

תרגיל 7

4.1.17 להגשה עד

שאלה 1

יהי (X, \mathbb{A}, μ) מ"ח, $a \in (0, \infty)$, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציה מדידה כך ש:

$$0 < c := \int_X f d\mu < \infty$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X n \log \left(1 + \left(\frac{f}{n} \right)^a \right) d\mu = \begin{cases} c & a = 1 \\ \infty & 0 < a < 1 \\ 0 & 1 < a < \infty \end{cases}$$

תזכורת: אם $0 \leq t < 1$ ו- $1 \leq a < \infty$ אז $1 + t^a \leq (1 + t)^a \leq e^{at}$.

שאלה 2

תנו דוגמא לאי קיום משפט ההתכנסות המונוטונית עבור סדרה יורדת של פונקציות מדידות ואי שליליות.

שאלה 3

יהי (X, S, μ) מ"ח סופית. הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית היא אינטגרבילית אם

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : f(x) \geq n\}) < \infty$$

שאלה 4

יהי (X, S, μ) מ"ח סופית ותהי $f \in L^1(\mu)$ אי שלילית. הראו שמתקיים:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$$

שאלה 5

יהי (X, S, μ) מ"ח σ -סופי. ונניח כי $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\epsilon > 0$ אזי קיימת $A \in S$ כך ש $\mu(A) < \infty$ ומתקיים

$$\epsilon + \int_A f d\mu > \int_X f d\mu$$

שאלה 6

יהי (X, \mathbb{A}, μ) מרחב מידה חיובית σ -סופית, ותהי f פונקציה אי שלילית, מדידה- μ , המקיימת: $\int_X f d\mu = \infty$.
הראו שלכל $M > 0$ קיימת פונקציה g מדידה- μ , כך ש: $0 \leq g(x) \leq f(x)$ (כב"מ), וכן מתקיים:

1. $\int_X g d\mu \geq M$.

2. g חסומה (כב"מ).

3. $\mu([g \neq 0]) < \infty$.

בהצלחה!!