \mathbb{A} , ו- $\mu(X) < \infty$ אז $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$.

3. תנו דוגמא של מ"ח (X, \mathbb{A}, μ) , כך ש: $\mu(X) = \infty$, וסדרת פונקציות מדידות ב- \mathbb{A} : $(f_n)_{\mathbb{N}}$ כך ש- $f_n \rightarrow f$ במידה שווה, אבל $\int_X f_n d\mu \not\rightarrow \int_X f d\mu$.

שאלה 3

יהיו (X, \mathbb{A}, μ) מ"ח, $a \in (0, \infty)$, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציה מדידה כך ש:

$$0 < c := \int_X f d\mu < \infty$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X n \log \left(1 + \left(\frac{f}{n} \right)^a \right) d\mu = \begin{cases} c & a = 1 \\ \infty & 0 < a < 1 \\ 0 & 1 < a < \infty \end{cases}$$

תזכורת: אם $0 \leq t$ ו- $1 \leq a$ אז $1 + t^a \leq (1+t)^a \leq e^{at}$.

שאלה 4

יהי (X, S, μ) מ"ח סופית. הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית היא אינטגרבילית אם

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : f(x) \geq n\}) < \infty$$

שאלה 5

יהי (X, S, μ) מ"ח סופית ותהי $f \in L^1(\mu)$ אי שלילית. הראו שמתקיים:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$$

בהצלחה!!