תקצירי הרצאות אלגברה לינארית

איתמר שטיין

1 מערכות משוואות לינאריות

מערכת משוואות לינאריות היא מערכת משוואות של ביטויים לינאריים. למשל:

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$x - 5y = 3$$

מערכת של 2 משוואות עם 3 נעלמים.

באופן כללי מערכת לינארית נראית

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

מערכת משוואת עם m משוואות ו n נעלמים. ה a־ים נקראים מקדמי המשוואה. $x_1 \ldots x_n$ נקראים הנעלמים. שימו לב שמספר המשוואות ומספר הנעלמים לא חייב להיות שווה.

מטרה 1.1 בהינתן מערכת משוואות לינאריות למצוא את כל הפתרונות למערכת, דהיינו כל ערכי הנעלמים שבשבילם המשוואות מתקיימות. יותר טוב: אנחנו רוצים למצוא אלגוריתם למציאת הפתרונות.

למשל: למערכת

$$x + y = 0$$
$$x - y = 2$$

אנחנו מחפשים את הפתרון $x = 1$ $y = -1$.

שימו לב: יש מערכות ללא פתרון

$$x + y = 0$$
$$x + y = 1$$

יש מערכות עם יותר מפתרון אחד

$$x + y = 0$$

(זאת מערכת משוואות עם משוואה אחת ושני נעלמים). נחזור לבעיה הזאת בהמשך.

אז איך פותרים? נשתמש ב 3 פעולות (נקראות פעולות שורה אלמנטריות) שלא משנות את הפתרונות למערכת:

- החלפת שורות: $R_i \leftrightarrow R_j$
- הכפלת שורה בסקלר שונה מ 0: $R_i = cR_i$
- הוספת שורה אחרת לאחרת (עם הכפלה בסקלר): $R_i = R_i + cR_j$.

דוגמא 1.2 נביט על המערכת

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

נבצע פעולות מהרשימה המותרת

$$\begin{array}{c} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 1 \end{array} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longmapsto} \begin{array}{c} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{array} \overset{R_2 = R_2 - 2R_1}{\longmapsto} \begin{array}{c} x + 2y = 1 \\ -3y = 6 \end{array}$$

מכאן ברור ש $y = -2$ ומשהשורה הראשונה מסיקים $x = 5$.
מסקנה: ביצענו פעולות "מותרות" כלומר, פעולות שלא משנות את הפתרונות והגענו למערכת שהיה קל לנו לפתור.

שאלה 1.3 טוב ויפה. אבל איך יודעים איזה פעולות לעשות? ואיזה מערכות בדיוק "קל" לנו לפתור?

לפני שנענה על השאלה הזאת אנחנו נשנה את הצורה שבה אנחנו עובדים לצורה שתהיה לנו יותר נוחה. נתרגם את מערכת המשוואות למטריצות. את מערכת המשוואות למעלה נתרגם למשל למטריצה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

אנחנו שמים בצד שמאל את מקדמי המשוואה בלי לרשום את הנעלמים (אנחנו "זוכרים" שהעמודה הראשונה מתאימה ל x והשניה ל y) ואת המספרים של צד ימין כותבים בצד ימין אחרי קו. החלק השמאלי בלבד נקרא "מטריצת המקדמים". למשל במקרה שלנו מטריצת המקדמים היא

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

שימו לב: במטריצת המקדמים מספר השורות=מספר המשוואות. מספר העמודות = מספר הנעלמים.
את הפעולות השורה האלמנטריות נוח לבצע גם בצורה הזאת. נתרגם מחדש את התרגיל שפתרנו למעלה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longmapsto} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{array}\right) \overset{R_2 = R_2 - 2R_1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

ושוב קוראים את הפתרון $x = 5, \quad y = -2$ כלומר $(5, -2)$.
בשפה של מטריצות יהיה לנו יותר נוח לתאר מה צריך לעשות. אינטואיטיבית אנחנו רוצים לבצע פעולות שורה שיאפסו את מה שנמצא מתחת לאלכסון של המטריצה. התהליך

הזה נקרא **דירוג גאוס.** נציג עוד דוגמא ואז נגדיר דברים בצורה יותר מסודרת. נסתכל על המערכת:

$$\begin{aligned} y+2z&=3\\ 2x+2y+6z&=4\\ 3x+z&=2 \end{aligned}$$

נכתוב אותה כמטריצה ונבצע דירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0&1&2&3\\ 2&2&6&4\\ 3&0&1&2 \end{array}\right) \xmapsto{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2&2&6&4\\ 0&1&2&3\\ 3&0&1&2 \end{array}\right) \xmapsto{R_1=\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&3&2\\ 0&1&2&3\\ 3&0&1&2 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_3=R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&3&2\\ 0&1&2&3\\ 0&-3&-8&-4 \end{array}\right) \xmapsto{R_3=R_3+3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&3&2\\ 0&1&2&3\\ 0&0&-2&5 \end{array}\right)$$

ואז קל לקרוא את הפתרון $z=-\frac{5}{2}$, $y=3-2z=8$ ו $x=2-y-3z=\frac{3}{2}$. כותבים את זה בדר"כ כוקטור $\left(\frac{3}{2},8,-\frac{5}{2}\right)$

עכשיו נסביר יותר טוב מה אנחנו רוצים לעשות.

הגדרה 1.4 בכל שורה של מטריצה, האיבר הראשון שאינו 0 נקרא **איבר מוביל** (נקרא גם איבר פותח או איבר ציר).

למשל במטריצה

$$\begin{pmatrix} 0&\underline{1}&2\\ \underline{2}&2&6\\ \underline{3}&0&1 \end{pmatrix}$$

סימנו קו מתחת לאיברים המובילים.

הגדרה 1.5 מטריצה נקראת **מדורגת** אם היא מקיימת את שתי התכונות הבאות:

- כל איבר מוביל נמצא מימין לאיברים המובילים שמעליו.
- כל שורות האפסים (אם ישנן) נמצאות למטה.

דוגמא 1.6 המטריצות הבאות הן מטריצות מדורגות

$$\begin{pmatrix} 1&1&2\\ 0&2&6\\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&2\\ 0&0&6\\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&2\\ 0&0&6\\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&2\\ 0&0&6\\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

המטריצות הבאות אינן מדורגות

$$\begin{pmatrix} 1&1&2\\ 1&2&6\\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&2\\ 0&0&6\\ 0&0&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&2\\ 0&0&0\\ 0&0&6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&2\\ 1&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

אבחנה 1.7 אם מטריצת המקדמים של מערכת משוואות לינארית (כלומר, החלק שמשמאל לקו) היא מדורגת אז קל "לקרוא" את הפתרון למערכת המשוואות. (כמו שעשינו למעלה).

יש עוד כמה מצבים שצריך להזכיר בנפרד. אבל קודם נסביר איך מדרגים. אינטואיטיבית: מאפסים את כל מה שמתחת לאלכסון. אם רוצים אלגוריתם מדויק אז הנה הוא:

משפט 1.8 (אלגוריתם דירוג): מתחילים מן העמודה הראשונה של המטריצה.

1. אם כל האיברים בעמודה זו הם 0. מדלגים עליה ועוברים לעמודה הבאה.
2. משתמשים בהחלפת שורות כדי שבשורה הראשונה של העמודה יהיה איבר שונה מ 0.
3. משתשמשים בו כדי לאפס את כל האיברים שמתחתיו (ע"י פעולת השורה השלישית). עכשיו קיבלנו שכל העמודה הראשונה היא אפסים למעט האיבר הראשון.
4. עכשיו מתעלמים מהעמודה והשורה הראשונה של המטריצה ומפעילים שוב את האלגוריתם על החלק שנשאר (חוזרים לסעיף 1).
5. ממשיכים עד שמטריצת המקדמים מדורגת.

אבל האמת שאי אפשר להבין את זה בקריאה. צריך לפתור כמה תרגילים ואז זה נעשה ברור. לא לדאוג יהיו הרבה כאלה בשיעורי בית.

עכשיו נחזור לבעיה הקודמת. איך "קוראים" פתרון ממערכת מדורגת? אז יש כמה אופציות.

הגדרה 1.9 **שורת סתירה** היא שורה שבה כל המקדמים (החלק משמאל לקו) הם 0 והחלק מימין לקו שונה מ0.

האופציה הכי קלה: אם במטריצה המדורגת יש שורת סתירה אז למערכת המשוואות אין פתרון. למשל קחו את המערכת

$$\begin{aligned} x+y&=0 \\ x+y&=1 \end{aligned}$$

אם נציג אותה במטריצה ונדרג נקבל

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

השורה השניה היא שורת סתירה ולכן אין פתרון. ההגיון מאחורי זה הוא שבשורת סתירה כתוב בעצם

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$$

וזה הרי לא ייתכן.

עכשיו לאפשרויות האחרות.

הגדרה 1.10 נזכור שלכל משתנה מתאימה עמודה. משתנה שבעמודה שלו <u>במטריצה המדורגת</u> אין איבר מוביל נקרא **משתנה חופשי**

למשל במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אין משתנים חופשיים. במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y הוא משתנה חופשי ובמטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z הוא משתנה חופשי.

טענה 1.11 אם לאחר דירוג **אין** משתנים חופשיים בכלל. אז יש למערכת פתרון יחיד. מוצאים אותו כמו שעשינו בתרגילים למעלה.

טענה 1.12 אם למערכת לאחר דירוג יש לפחות משתנה חופשי אחד. אז יש למערכת **אינסוף** פתרונות. איך מוצאים אותם? מסמנים את המשתנים החופשיים בפרמטרים (בדר"כ t, s) ומוצאים פתרון עם פרמטר. כמו שנראה מייד:

דוגמא 1.13 נניח שאחרי דירוג הגענו למטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אז אנחנו רואים ש y משתנה חופשי. נסמן אותו $y = t$. מהשורה השניה אנחנו רואים ש $z = 2$ ומהשורה הראשונה

$$x = 3 - y - 2z = 3 - t - 4 = -1 - t$$

את הפתרון הכללי של המערכת כותבים ככה:

$$(-1 - t, t, 2)$$

2 אלגברת המטריצות

טוב אז נעזרנו במטריצות כדי לפתור מערכות משוואות לינאריות. אבל זה היה די כלי טכני. עכשיו נלמד מטריצות בפני עצמן ונראה שיש סיבה לעשות את זה. הדבר המרכזי שנרצה ללמוד הוא פעולות של מטריצות. נתחיל עם כמה מושגים. ניקח מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

למטריצה הזאת יש 2 שורות ו 3 עמודות. אנחנו נסמן בסימון $A_{i,j}$ את האיבר שהוא בשורה i ובעמודה j. למשל

$$A_{1,2} = 2$$

$$A_{2,3} = 5$$

($A_{3,2}$ מקפיץ exception). את כל המטריצות שיש להן 2 שורות ו3 עמודות נסמן בסימון $\mathbb{R}^{2\times 3}$ (ה $\mathbb{R}$ אומר שהאיברים במטריצה הם מספרים ממשיים - לא צריך להיות מודאג מזה. כרגע.) באופן כללי מטריצות עם m שורות ו n עמודות מסמנים ב $\mathbb{R}^{m\times n}$. (לזכור תמיד ששמאל קשור לשורות וימין קשור לעמודות, זה יחזור בהמשך הקורס גם).

זה אולי נשמע פשוט אבל חשוב להגדיר שוויון מטריצות

הגדרה 2.1 שתי מטריצות A, B הן **שוות** אם הן בעלות אותו גודל ולכל i, j מתקיים

$$A_{i,j} = B_{i,j}$$

עכשיו בוא נגיע לפעולות על מטריצות. זה הולך ככה, יש 2 פעולות קלות ואחת קשה. הפעולות הקלות הן חיבור וכפל בסקלר.

2.1 חיבור מטריצות וכפל בסקלר

הגדרה 2.2 תהינה A ו B שתי מטריצות באותו גודל. אזי החיבור שלהן $A+B$ היא מטריצה המתקבלת מחיבור איבר איבר. בנוסחא:

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

דוגמא 2.3 למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

יש כמה דברים ששווה לציין. קודם כל, אפשר לחבר רק מטריצות **מאותו גודל**. אין משמעות למשהו כזה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

נשים לב לתכונות הבאות שחיבור מטריצות מקיים. (קיבוץ וחילופיות)

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$A+B = B+A$$

חידה 2.4 מצא מטריצה B כך שלכל מטריצה A שהיא מתקיים

$$A + B = A$$

טוב, די ברור שצריך ש B תהיה מלאה באפסים. מטריצה זו נקראת מטריצת **האפס**. ומסמנים אותה באופן מפתיע ב 0. אז אפשר לכתוב

$$A + 0 = A = 0 + A$$

אם רוצים להדגיש את הגודל שלה אפשר לכתוב $0_{m,n}$. למשל

$$0_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חידה 2.5 תהי A מטריצה. מצא מטריצה C כך ש

$$A + C = 0$$

זה גם קל פשוט צריך לקחת בכל מקום את המינוס של האיבר המתאים. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

אז צריך לקחת

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

ואז בוודאי

$$A + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

את המטריצה הזאת מסמנים באופן מפתיע ב $-A$ וקוראים לה הנגדית של A.
נעבור לכפל בסקלר.

הגדרה 2.6 אם A מטריצה ו c סקלר (מספר ממשי). אז המטריצה $c \cdot A$ היא מטריצה שבה כפולים כל איבר ב c.
למשל:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$$

מן הסתם לא יפתיע אף אחד לשמוע ש $1 \cdot A = A$ ו $0 \cdot A = 0$ (שימו לב! האפס בצד ימין כאן הוא **מטריצת האפס**).

2.2 מכפלת מטריצות ומשמעויות

עכשיו הגענו לחלק המסובך יותר. מכפלת מטריצות. בתור התחלה נדגיש. שבשונה מחיבור, כאשר כופלים מטריצות הן לא צריכות להיות באותו גודל. אבל יש משהו אחר שצריך לקרות. אם

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times k}$$

אז מותר לכפול $A\cdot B$. במילים: כדי שכפל מטריצות יהיה מוגדר, צריך שמספר העמודות של המטריצה השמאלית יהיה מספר השורות של המטריצה הימנית. למשל מותר לכפול

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 15 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

אבל אסור לכפול

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 15 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

התוצאה $A\cdot B$ הולכת להיות מטריצה ב $\mathbb{R}^{m\times k}$. במילים: אותו מספר שורות כמו A ואותו מספר עמודות כמו B.

הגדרה 2.7 טוב. אז איך כופלים? כדי לעשות חיים קלים נתחיל מהמקרה שבו $m = 1$ ו $k = 1$. מטריצה שיש לה רק שורה אחת נקראת **וקטור שורה** מטריצה שיש לה רק עמודה אחת נקראת **וקטור עמודה.** אז אנחנו בעצם רוצים לכפול וקטור שורה בוקטור עמודה. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כדי לבצע את הכפל הזה כופלים את האיבר הראשון מהוקטור השמאלי עם האיבר הראשון מהוקטור הימני, השני עם השני וכן הלאה וסוכמים את הכל. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 3\cdot 2 + 1\cdot 2 = -3$$

(דרך אגב, זה בדיוק כמו מכפלה סקלרית שאולי למדתם לבגרות). בנוסחא זה נראה ככה:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

בשביל להסביר איך כופלים 2 מטריצות במקרה הכללי, צריך עוד סימון. אם A מטריצה אז נסמן ב $R_i(A)$ את השורה ה i של A וב $C_i(A)$ את העמודה ה i של A (זה בא כמובן מ column) למשל

$$R_1(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 15 & 6 & 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 15 & 6 & 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

עכשיו הגענו סוף סוף לדבר עצמו, אם $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ו $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ אז המכפלה מוגדרת לפי

$$(AB)_{i,j} = R_i(A) \cdot C_j(B)$$

במילים: האיבר במקום i,j של המכפלה AB הוא המכפלה של השורה ה i של A עם העמודה ה j של B.

דוגמא 2.8

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 15 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -9 & -1 \\ -27 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

אפשר גם לכתוב את הכפל הזה עם הנוסחא הבאה:

$$(AB)_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + \ldots + A_{i,n}B_{n,j}$$

לפני שננסה לשכנע שיש הגיון בפעולה המסובכת הזאת. נתעכב על כמה תכונות שלה. קודם כל, חוק הקיבוץ מתקיים

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

(בהנחה שהגדלים של המטריצות מסתדרים כך שכל המכפלות מוגדרות ־ ככה גם בשאר החוקים שנכתוב פה נניח שהגדלים מסתדרים ולכן המכפלה מוגדרת). מי שזה נראה לו ברור מאליו מוזמן לנסות להוכיח את זה, זה לא קל כמו שזה נראה. אנחנו בכל אופן נדלג על ההוכחה.

גם חוק הפילוג מתקיים

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$

באופן לא מפתיע כל כך, כפל במטריצת האפס יוצא 0

$$A \cdot 0 = 0$$

מה שלא כל כך ברור זה האם יש מטריצה ש"משחקת" תפקיד של 1? האם יש מטריצה מטריצה שאם כופלים אותה ב A אז נשאר A? שוב, אנחנו צריכים להיות זהירים עם הגדלים של המטריצות. אז בוא ננסח את זה שוב:

האם יש מטריצה B כלשהיא, כך שלכל $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מתקיים ש $BA = A$? קודם כל אפשר לראות שאם יש מטריצה כזאת, היא חייבת להיות בגודל $m\times m$ (כי צריך שהכפל יהיה

מוגדר, ושהתוצאה תהיה עם m שורות). יש מטריצה כזאת, היא נקראת מטריצת היחידה ומסומנת ב I, יש לה 1 על האלכסון ו 0 בכל מקום אחר. כלומר היא נראת ככה:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

או אם רוצים בנוסחא:

$$I_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

גם כאן אם רוצים להדגיש את הגודל אפשר לסמן I_m. למשל

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

טענה 2.9 תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. נגדיר מטריצה $I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ כמו למעלה, אז

$$IA = A$$

הוכחה: לפי הנוסחא שרשמנו למעלה

$$(IA)_{i,j} = I_{i,1}A_{1,j} + \ldots + I_{i,m}A_{m,j}$$

עכשיו נשים לב שכל ה $I_{i,*}$ הם 0 חוץ מאשר $I_{i,i}$אז אפשר לבטל את רוב הסכימה הזאת ולהישאר עם

$$I_{i,1}A_{1,j} + \ldots + I_{i,m}A_{m,j} = I_{i,i}A_{i,j} = 1A_{i,j} = A_{i,j}$$

כלומר

$$(IA)_{i,j} = A_{i,j}$$

שזה בדיוק אומר

$$IA = A$$

■

דרך אגב, אפשר כמובן באותו אופן לקחת את $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ואז יתקיים $AI = A$. (אבל מהצד השני הכפל לא יהיה מוגדר).

טוב, זה הזמן להגיד מה הבעיות בכפל מטריצות. דבר אחד שכבר צריך להיות ברור לסטודנט חד האבחנה הוא שהכפל לא חילופי. כלומר באופן כללי

$$AB \neq BA$$

סיבה אחת לזה היא שייתכן שצד אחד מוגדר והצד השני לא (כמו שראינו קודם). אבל אפילו אם שני הצדדים מוגדרים לא חייב להיות שוויון למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הדוגמא הזאת מראה לנו עוד נקודה. ייתכן שהכפל של שתי מטריצות שונות מ0 ייצא 0! (זה לא יכול לקרות עם מספרים למשל).

עוד בעיה היא שאי אפשר לצמצם מטריצות. כלומר, אם

$$AB = AC$$

אז אפילו אם $A \neq 0$ זה לא אומר ש

$$B = C$$

למשל

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז אי אפשר לצמצם את המטריצה השמאלית.

- [אני חושב שאני אוותר כאן על כפל עמודה־עמודה וכפל שורה־שורה.]

אז עם כל החסרונות האלה, למה אנחנו צריכים כפל מטריצות? את התשובה נראה בכמה מקומות בקורס. אבל כמה תשובות ראשוניות אפשר לתת מייד. בואו נחזור למערכת משוואות לינארית

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

שימו לב שאת אותו דבר בדיוק אפשר לכתוב ככה:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

למשל את המערכת

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ x - 5y &= 3 \end{aligned}$$

אפשר לכתוב ככה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

אז מכפלת מטריצות נותנת לנו כלי לתאר מערכת משוואות לינאריות. לפתור מערכת משוואות לינארית זה בעצם לשאול שאלה כזאת: בהינתן וקטור $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ ומטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (מטריצת המקדמים) צריך למצוא את כל הוקטורים $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (הנעלמים) כך ש

$$Ax = b$$

נעזר בתיאור הזה בהמשך הקורס.

- [אפשר להראות כאן שפתרון כללי הוא פתרון הומוגני+פתרון פרטי אבל אולי עדיף לדלג על זה?]

דוגמא 2.10 אני רוצה להראות עוד דוגמא שמראה איפה כפל מטריצות יכול לבוא לידי ביטוי. דוגמא שנותנת תחושה של בעיה אמיתית.

נניח שיש 3 סוגים של מזג אויר. שמשי, מעונן וגשם. נניח שאנחנו יודעים, בהינתן מזג האויר היום, מה הסיכוי של כל סוג מזג אויר מחר.

אם היום שמשי. מחר יהיה שמשי בהסתברות 0.7 מעונן בהסתברות 0.2 וגשום בהסתברות 0.1.

אם היום מעונן. מחר יהיה שמשי בהסתברות 0.2. מעונן בהסתברות 0.5 וגשום בהסתברות 0.3.

אם היום גשום. מחר יהיה שמשי בהסתברות 0.1. מעונן בהסתברות 0.4. וגשום בהסתברות 0.5.

בקיצר לצייר את זה על הלוח.

עכשיו הנה שאלה: נניח שהיום שמשי. מה הסיכוי שעוד 5 ימים יהיה גשם? מה הסיכוי שעוד n ימים יהיה גשם?

אפשר להכניס את כל האינפורמציה הזאת למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

נשים לב שעמודה/שורה ראשונה קשורות לשמשי, שניה למעונן ושלישית לגשום.

את העובדה שהיום שמשי אני מתאר ע"י וקטור הסתברות

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר בהסתברות 1 מזג האויר שמשי בהסתברות 0 הוא מעונן ובהסתברות 0 הוא גשום.

עכשיו

$$Av = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

שזה בדיוק הוקטור שמתאר את ההסתברויות אחרי יום 1.

אז מה ההסתבריות אחרי 5 ימים, או אחרי n ימים?

$$A^5 v$$

או

$$A^n v$$

כפל מטריצות נותן לנו בדיוק את הכלי לתאר את מה שקורה כאן.

הערה 2.11 כרגע אין לנו כלים לחשב או להבין איך נראה A^n וגם לחשב A^{100} זה לא סימפטי בשבילנו. נחזור לבעיה הזאת בהמשך הקורס.

על כל פנים. ברור ש"מערכות" מציאותיות אי אפשר לתאר בצורה כל כך פשוטה. אבל זה אולי נותן תחושה איך המושגים שאנחנו מדברים עליהם קשורים למציאות.

חזרה לחומר. הנה עוד תובנה שאפשר להגיע אליה באמצעות כפל מטריצות. נחזור למערכות משוואות לינאריות. כבר ראינו איך פותרים משוואות כאלה. בעזרת דירוג גאוס (דירוג לצורה קנונית). גם תהליך הדירוג אפשר לתאר באמצעות כפל מטריצות.

הגדרה 2.12 מטריצת שורה אלמנטרית היא מטריצה המתקבלת מביצוע פעולת שורה על מטריצת היחידה I.

דוגמא 2.13 נדגים כמה מטריצות שורה אלמנטריות בגודל 3×3.

- המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

התקבלה מ I ע"י ביצוע חילוף $R_2 \leftrightarrow R_3$

- המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

התקבלה מ I ע"י ביצוע $R_2 = -3R_2$

- המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

התקבלה מ I ע"י ביצוע $R_1 = R_1 + 3R_2$

כל אלה דוגמאות של מטריצות שורה אלמנטריות. אז מה המטריצות האלה עוזרות לנו בחיים?

טענה 2.14 ביצוע של פעולת שורה על מטריצה A זה בדיוק כמו לכפול אותה משמאל במטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולת השורה. במילים אחרות, לבצע פעולת שורה על A זה כמו לבצע אותה קודם על I ואז לכפול משמאל ב A.

בואו נדגים את זה:

דוגמא 2.15 ניקח את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לבצע את פעולת השורה $R_1 \leftrightarrow R_2$ זה בדיוק כמו לכפול משמאל ככה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לבצע את פעולת השורה $R_1 = \frac{1}{2}R_1$ זה בדיוק כמו לכפול משמאל ככה:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לבצע את פעולת השורה $R_3 = R_3 - 3R_1$ זה בדיוק כמו לכפול משמאל ככה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

לכן לבצע דירוג מטריצה זה בעצם לכפול שוב ושוב משמאל במטריצות שורה אלמנטריות. זאת אבחנה שתועיל לנו בהמשך.

2.3 הפיכות מטריצות

בחלק הזה נדבר רק על מטריצות **ריבועיות**

הגדרה 2.16 מטריצה A נקראת ריבועית אם מספר השורות שלה שווה למספר העמודות שלה.

בהתאמה, כשנדבר על מערכות משוואות לינאריות בחלק הזה, אנחנו נדבר רק על מערכות משוואות לינאריות $Ax = b$ שבהן A היא מטריצה ריבועית. כלומר מספר המשוואות שווה למספר הנעלמים.

ניקח מערכת משוואות לינארית $Ax = b$ כאשר A ריבועית. נדרג את A. נניח שלמערכת יש פתרון יחיד. זה אומר שבמטריצה המדורגת אין משתנים חופשיים (ואין שורות סתירה). בגלל ש A ריבועית, המטריצה המדורגת צריכה להראות בערך ככה:

$$\begin{pmatrix} d_1 & & * & * \\ & d_2 & & * \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

מתחת לאלכסון יש אפסים, מעליו יש כל מיני דברים לא ידועים. על האלכסון עצמו **אין** אפסים (אחרת יהיו משתנים חופשיים!). למשל יכולה לצאת לנו מטריצה כזאת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

לא עשינו את זה קודם כי לא היינו צריכים אבל אפשר בעיקרון להמשיך לדרג את המטריצה הזאת (כלומר, לבצע פעולות שורה) ולהגיע ל I.

קל לראות שאם נבצע את הפעולות הבאות:

1. $R_2 = \frac{1}{2}R_2$
2. $R_3 = -R_3$
3. $R_2 = R_2 - \frac{1}{2}R_3$
4. $R_1 = R_1 - R_3$
5. $R_1 = R_1 - 3R_2$

אז נקבל את המטריצה I. מכאן נסיק:

אבחנה 2.17 אם למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד אז אפשר לדרג את A למטריצת היחידה I. (שוב, נדגיש. זה נכון רק אם A ריבועית).

מה עם הטענה ההפוכה? היא בוודאי נכונה. אם אפשר לדרג את A למטריצת היחידה, אז קיבלנו צורה מדורגת בלי משנים חופשיים ובלי שורות סתירה ולכן למערכת $Ax = b$ יש בוודאי פתרון יחיד (לא משנה מה b).

אם כן יש לנו מסקנה שתעזור בהמשך:

מסקנה 2.18 תהי A מטריצה ריבועית. למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד אם ורק אם אפשר לדרג את A למטריצת היחידה I.

עכשיו לעניין המרכזי של הפרק. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. האם אפשר לכפול את A במטריצה אחרת ולקבל את I? כלומר האם יש מטריצה B כך ש $AB = BA = I$? אם יש כזאת אז באופן טבעי נסמן אותה ב A^{-1}.

לא תמיד יש מטריצה כזאת. למשל חישוב פשוט יראה שאין סיכוי למצוא מטריצה

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

כך ש

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא הפיכה. השאלה שלנו כרגע היא השאלה הבאה: בהינתן מטריצה ריבועית A, איך יודעים אם היא הפיכה? ואם היא הפיכה, איך מוצאים את ההופכית A^{-1}?

דרך השאלה הזאת אנחנו גם נבין קצת יותר טוב את הנושא של מערכות משוואות לינאריות.

הערה 2.19 זכרו שכפל מטריצות הוא לא חילופי. ולכן אם מצאנו B כך ש $AB = I$, אנחנו יכולים להגיד ש A **הפיכה מימין** אבל זה לא כל כך ברור אם צריך להתקיים $BA = I$.

בדומה, אם יש B כך ש $BA = I$ אנחנו יכולים להגיד ש A **הפיכה משמאל** אבל זה לא ברור האם $AB = I$. נחזור לסוגיא הזאת בהמשך.

נתחיל עם כמה אבחנות בסיסיות. אם A ו B הן מטריצות הפיכות אז גם המכפלה שלהן $A \cdot B$ היא מטריצה הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ההסבר פשוט: קל לראות ש

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$$ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

. כמו כן, שוויונות הברורים

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

אומרים בעצם ש $A = (A^{-1})^{-1}$

עכשיו בואו נדבר על מטריצות שורה אלמנטריות.

טענה 2.20 כל מטריצת שורה אלמנטרית היא הפיכה. ההופכית שלה היא גם כן מטריצת שורה אלמנטרית והיא המטריצה שמתאימה לפעולה **ההפוכה.**

דוגמא 2.21 נסתכל על כמה דוגמאות ב 3×3.

- המטריצה שמתאימה ל $R_2 = cR_2$ היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וההופכית שלה היא המטריצה שמתאימה ל $R_2 = \frac{1}{c}R_2$. אכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(נזכור ש $c \neq 0$ ולכן אין בעיה לחלק ב c)

- המטריצה שמתאימה ל $R_1 = R_1 + 3R_3$ היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וההופכית שלה היא המטריצה שמתאימה ל $R_1 = R_1 - 3R_3$. אכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- המטריצה שמתאימה להחלפת שורות $R_1 \leftrightarrow R_2$ היא הופכית של עצמה (יש דברים כאלה!)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

עכשיו בואו נסתכל שוב על מסקנה 2.17. כבר ראינו שדירוג מטריצה זה בעצם כמו לכפול משמאל במטריצות שורה אלמנטריות. לכן אפשר לנסח את האבחנה מחדש ככה:

אבחנה 2.22 אם למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד אז יש מטריוצת שורה אלמנטריות $E_k, \ldots, E_1$ כך ש

$$E_k \cdots E_1 A = I$$

אז מצאנו $B = E_k \cdots E_1$ שמקיימת $BA = I$. האם גם $AB = I$? כן. היות ש B היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות, היא מכפלה של מטריצות הפיכות ולכן הפיכה בעצמה. כלומר יש B^{-1}. ולכן אפשר לכפול בשני אגפים

$$B^{-1}BA = B^{-1}I$$

$$A = B^{-1}$$

ועכשיו לכפול מימין ב B ולקבל

$$AB = I$$

ולכן A הפיכה וההופכית היא $A^{-1} = E_k \cdots E_1$. שוב ננסח זאת במסקנה הבאה:

מסקנה 2.23 אם למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד אז A הפיכה.

האם ההפך גם נכון? כן וזה אפילו קל להוכיח.

טענה 2.24 אם A הפיכה אז למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.

הוכחה: נניח שיש וקטור x שפותר את המשוואה $Ax = b$. נכפול משמאל בהופכית A^{-1} ונקבל

$$x = A^{-1}b$$

קל לראות שאכן $A^{-1}b$ הוא פתרון. כלומר יש רק פתרון יחיד שהוא הוקטור $A^{-1}b$. ■

מסקנה 2.25 התנאים הבאים שקולים:

- A הפיכה.
- ניתן לדרג את A למטריצת היחידה.

- למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד (לא משנה מה b!).

אפשר להוסיף עוד תנאי שקול:

טענה 2.26 A הפיכה אם ורק אם היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

הוכחה: אם A מכפלה של מטריצות אלמנטריות אז היא וודאי הפיכה (בתור מכפלה של הפיכות). מצד שני, אם A הפיכה אז כבר ראינו שיש מטריצות אלמנטריות

$$E_k, \ldots, E_1 A = I$$

ולכן

$$A = (E_k, \ldots, E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

וזאת מכפלה של מטריצות אלמנטריות כי ההופכית של אלמנטרית היא גם אלמנטרית. אז למסקנה יש לנו את המשפט הבא: ■

משפט 2.27 התנאים הבאים שקולים עבור מטריצה ריבועית A:

- A הפיכה.
- ניתן לדרג את A למטריצת היחידה.
- למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד (לא משנה בכלל מה b).
- A היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

כל זה טוב ויפה אבל איך תכלס יודעים אם A הפיכה ואיך תכלס מוצאים את ההופכית A^{-1}? בואו ניזכר במה שאמרנו קודם אפשר לדרג את A עד לצרוה מדורגת. אם בצורה המדורגת יש משתנה חופשי אז לבמערכת $Ax = b$ אין פתרון יחיד ולכן A לא הפיכה. אם אין משתנה חופשי בצורה המדורגת, אז אפשר להמשיך לדרג עד שמגיעים ל I. הדירוג הזה מקביל לכפל משמאל במטריצות אלמנטריות

$$E_k \cdots E_1 A = I$$

אז ההופכית היא

$$A^{-1} = E_k \cdots E_1$$

איך מוצאים אותה? נשים לב ש

$$E_k \cdots E_1 = E_k \cdots E_1 I$$

כלומר המטריצה הזאת תתקבל אם נבצע על I את פעולות השורה האלמנטריות שביצענו כדי לדרג את A.

דוגמא 2.28 בואו נסתכל על דוגמא תכלס. ניקח את המטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נייצר מערכת כזאת, שבה בצד שמאל כותבים את המטריצה שלנו ובצד ימין את I

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

נדרג את המערכת עד שבצד שמאל נגיע ל I

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1=\frac{1}{2}R_1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_3=R_3-3R_1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3=-\frac{1}{5}R_3}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \overset{R_2=R_2-2R_3}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

ולכן

$$\overset{R_1=R_1-2R_3}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

נכתוב שוב את האלגוריתם שלנו במילים: בהינתן במטריצה A מדרגים אותה עד שמגיעים ל I (אם אי אפשר להגיע ל I כי במטריצה המדורגת יש 0 על האלכסון ־ המטריצה לא הפיכה). תוך כדע הדירוג, מבצעים בדיוק את אותן הפעולות שביצענו על A על המטריצה I. בסיום המטריצה שיצאה לנו היא ההופכית A^{-1}.

לפני שנעבור לנושא הבא יש עוד כמה אבחנות חשובות.

ראינו כבר שאם A לא הפיכה, אי אפשר לדרג אותה עד ל I. חשוב לשים לב שבמצב זה אפשר לדרג את A עד שמקבלים שורת אפסים. למה? כי מדרגים את A לצורה מדורגת שנראית בערך ככה:

$$\begin{pmatrix} d_1 & & * & * \\ & d_2 & & * \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

אבל הפעם לפחות אחד ה d_i צריך להיות 0 (כי אין לא הפיכה, ולכן אין פתרון יחיד ולכן יש משתנה חופשי). נסתכל על המקום הכי נמוך באלכסון שהוא 0.

$$\begin{pmatrix} d_1 & & * & * & * & * \\ & \ddots & & & * & * \\ 0 & & d_i = 0 & & & * \\ 0 & & & d_{i+1} & & * \\ 0 & 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

כלומר $d_{i+1}, \ldots, d_n \neq 0$. אז אפשר להשתמש בהם כדי לאפס את כל מה שמימין ל d_i ולקבל שורת אפסים.

מסקנה 2.29 אם A לא הפיכה. ניתן לדרג את A עד לקבלת מטריצה עם שורת אפסים.

גם ההפך נכון: כלומר אם אפשר לדרג את A למטריצה עם שורת אפסים, היא לא הפיכה. נוכיח את זה באמצעות טענת עזר:

טענה 2.30 תהי B מטריצה עם שורת אפסים. למשל $R_i(B) = 0$. אזי B לא הפיכה.

הוכחה: נניח בשלילה שיש הופכית B^{-1}. אז

$$BB^{-1} = I$$

אבל לפי הגדרת כפל

$$(BB^{-1})_{i,i} = R_i(B) \cdot C_i(B^{-1}) = 0$$

ואילו

$$(I)_{i,i} = 1$$

סתירה. ולכן B לא הפיכה. ■

טענה 2.31 אם אפשר לדרג את A למטריצה עם שורת אפסים B אז A היא לא הפיכה.

הוכחה: כי זה בעצם אומר שיש מטריצות אלמנטריות $E_1, \ldots, E_k$ ככה ש

$$E_1 \cdots E_k A = B$$

אם A הפיכה אז גם B הפיכה בתור מכפלת מטריצות הפיכות. ■

הערה 2.32 עכשיו אנחנו רוצים לחזור לסוגיית ההפיכות משמאל והפיכות מימין שהזכרנו בהתחלה ולראות שהיא בעצם לא בעייתית

- אמרנו ש A הפיכה אם קיימת מטריצה B כך ש $AB = BA = I$. גם אם תמצאו מטריצה B המקיימת $BA = I$ ומטריצה C המקיימת $AC = I$ עדיין A תהיה הפיכה. זאת מהסיבה הפשוטה ש B ו C הנ"ל חייבות להיות שוות. זה בגלל ש

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

- מה קורה אם אני רק מוצא מטריצה B כך ש $BA = I$? האם אז A הפיכה? לשמחתנו כן. נסתכל על המשוואה $Ax = 0$ ברור שיש לה לפחות פתרון אחד $x = 0$. אבל זה הפתרון היחיד כי אם $Ax = 0$ וכופילם ב B משמאל מקבלים $x = 0$. אז לפי המשפט 2.27 נקבל שהמטריצה A הפיכה.

- מה קורה אם מוצאים B כך ש $AB = I$? גם אז A הפיכה. אבל את זה נשאיר כתרגיל. [פתרון: לפי הסעיף הקודם, המטריצה B הפיכה. ולכן יש גם C כך ש $BC = I$. לפי הסעיף הראשון כאן. בהכרח $A = C$ ולכן

$$AB = BA = I$$

כנדרש.]

- ראינו קודם שאם A הפיכה ו B הפיכה אז גם AB הפיכות. אנחנו נצטרך להמשך הקורס לדעת שגם ההפך נכון. כלומר אם AB הפיכה אז גם A וגם B הפיכות.
הסבר: נניח C ההופכית של AB אז

$$(AB)C = A(BC) = I$$

ולכן A הפיכה מימין ולכן הפיכה. בדומה

$$C(AB) = (CA)B = I$$

ולכן

$$B$$

הפיכה.

2.4 שחלוף מטריצות

בפרק הזה נציג בקצרה כלי טכני שנזדקק לו בנקודה אחת או שתיים בקורס.

הגדרה 2.33 תהי A מטריצה מגודל $m \times n$. המטריצה המשוחלפת A^t היא מטריצה בגודל $n \times m$ המוגדרת לפי

$$(A^t)_{i,j} = A_{j,i}$$

כלומר A^t היא שיקוף לפי אלכסון המטריצה. שורות ב A הופכות להיות עמודות ב A^t ועמודות ב A הופכות להיות שורות ב A^t. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

למה אנחנו צריכים את הדבר הזה? בקורס שלנו זה רק יהיה כלי טכני שיעזור לנו להמיר משפטים על שורות למשפטים על עמודות. או שזה יהיה סימון נוח.

איזה דברים מעניינים אפשר להגיד על שחלוף? דבר ראשון

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

את זה אתם מוזמנים להוכיח בעצמכם.
תכונה יותר מעניינת היא התכונה הבאה:

טענה 2.34 אם $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ו$B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ אז

$$(AB)^t = B^t A^t$$

הוכחה: צריך להראות שלכל i,j

$$[(AB)^t]_{i,j} = [B^t A^t]_{i,j}$$

אז נראה:

$$\begin{aligned}[(AB)^t]_{i,j} &= [AB]_{j,i} = A_{j,1}B_{1,i} + \ldots + A_{j,n}B_{n,i} = \\ &= B_{1,i}A_{j,1} + \ldots + B_{n,i}A_{j,n} = \\ &= B^t_{i,1}A^t_{1,j} + \ldots + B^t_{i,n}A^t_{n,j} = [B^t A^t]_{i,j}\end{aligned}$$

■

3 דטרמיננטות

גם בפרק הזה נדבר רק על מטריצות ריבועיות. בפרק זה נדבר על פונקציה שמקבלת מטריצה ריבועית ומחזירה מספר. לפונקציה הזאת קוראים דטרמיננטה. את הדרמיננטה של מטריצה A מסמנים $|A|$, ולפעמים $\det A$. שימו לב! אין קשר בין דטרמיננטה לערך מוחלט, זה סתם סימון דומה. טוב אז אנחנו רוצים להגדיר מה זה דטרמיננטה. יש נוסחא לדטרמיננטה אבל היא מאוד מסובכת ולא אינטואיטיבית. יותר קל להבין מה זה דטרמיננטה אם נספר עליה בעקיפין, כלומר נגיד מה התכונות שהפונקציה הזאת מקיימת.(זה אולי נשמע מוזר אבל זאת סיטואציה מאוד נפוצה במתמטיקה).

אז הנה התכונות החשובות של דטרמיננטה

1. הדטרמיננטה של מטריצת היחידה היא 1. כלומר $|I| = 1$
2. אפשר להוציא החוצה סקלר מתוך שורה. כלומר:

$$\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ ca_{i,1} & \cdots & ca_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\right| = c\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\right|$$

למשל

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = 2\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right|$$

שימו לב! זאת הוצאת סקלר משורה ספציפית ולא מכל המטריצה. אי אפשר להוציא סקלר מהדרמיננטה ככה.

$$|cA| \neq c|A|$$

3. אפשר לפצל סכום שורות. כלומר:

$$\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1}+b_{i,1} & \cdots & a_{i,n}+b_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ b_{i,1} & \cdots & b_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right|$$

למשל

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

שוב. שימו לב שזה לא חיבור מטריצות כלומר בדרך כלל

$$|A+B| \neq |A| + |B|$$

4. התכונה האחרונה היא שהחלפת שתי שורות גורמת לשינוי סימן

$$\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| = -\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right|$$

למשל

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = -\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right|$$

זהו. אלה התכונות. אפשר להוכיח שיש פונקציה שמקיימת את התכונות האלה. ורק אחת כזאת. אנחנו נוותר על ההוכחה הזאת (בכל זאת, יש לי רק שעתיים בשבוע).
נתחיל עם שתי טענות פשוטות אבל שימושיות מאוד:

טענה 3.1 אם במטריצה A יש שתי שורות זהות אז $|A| = 0$.

הוכחה: זה בגלל שהחלפת שורות משנה סימן

$$\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| = -\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right|$$

אז נקבל בעצם

$$|A| = -|A|$$

וזה מכריח

$$|A| = 0$$

■

טענה 3.2 אם A מטריצה עם שורת אפסים אז $|A| = 0$.

הוכחה: אפשר להוציא החוצה סקלר 0 למשל

$$\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| = 0\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| = 0$$

■

עכשיו נחשב דטרמיננטות של מטריצות קטנות. עבור מטריצה 1×1:

$$|(a)| = a|(1)| = a|I| = a$$

עובר מטריצה 2×2:

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= ac\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| + ad\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| + bd\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| + bc\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= ad\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| + bc\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= ad\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| - bc\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = ad - bc
\end{aligned}$$

מומלץ לזכור על פה ש

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc$$

טוב בסדר. אז יש כזאת פונקציה. נתחיל מהשאלה הבאה: איך מחשבים אותה?

בשביל זה אנחנו צריכים להבין מה דירוג מטריצה עושה לדטרמיננטה. עבור שתיים מהפעולות זה די ברור.

- $R_i \leftrightarrow R_j$: החלפת שתי שורות משנה סימן של הדטרמיננטה. זאת אחת התכונות הבסיסיות.
- $R_i = cR_i$. כפל שורה בסקלר מכפילה את הדטרמיננטה באותו סקלר. זאת אחת התכונות הבסיסיות.
- $R_i = R_i + cR_j$. פה צריך לבדוק אבל זה לא קשה כל כך. אם המטריצה המקורית היא

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

אז אחרי הפעולה נקבל

$$\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1}+ca_{j,1} & \cdots & a_{i,n}+ca_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ ca_{j,1} & \cdots & ca_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| + c\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \vdots & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right|$$

כלומר זאת פעולה שלא משנה את הדטרמיננטה.

זה נותן לנו כלי בשביל לחשב את הדטרמיננטה. בתור התחלה נראה איך מחשבים דטרמיננטה של מטריצות משולשיות עליונות

תהי A מטריצה שיש לה מתחת לאלכסון רק אפסים (מטריצה כזאת נקראת **משולשית עליונה**). הדרמיננטה של A היא מכפלת אברי האלכסון. כלומר

$$\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$$

הוכחה: נבצע פעולות שורה די בדומה לקודם. אם $a_{n,n}=0$ אז יש שורת אפסים

והדטרמיננטה היא באמת 0.אחרת

$$\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| = a_{n,n}\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 \end{pmatrix}\right|$$

ואז אפשר להשתמש בשורה האחרונה כדי לאפס את כל העמודה האחרונה בלי לשנות את הדטרמיננטה

$$= a_{n,n}\left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & & 0 \\ 0 & a_{2,2} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}\right|$$

אם $a_{n-1,n-1} = 0$ אז יש שורת אפסים והדטרמיננטה 0. אחרת אפשר להמשיך וכו' עד שבסוף נגיע ל

$$a_{n,n}a_{n-1,n-1}\cdots a_{1,1}\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 \end{pmatrix}\right| = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$$

כנדרש. ■

עכשיו נראה דוגמא לחישוב דטרמיננטה:

דוגמא 3.3 נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

נדרג אותה, <u>עד שנגיע לצורה משולשית עליונה.</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{R_1=\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{R_2=R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_3=R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

עכשיו אפשר לחשב את הדטרמיננטה על ידי מעקב על הפעולות. כשמגיעים למטריצה משולשית אפשר כבר לדעת מה הדטרמיננטה.

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right| = 2\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right| = 2\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right| = 10$$

$$= 2\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -12$$

זאת דרך אפקטיבית לחישוב דטרמיננטה.

אבחנה 3.4 פעולות שורה יכולות לשנות את הדטרמיננטה. אבל הם לא יכולות לשנות אותה ממספר שהוא לא 0 ל 0 או להפך.

מהאבחנה הזאת אנחנו יכולים להסיק את המשפט החשוב ביותר בנוגע לדטרמיננטות.

משפט 3.5 $|A| \neq 0$ אם ורק אם A הפיכה.

הוכחה: ניזכר בדברים שלמדנו בפרק על הפיכות מטריצות. אם A הפיכה אז אפשר לדרג אותה עד שמגיעים לI. בגלל שפעולות שורה לא משנות מ 0 למספר שהוא לא 0 נקבל ש

$$|A| \neq 0$$

מצד שני, אם A הפיכה אז אפשר לדרג אותה עד למטריצה עם שורת אפסים B. כבר ראינו ש $|B| = 0$ ולכן גם $|A| = 0$. ■

אבל למעשה, כבר יש לנו דרך לבדוק אם מטריצה היא הפיכה או לא. אז למה אנחנו צריכים דטרמיננטה?

התשובה היא שלפעמים דטרמיננטה היא כלי יותר יעיל ומוצלח מהכלים האחרים שפיתחנו. בעזרת ה' נראה מצב כזה בהמשך הקורס.

יש לנו עוד כמה דברים שאנחנו רוצים להגיד בקשר לדטרמיננטה לפני שנעבור לנושא הבא.

קודם כל אנחנו רוצים לחשב דטרמיננטה של מטריצות אלמנטריות. זה בעצם לא קשה. אנח וכבר יודעים איך פעולת שורה משנה דטרמיננטה. והרי כל מטריצה אלמנטרית התקבלה מביצוע פעולת שורה על I. נעבור על כל סוג.

- מטריצת החלפת שורות: מתקבל מהחלפת שתי שורות ב I ולכן הדטרמיננטה שלה היא -1.

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = -1$$

- מטריצת כפל בסקלר $c \neq 0$: מתקבלת מהכפלת שורה ב c ולכן הדטרמיננטה היא c.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = c$$

- מטריצת הוספת שורה אחת לאחרת: זאת פעולה שלא משנה דטרמיננטה ולכן הדטרמיננטה שלה היא 1.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$$

שימו לב שאפשר לנסח עכשיו את התובנה החשובה הבאה:

טענה 3.6 תהי E מטריצה אלמנטרית. אזי

$$|EB| = |E||B|$$

הוכחה: זה נובע ממה שכבר ראינו. בצד שמאל כתוב דטרמיננטה של מטריצה שביצעו עליה פעולת שורה. אבל השינוי בדטרמיננטה בגלל פעולת השורה הוא בדיוק הדטרמיננטה של $|E|$. ■

משפט 3.7 הדטרמיננטה היא כפלית

$$|AB| = |A||B|$$

הוכחה: נפריד לשני מקרים. אם A הפיכה, אפשר לכתוב אותה בתור מכפלת מטריצות אלמנטריות ולכן

$$|AB| = |E_1 \cdots E_k B| = |E_1| \cdots |E_k||B| = |E_1 \cdots E_k||B| = |A||B|$$

עכשיו, אם A לא הפיכה אז גם AB לא הפיכה (זה משפט שראינו בפרק הקודם). ולכן

$$|AB| = 0 = 0|B| = |A||B|$$

■

אנחנו נסיים את הפרק בכך שנראה עוד דרך אחת לחשב דטרמיננטות. וזה על ידי פיתוח לפי שורה או לפי עמודה. לא נוכיח למה הדרך הזאת נכונה רק נציג אותה. יעזור לנו לתת כמה הגדרות קודם.

הגדרה 3.8 תהי A מטריצה. אומרים שמיקום i,j במטריצה הוא **זוגי** אם $i+j$ זוגי. אחרת הוא נקרא **אי זוגי**.

למשל במטריצה הבאה סימנו עם $+$ את המקומות הזוגיים ועם $-$ את המקומות האי זוגיים.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.9 תהי A מטריצה ריבועית. **המינור** של מקום i,j היא המטריצה המתקבלת ממחיקת השורה ה i והעמודה ה j. נסמן את המינור הזה $M_{i,j}$.

למשל

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

אז

$$M_{1,2}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M_{2,2}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

עכשיו ניתן נוסחא רקורסיבית לחישוב דטרמיננטה:

משפט 3.10 כדי לחשב את הדטרמיננטה של A אפשר לעשות ככה: לבחור שורה כלשהיא. לעבור איבר איבר בשורה ולכפול אותו בדטרמיננטה של המינור שלו ואז לסכום את כל מה שיצא עם סימן לפי הזוגיות/אי זוגיות של המקום.

אי אפשר להבין את ההסבר הזה בכלל. צריך לראות דוגמא.

דוגמא 3.11 נפתח את הדטרמיננטה לפי שורה ראשונה

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right| = 1\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right| - 0\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| + 3\left|\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right|$$
$$= 1(-2-12)+3(8) = -14+24 = 10$$

נפתח למשל לפי שורה שניה

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right| = -2\left|\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right| + 2\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| - 3\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right|$$
$$= -2(-12)+2(-1)-3(4) = 24-2-12 = 10$$

בנוסחא זה נראה ככה. נגיד שעושים פיתוח לפי שורה k:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} A_{k,j} |M_{k,j}|$$

הערה 3.12 כל מה שעשינו בפרק הזה על שורות אפשר לעשות גם עם עמודות. הדרך להסביר את זה היא במצעות השחלוף:

משפט 3.13 $|A| = |A^t|$

לא נוכיח משפט זה. אבל ברור ממנו שכל תכונה שראינו על דטרמיננטה בקשר לשורות עובדת גם בקשר לעמודות.

יש עוד שאלה שאפשר לשאול: נניח ש A הפיכה. הבנו כבר ש $|A| \neq 0$. אבל מה המשמעות של המספר? מה זה משנה אם יוצא 1 או -100? יש לזה משמעויות גאומטריות שנדבר עליה בהמשך.

4 מבוא (כבר לא כל כך) קצר לתיאור גיאומטריה באמצעות וקטורים

4.1 וקטורים גיאומטריים ואלגבריים

אנחנו רוצים לעשות גאומטריה. בגיאומטריה מסתכלים על מישור או מרחב ומדברים על כל מיני דברים "ציוריים" שנמצאים בו - נקודות, ישרים, צורות וכו'. אפשר לדבר על גיאומטריה בפני עצמה - במנותק מאלגברה. אבל אחת מהתובנות הגדולות של הגיאומטריה היא שאפשר להשתמש באלגברה כדי לתאר אובייקטים גיאומטריים. אפשר לתאר כל נקודה במישור על ידי שני מספרים (ערך x וערך y) באופן דומה במרחב צריך 3 מספרים וכן הלאה. אז בעצם אפשר להשתמש בוקטור $n \times 1$ או $1 \times n$ בשביל לתאר מרחב n מימדי. ניקח את $\mathbb{R}^{n\times 1}$ - אלה כל וקטורי העמודה באורך n. (אולי לפעמים לצורך נוחות נכתוב את הוקטורים בשורה במקום בעמודה). נסמן מעכשיו את הקבוצה הזאת בפשטות $\mathbb{R}^n$.

(נדגיש כרגע שאנחנו מדברים על וקטורים "אלגבריים" כדי להבדיל אותם מוקטורים "גיאומטריים" שנציג עוד מעט.)

אז יש לנו בעצם התאמה:

וקטורים באורך 2 $(\mathbb{R}^2) \leftrightarrow$ נקודות במישור

וקטורים באורך 3 $(\mathbb{R}^3) \leftrightarrow$ נקודות במרחב

אפשר להגיד שכל וקטור ב $\mathbb{R}^n$ מתאים לנקודה במרחב "n מימדי".

הגישה הזאת מאפשרת לתאר אובייקטים גיאומטריים באמצעות אלגברה. זה בדיוק מה שעושים בגיאומטריה אנליטית, באלגברה לינארית וגם באינפי למשל. אפשר לדבר על הנושא הזה קורס שלם. אנחנו רק נתמקד בכמה אספקטיים מסוימים.

הערה 4.1 נשים לב שבהינתן וקטור אלגברי $u \in \mathbb{R}^n$ וסקלר α אז אפשר לבצע כפל בסדלר αu.

בדומה אם $u, v \in \mathbb{R}^n$ אז יש לנו חיבור וקטורים רגיל (שהוא בעצם חיבור מטריצות).
לכן יש לנו שתי פעולות על וקטורים אלגבריים - חיבור וכפל בסקלר.

יש עוד סוג של וקטורים שחשוב לדבר עליו: וקטורים גיאומטריים. אלה אובייקטים שיש להם כיוון וגודל אבל לא מיקום.

יש הרבה אלמנטים בפיזיקה שהם גודל וכיוון אבל ללא מיקום (כח, מהירות וכדומה) אפשר לתאר וקטור גיאומטרי כחץ עם כיוון מסוים באורך מסוים אבל המיקום שלו לא חשוב.

גם לוקטורים גיאומטריים יש חיבור וכפל בסקלר. כפל בסקלר מבצע מתיחה/כיווץ של הוקטור לפי הסקלר והיפוך כיוון עם הסקלר שלילי.

חיבור וקטורים $u + v$ מתבצע על ידי "כלל המקבילית": שמים את הראש של u על הזנב של vואז $u + v$ מתחיל בזנב של u ונגמר בראש של v [לצייר]

למעשה אם מציירים את u,v כך שייצרו מקבילית אז $u+v$ הוא אלכסון המקבילית.

למעשה וקטורים אלגבריים (שמתארים נקודות) ווקטורים גיאומטריים הם בדיוק אותו מושג. אין צורך להבדיל ביניהם.

אם ניקח וקטורי גיאומטרי u ונקבע את הזנב של החץ בראשית הצירים אז הראש שלו מגיע לנקודה מסוימת. הנקודה הזאת היא וקטור אלגברי שמתאים לוקטור הגיאומטרי.

כלומר $(1,2,3)$ זו גם הנקודה וגם הוקטור שמתחיל ב $(0,0,0)$ ונגמר ב$(1,2,3)$ אולי בהתחלה זה נראה מוזר אבל זה זיהוי טבעי.

דוגמא 4.2 נסתכל על הוקטור הגיאומטרי שמתחיל בנקודה $(1,2)$ ומסתיים בנקודה $(5,5)$. אם נקבע את הזנב שלו בנקודה $(0,0)$ אז הראש שלו יגיע לנקודה $(4,3)$ ולכן הוא מתאים לוקטור האלגברי $(4,3)$.

באופן כללי וקטור גיאומטרי במישור שמתחיל בנקודה (x_1,y_1) ומסתיים בנקודה $(x_2.y_2)$ מתואר על ידי הוקטור האלגברי (x_2-x_1,y_2-y_1).

הזיהוי הזה מתאים היטב לפעולות שתיארנו. חיבור וקטורים גיאומטריים מקביל בדיוק לחיבור הוקטורים האלגבריים שמתאימים להם. כך גם עבור כפל בסקלר.

כל מה שנאמר כאן נכון גם למישור ($\mathbb{R}^2$) וגם למרחב ($\mathbb{R}^3$).

4.2 ישרים ומישורים

בפרק הזה נסביר איך אפשר לתאר אלגברית ישרים ומישורים. במישור ובמרחב. זה ייתן לנו אינטואיציה ובסיס כלשהוא שיהיה חיוני להמשך.

קודם כל אני רוצה להציג פעולה חשובה שנקראת מכפלה סקלרית (או מכפלה פנימית).

ניקח שני וקטורי עמודה $u,v\in\mathbb{R}^n$. המכפלה הסקלרית שלהם $u\cdot v$ היא פשוט כפל המטריצות

$$u^tv$$

דוגמא 4.3 ניקח $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ו $v=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ אז

$$u\cdot v=u^tv=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=-1+2+6=7$$

בהמשך הקורס נדבר עוד הרבה על הפעולה הזאת. כרגע אני רוצה רק להתמקד בעובדה אחת:

עובדה 4.4 שני וקטורים ("גאומטריים") u,v הם ניצבים אם ורק אם $u\cdot v=0$.

עכשיו נעבור למה שאנחנו באמת רוצים לדבר עליו בתת פרק הזה: ישרים ומישורים.

4.2.1 ישרים במישור

נסתכל על המישור $\mathbb{R}^2$. איך מתארים ישר במישור? אולי אתם רגילים לנוסחא $y = ax + b$ אבל היא לא מספיק טובה לצרכים שלנו, כי היא לא מתארת ישרים שמקבילים לציר y.

באופן כללי ישר במישור מתואר על ידי הנוסחא $ax + by = c$. כלומר ישר הוא אוסף הנקודות (x, y) המקיימות את המשוואה

$$ax + by = c$$

למשל ציר x מתואר על ידי $y = 0$ (כלומר $a = 0, b = 1, c = 0$).
למשל נביט על הישר:

$$3x - 5y = 1$$

הנקודה $(2, 1)$ נמצאת על הישר כי היא מקיימת את המשוואה. הנקודה $(0, 1)$ לא נמצאת על הישר כי היא לא מקיימת את המשוואה.

שימו לב: יש יותר מדרך אחת לבטא כל ישר. ברור ש

$$x + 2y = 4$$

זה אותו ישר כמו

$$2x + 4y = 8$$

יש עוד דרך לתאר ישר - באמצעות הצגה פרמטרית.

לכל ישר אפשר להתאים "וקטור כיוון גיאומטרי" שמכוון בכיוון של הישר (האורך של הוקטור לא משנה לנו ממש). [לצייר].

איך מוצאים את וקטור הכיוון הזה? צריך לקחת שתי נקודות על הישר ולהפחית אותן אחת מהשניה.

דוגמא 4.5 נסתכל על הישר $x + 2y = 4$. נמצא שתי נקודות (שונות) על הישר. בדר"כ קל לראות פתרון: למשל אם $x = 0$ אז רואים ש $y = 2$. ואם $y = 0$ אז רואים ש $x = 4$(במקרה הכי גרוע אפשר ממש לפתור מערכת משוואות).

לכן

$$(0, 2), (4, 0)$$

הן שתי נקודות על הישר. לכן

$$(4, 0) - (0, 2) = (4, -2)$$

הוא וקטור כיוון לישר. זהו כמובן לא הוקטור כיוון היחיד. גם $(2, -1)$ ו $(-4, 2)$ הם וקטורי כיוון לישר שלנו. האם וקטור הכיוון מספק לנו מספיק אינפורמציה בשביל לקבוע מי הישר? לא. הוא מספק לנו כיוון אבל יש אינוסף ישרים מקבילים עם אותו "כיוון". **בנוסף** לוקטור הכיוון צריך לתת נקודה אחת על הישר.

למעשה אפשר לתאר את הנקודות על הישר ככה:

$$(4, 0) + t(4, -2)$$

כלומר בוחרים נקודה על הישר ומוסיפים לה את וקטור הכיוון כפול פרמטר. לכל t שנבחר ונציב אותו נקבל איזשהיא נקודה על הישר. ולהפך לכל נקודה על הישר מתאים t.

שוב, אני מדגיש שזאת ממש לא הצגה יחידה. גם

$$(0,2)+t(4,-2)$$

או

$$(4,0)+t(2,-1)$$

מייצגים את אותו ישר.

אז בעצם יש לנו שתי דרכים לתאר ישר במישור: על ידי משוואה או על ידי הצגה "פרמטרית". נרצה להסביר איך עוברים מהצגה אחת לאחרת.

צד אחד בעצם כבר עשינו הרגע. אם נתון לי ישר על ידי משוואה אז כדי להגיע להצגה פרמטרית מוצאים שתי נקודות על הישר. מחסרים ביניהן כדי להגיע לווקטור כיוון.

ואז מייצרים הצגה פרמטרית שהיא נקודה ועוד פרמטר כפול הווקטור כיוון.

דוגמא 4.6 נרצה בכל זאת להסביר שוב את הדרך הזאת: בעצם יש לנו מערכת משוואות עם משוואה אחת

$$x+2y=4$$

אם נחשב פתרון כללי למטריצה הזאת אז נקבל ש $y=t$ ו $x=4-2t$ ולכן פתרון כללי יהיה

$$(4-2t,t)$$

אבל זה שווה בעצם ל

$$(4,0)+t(-2,1)$$

שזה ייצוג פרמטרי לישר.

במילים אחרות: **פתרון כללי** למערכת משוואות $ax+by=c$ הוא ייצוג פרמטרי ליישר שהיא מתארת.

איך עושים את הכיוון השני? נתונה הצגה פרמטרית, איך מוצאים הצגה במשוואה? אם נביט במשוואה

$$ax+by=c$$

אנחנו נפריד בין "וקטור המקדמים" (a,b) לבין המספר c. לגבי כל אחד מהם נסביר בנפרד איך למצוא.

נתחיל בוקטור המקדמים: נסתכל רגע על משוואה של ישר כלשהיא

$$2x-3y=3$$

וניקח שתי נקודות (x_1,y_1) ו (x_2,y_2) על הישר. אמרנו כבר ש (x_2-x_1,y_2-y_1) הוא וקטור כיוון של הישר. נשים לב ש

$$2x_1-3y_1=3$$

ו

$$2x_2 - 3y_2 = 3$$

ולכן

$$2(x_2 - x_1) - 3(y_2 - x_2) = 0$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = 0$$

כלומר וקטור המקדמים ניצב לוקטור הכיוון של הישר. ככה מוצאים איזשהוא וקטור מקדמים.

דוגמא 4.7 בואו נחזור לדוגמא הקודמת: יש לנו ישר שנתון בצורה פרמטרית

$$(4, 0) + t(2, -1)$$

אנחנו מחפשים וקטור מקדמים (a, b) שיהיה ניצב ל $(2, -1)$ אז יש לנו משוואה

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

כלומר

$$2a - b = 0$$

צריך איזשהוא פתרון של המשוואה הזאת (כל פתרון שונה מ $(0, 0)$ יתאים). שוב, קל לראות פיתרון. למשל $a = 1$ ו $b = 2$. לכן וקטור המקדמים של המשוואה שלנו הוא $(1, 2)$ ולכן הישר מתואר על ידי משוואה

$$x + 2y = c$$

כמובן צריך עוד לקבוע את c (שימו לב שעבור ערכי c שונים מקבלים ישרים מקבילים). בשביל זה פשוט מציבים נקודה אחת שאנחנו יודעים שהיא על הישר. למשל $(4, 0)$ ואז נקבל

$$4 + 2 \cdot 0 = c$$

ולכן $c = 4$ כלומר

$$x + 2y = 4$$

היא הצגה במשוואה של הישר.

4.2.2 ישרים ומישורים במרחב

עכשיו ננסה לעשות דברים דומים במרחב.

איך מתארים ישר במרחב? אפשר שוב להשתמש בהצגה פרמטרית. למשל :

$$(1,2,3)+t(4,5,6)$$

הוא ישר "בכיוון" $(4,5,6)$ שעובר בנקודה $(1,2,3)$. איך מתארים אותו על ידי משוואות? הפעם משוואה אחת לא תספיק. שימו לב למשל ש

$$2x+4y-5z=0$$

מכילה את כל הוקטורים שניצבים ל $(2,4,-5)$. אינטואיטיבית ברור שזה לא רק ישר. זה מישור שלם.

איך מציגים ישר? צריך שתי משוואות בשביל זה. אינטואיטיבית זה מתאר משהו שוקטורי הכיוון שלו ניצבים ל 2 וקטורים ־ זה כבר ישר.

דוגמא 4.8 למשל:

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x-y+3z&=1 \end{aligned}$$

איזה ישר המשוואות האלה מתארות? עושים כמו קודם ־ מוצאים פתרון כללי. במקרה שלנו יש מטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

אחרי דירוג מתקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

z משתנה חופשי אז אפשר להציב $z=t$ ואז

$$-2y+2z=-2$$

$$y=t+1$$

ו

$$x=-y-t+3=-2t+2$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$(-2t+2,t+1,t)$$

אז אפשר לייצג את הישר שלנו בצורה הפרמטרית הבאה:

$$(2,1,0)+t(-2,1,1)$$

אז שוב ־ ייצוג פרמטרי מתקבל מפתרון כללי של מערכת משוואות.

בואו נעשה הפוך ־ ניקח ייצוג פרמטרי וננסה למצוא מערכת משוואות לישר הזה: אנחנו עדיין מחפשים וקטורי מקדמים שהם ניצבים לוקטור הכיוון שלנו. כלומר:

$$(a,b,c)\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=0$$

ולכן קיבלנו משוואה

$$-2a+b+c=0$$

למערכת משוואות הזאת יש 2 משתנים חופשיים. הפתרון הכללי שלה הוא $c=s_1$ ו $b=s_2$

$$a=\frac{s_1}{2}+\frac{s_2}{2}$$

כלומר

$$(\frac{s_1}{2}+\frac{s_2}{2},s_1,s_2)$$

צריך למצוא שני וקטורים ניצבים. נציב $s_1=1$ ו $s_2=0$ ולהפך ונקבל

$$(\frac{1}{2},1,0),\quad(\frac{1}{2},0,1)$$

ולכן משוואות שיתארו את הישר יהיו

$$\frac{1}{2}x+y=d_1$$

$$\frac{1}{2}x+z=d_2$$

איך מוצאים את d_1,d_2? שוב על ידי הצבה של נקודה מסוימת. נניח $(2,1,0)$ ונקבל ש $d_1=2$ ו $d_2=1$ ולכן המשוואות

$$\frac{1}{2}x+y=2$$
$$\frac{1}{2}x+z=1$$

מתארות את הישר שלנו. (שימו לב! אלה לא המשוואות שהתחלנו איתן. יש יותר מדרך אחת לתאר את אותו ישר).

שווה אולי לציין דבר אחד. אם נעשה בחירה טפשית של פתרונות. למשל ניקח $s_1=1$, $s_2=0$ ופתרון שני $s_1=2$ ו $s_2=0$ אז נקבל בתור וקטורי מקדמים

$$(\frac{1}{2},1,0),(1,2,0)$$

המשוואות שיגיעו מוקטורי המקדמים האלה לא יתארו ישר. זה בעצם כמו משוואה אחת שחוזרת פעמיים.

עכשיו, באמת מה קורה אם יש לי רק משוואה אחת? גיואמטרית זה צריך לתאר יצור שוקטורי הכיוון שלו ניצבים לוקטור אחד בלבד. ־ זה מישור.

איך עושים הצגה פרמטרית למישור? בואו נמצא פתרון כללי למשוואה.

דוגמא 4.9 למשל

$$x+2y+z=3$$

אז יש לנו שני משתנים חופשיים $z=s$ ו $y=t$ הפתרון הכללי הוא

$$(3-2t-s,t,s)$$

את זה אפשר לפצל לכתיב פרמטרי כזה:

$$(3,0,0)-t(-2,1,0)+2(-1,0,1)$$

כלומר יש לנו שני וקטורי כיוון ושוב נקודה אחת שנמצאת על המישור.

יש עוד דרך למצוא צורה פרמטרית. שהיא גם תעזור לנו קצת לאינטואיציה. מוצאים 3 נקודות על המישור שלא נמצאות על אותו ישר. בדר"כ זה די קל.

למשל במישור שלמעלה אם $x=y=0$ חייבים $z=3$ ולכן $(0,0,3)$ נקודה על המישור. בדומה

$$(3,0,0),(0,\frac{3}{2},0)$$

מוצאים שני וקטורי כיוון. למשל:

$$(3,0,0)-(0,0,3)=(3,0,-3)$$

$$(3,0,0)-(0,\frac{3}{2},0)=(3,-\frac{3}{2},0)$$

ואז המישור הוא

$$(3,0,0)+t(3,0,-3)+s(3,-\frac{3}{2},0)$$

מהכיוון השני. אם נתון מישור באמצעות הצגה פרמטרית. אפשר למצוא משוואה שתתאר אותו באותו אופן שעשינו קודם.

בדוגמא ממקודם, צריך למצוא וקטור מקדמים (a,b,c)שיהיה ניצב גם ל $(3,0,-3)$ וגם ל $(3,-\frac{3}{2},0)$. אפשר למצוא אותו וקטור כזה על ידי פתרון מערכת משוואות

$$3a-3c=0$$
$$3a-\frac{3}{2}b=0$$

ואז מוצאים את d על ידי הצבת נקודה כמו שעשינו קודם.

הערה: יש גם דרך יותר מתוחכמת לעשות את המעבר הזה שקשורה למשהו שנקרא מכפלה וקטורית אבל זה פחות חשוב לנו אז אני לא אציג אותה.

4.3 היבטים גיאומטריים של נושאים קודמים

אני רוצה לעבור על נושאים שכבר ראינו בעבר בהקשר אלגברי טהור ולהסביר איך הם קשורים לגיאומטריה.

נסתכל על מישור. כאשר אנחנו פותרים מערכת משוואות לינארית ב 2 נעלמים. אנחנו בעצם שואלים את השאלה הבאה: מצאו את כל הנקודות שנמצאות על **כל** הישרים שמופיעים במערכת.

אז יש כמה אפשרויות: או שיש נקודה אחת כזאת ואז יש פתרון יחיד. או שאין כאלה (למשל: כי יש 2 ישרים מקבילים, או כי הקווים יוצרים משולש - לצייר). יכול להיות שיש אינסוף פתרונות אבל זה קורה רק אם כל המשוואות מתארות את אותו ישר.

באותו אופן. מישורים במרחב מתואים על ידי משוואה

$$ax + by + cz = d$$

כאשר אנחנו פותרים מערכת משוואות לינארית ב 3 נעלמים. אנחנו בעצם שואלים את השאלה הבאה: מצאו את כל הנקודות שנמצאות על **כל** המישורים שמופיעים במערכת.

אז יש כמה אפשרויות: או שיש נקודה אחת כזאת ואז יש פתרון יחיד. או שאין כאלה (למשל: כי יש 2 מישורים מקבילים, או כי המישורים יוצרים משולש - לצייר). יכול להיות שיש אינסוף פתרונות, למשל אם החיתוך של כל המישורים הוא קו ישר או אם כל המישורים הם למעשה אותו מישור.

אפשר עקרונית להמשיך את ההסבר הזה למימד יותר גבוה אבל אי אפשר לדמיין את זה.

אז אפשר לתת פירוש גיאומטרי לכל מה שעשינו עם מערכות משוואות לינאריות.

נסיים את הפרק הזה עם הסבר לגבי המשמעות הגיאומטרית של דטרמיננטה:

אם $v_1, \ldots, v_n$ וקטורים ב $\mathbb{R}^n$. אז אפשר לשים אותם בעמודות (או שורות) מטריצה ולקבל מטריצה ריבועית A. הנפח של המקבילון שהוקטורים יוצרים הוא הערך המוחלט של הדטרמיננטה של A.

לצייר.

שימו לב: הדטרמיננטה יוצאת 0 אם המקבילון שנוצר לא באמת תופס n מימדים ולכן הוא מנפח 0 (ולמרות שכביכול יש לו "שטח" ממימד נמוך יותר)

אפשר להגיד יותר מזה על המשמעות הגיאומטרית של דטרמיננטה אבל זממנו קצר וצריך להתקדם בחומר.

5 מרחבים וקטוריים

דיברנו כבר פרק שלם על ישרים ומישורים. אנחנו רוצים לדבר באופן יותר תיאורטי ושיטתי על "דברים כאלה" כמו ישרים ומישורים. בשביל זה אנחנו מציגים את המושג של מרחב וקטורי.

הגדרה 5.1 תת קבוצה $V \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת מרחב וקטורי אם 3 התנאים הבאים מתקיימים

- $0 \in V$.
- לכל $u, v \in V$ מתקיים ש $u + v \in V$.
- לכל $v \in V$ וסקלר α מתקיים ש $\alpha v \in V$.

דוגמא 5.2 1. נסתכל על הקבוצה $V = \{(t,t,t)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. זאת קבוצה שמכילה את כל הוקטורים שכל ערכיהם קבועים. קל לבדוק שהיא מרחב וקטורי.

2. הקבוצה שמכילה רק את וקטור ה 0 היא מרחב וקטורי.

3. קבוצת הוקטורים מהצורה $V = \{(1,t)\}$ היא לא מרחב וקטורי כי

$$(1,0) + (1,1) = (2,1) \notin V$$

אפשר לתאר גיאומטרית די בקלות את תתי המרחבים של $\mathbb{R}^3$ למשל: $\mathbb{R}^3$ בעצמו, $\{0\}$, כל הישרים שעוברים דרך 0 וכל המישורים שעוברים דרך 0. מה עם ישרים ומישורים אחרים? זה לא כל כך נורא שאנחנו מזניחים אותם כי כל ישר/מישור כזה הוא הזזה של ישר שעובר ב 0. או אולי אמירה יותר מוצלחת: אם ניקח ישר/מישור כללי ונסתכל רק על "וקטורי הכיוון" שלו - נקבל מרחב וקטורי.

באמצעות מרחבים וקטוריים אפשר לתאר הרבה דברים. בקורס שלנו, אנחנו נזדקק להפשטה הזאת בעיקר בשביל שני מושגים - **בסיס ומימד.** למשל, הרגע אמרנו שישרים ומישורים מסוימים הם מרחבים וקטוריים. אני מתאר לעצמי שאף אחד לא ייפול מהכסא אם נגיד שישר זה יצור ממימד 1 ומישור זה יצור ממימד 2. מימד זאת מילה בשימוש יומיומי נפוץ. אבל מה זה תכלס אומר?

5.1 בסיס ומימד

עכשיו נתחיל לנתח לעומק מרחבים וקטוריים.

הגדרה 5.3 אם $v_1, \ldots, v_k$ וקטורים כלשהם אז הוקטור

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$$

נקרא צירוף לינארי שלהם.

אבחנה 5.4 אם V מרחב וקטורי ו $v_1, \ldots, v_k \in V$ אז V מכיל כל צירוף לינארי של הוקטורים האלה.

הגדרה 5.5 $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ הוא אוסף הצירופים הלינאריים של הוקטורים $v_1, \ldots, v_k$. כלומר

$$\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k\}$$

אולי זה נראה לא אינטואיטיבי כל כך, אבל $\operatorname{Span} \varnothing = \{0\}$.

נשים לב! לכל קבוצה A מתקיים ש $\operatorname{Span} A$ הוא מרחב וקטורי. תמיד.
ניקח כמה וקטורים $v_1, \ldots, v_k$. איך יודעים אם וקטור u הוא צירוף לינארי שלהם? השאלה היא בעצם, האם קיימים מספרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ככה ש

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = u$$

זה בעצם מקביל ללפתור משוואה לינארית.

דוגמא 5.6 האם הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ו $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. השאלה היא בעצם האם יש α_1, α_2 ככה ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

שזה בדיוק לפתור את מערכת המשוואות

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2$$

במקרה הזה למשל, יש פתרון אחד והוא $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ ו $\alpha_1 = \frac{3}{2}$.

ייתכן שלמערכת לא יהיה פתרון ואז הוקטור הוא לא צירוף לינארי. ייתכן גם שיהיו אינסוף פתרונות ואז לא רק שהוא צירוף לינארי אלא שיש אינסוף דרכים "לבטא" אותו כצירוף לינארי.

הגדרה 5.7 יהי V מרחב וקטורי. אומרים שקבוצת הוקטורים $v_1, \ldots, v_k$ פורשת את V אם כל וקטור ב V הוא צירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_k$. דרך אחרת להגיד את זה היא:

$$\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} = V$$

דוגמא 5.8 הוקטורים

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

פורשים את $\mathbb{R}^2$ כי

$$\frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

אבל הוקטורים

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

לא פורשים את $\mathbb{R}^2$. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הוא לא צירוף לינארי שלהם כפי שאפשר לבדוק בקלות. שימו לב! הקבוצה הזאת כן פורשת את המרחב הוקטורי הקטן יותר $\{\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\}$. למעשה כל קבוצה של וקטורים $v_1, \ldots, v_k$ תפרוש את $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

אבחנה 5.9 אם קבוצה של וקטורים היא פורשת את המרחב V אז כל קבוצה שמכילה אותה גם כן תפרוש את V.

אם יש לי קבוצה של וקטורים. איך אני יודע אם הם פורשים את $\mathbb{R}^n$ או לא? נתאר שיטה אחת:

נניח שאני לוקח קבוצת וקטורים ושם אותם ב**שורות** מטריצה. האם פעולות שורה יכולות לשנות את הSpan שלהם? רמז: לא.

טענה 5.10 ניקח וקטורים $v_1, \dots, v_k$ ונשים אותם בשוורת מטריצה. נבצע פעולת שורה. ה Span של הוקטורים החדשים הוא כמו של הישנים.

דוגמא 5.11 במרחב $\mathbb{R}^3$ ניקח את וקטורי השורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

נבצע פעולת שורה. למשל

$$R_2 = R_2 - 3R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

אז

$$\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\}$$

הוכחה: די ברור שהחלפת שורות וכפל בסקלר לא משנים Span. גם הוספת שורה אחת לאחרת לא. למשל אם

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

וביצענו הוספת שורה אחת לאחרת ככה שעכשיו השורות הן

$$v_1 + cv_2, v_2, v_3$$

אז u עדיין ב Span

$$u = \alpha_1(v_1 + cv_2) + (\alpha_2 - \alpha_1 c)v_2 + \alpha_3 v_3$$

■

עובדה 5.12 שורות של מטריצה מדורגת פורשות את $\mathbb{R}^n$ אם ורק אם לכל עמודה יש איבר מוביל.

לא נוכיח את הטענה בדיוק אבל נסביר את ההיגיון: כי זה המצב היחיד בו מטריצה מדורגת תוכל לפרוש את $\mathbb{R}^n$. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פורש אבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא פורש.

מסקנה 5.13 אם אנחנו רוצים לבדוק אם קבוצת וקטורים היא פורשת את $\mathbb{R}^n$ אפשר לשים אותה בשורות מטריצה ולדרג. בגלל שהדירוג לא משנה את ה Span הוקטורים פורשים אם ורק אם בכל עמודה יש איבר מוביל. (כלומר, אין משתנים חופשיים)

עכשיו נרצה לדבר על מושג התלות. שימו לב שוקטור האפס הוא תמיד (!) צירוף לינארי של כל קבוצת וקטורים שהיא. כי תמיד אפשר שכל המקדמים של הצירוף יהיו 0. צירוף לינארי כזה שבו כל המקדמים הם 0 נקרא **צירוף לינארי טריויאלי.** לכן אפשר להגיד ש 0 הוא תמיד צירוף לינארי טריויאלי. אבל לפעמים 0 הוא גם צירוף לינארי לא טריויאלי. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הגדרה 5.14 קבוצה של וקטורים $v_1, \ldots, v_n$ נקראת **תלויה לינארית** (ת"ל בקיצור) אם 0 הוא צירוף לינארי <u>לא טריויאלי</u> שלה.

למשל הדוגמא האחרונה הראתה לנו ש

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הם וקטורים תלויים לינארית.

הגדרה 5.15 קבוצת וקטורים $v_1, \ldots, v_n$ נקראת **בלתי תלויה לינארית** (בת"ל בקיצור) אם היא לא תלויה לינארית. במילים אחרות: אם

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

מכריח ש

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

אבחנה 5.16 קבוצת וקטורים שמכילה את וקטור האפס היא תמיד תלויה לינארית. כי אפשר לקחת צירוף לא טריויאלי כזה:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אבחנה 5.17 אם בקבוצה מופיע אותו וקטור פעמיים, היא תלויה לינארית. כי אפשר לקחת צירוף לא טריויאלי כזה:

$$1 \cdot v - 1 \cdot v + 0 \cdot v_3 + \cdots + 0 \cdot v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

טענה 5.18 קבוצת וקטורים $v_1, \ldots, v_k$ היא תלויה לינארית אם ורק אם אחד הוקטורים (למשל v_1) הוא צירוף לינארי של האחרים.

הוכחה: נדגים עם שלושה וקטורים. העיקרון זהה לכל מספר של וקטורים. נניח שאחד הוקטורים הוא צירוף לינארי של האחרים.

$$\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v_1$$

ואז

$$-v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_k v_k = 0$$

הוא צירוף לינארי לא טריויאלי שמתאפס.

מצד שני, אם יש לנו צירוף לינארי לא טריוויאלי

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

אז אחד המקדמים האלה אינו 0. נניח שזה α_1. אז

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3$$

כלומר v_1 צירוף לינארי של האחרים. ■

טענה 5.19 אם $\{v_1, \ldots, v_k\}$ היא קבוצה ת"ל של וקטורים ומוסיפים לה וקטורים היא נשארת ת"ל.

הוכחה: זה די ברור. אם יש לנו צירוף לינארי לא טריויאלי. אז הוא יישאר כזה גם עם תוסיף וקטורים (נניח, נותנים מקדם 0 לוקטורים החדשים). ■

מסקנה 5.20 אם $\{v_1, \ldots, v_k\}$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית של וקטורים וזורקים ממנה חלק מהוקטורים. אז הקבוצה החדשה היא עדיין בלתי תלויה לינארית.

תהי קבוצת וקטורים $\{v_1, \ldots, v_k\}$. איך יודעים אם היא תלויה לינארית? השאלה היא בעצם, האם קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ שלא כולם 0 ככה ש

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$$

דוגמא 5.21 למשל, האם הוקטורים הבאים תלויים לינארית?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

אז צריך להסתכל על המשוואה

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

זה יוצר לנו מערכת משוואות לינארית. יש לה לפחות פתרון אחד

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

אבל אם יש יותר מפתרון אחד, כלומר אם יש אינסוף פתרונות (כלומר אם יש משתנים חופשיים) אז הוקטורים תלויים לינארית. אם יש רק פתרון יחיד אז הוקטורים בת"ל.

במקרה הזה אפשר לחשב שהוקטורים תלויים לינארית.

טוב. עכשיו למושג חשוב מאוד.

הגדרה 5.22 קבוצה של וקטורים $b_1, \ldots, b_k$ במרחב וקטורי V נקראת **בסיס** אם היא גם בלתי תלויה לינארית וגם פורשת.

טענה 5.23 תהי $\{v_1, \ldots, v_k\}$ קבוצה בת"ל של וקטורים. אם נוריד ממנה וקטור, היא לא יכולה להיות פורשת.

הוכחה: [לדלג אם אין זמן] נניח שנזרוק וקטור. נניח את v_1. נניח בשלילה שמה שנשאר לנו $\{v_2, \ldots, v_k\}$ היא קבוצה פורשת. ולכן v_1 הוא צירוף לינארי של $v_2, \ldots, v_k$ אז בעצם $v_1, v_2, \ldots, v_k$ הם תלויים לינארית. סתירה. ■

טענה 5.24 תהי $\{v_1, \ldots, v_k\}$ קבוצה פורשת של וקטורים. אם נוסיף לה וקטור, היא לא יכולה בת"ל.

הוכחה: [לדלג אם אין זמן] נניח שנוסיף לו וקטור u. עכשיו בגלל ש $\{v_1, \ldots, v_k\}$ היא כבר קבוצה פורשת. u הוא צירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_k$ ולכן $\{v_1, \ldots, v_k, u\}$ היא קבוצה תלויה לינארית (לפי הערה שראינו למעלה). ■

מסקנה 5.25 יהי $\{b_1, \ldots, b_k\}$ בסיס. אם נוסיף לו וקטור או נוריד ממנו וקטור הוא כבר לא יהיה בסיס.

מה שזה אומר בעצם זה שבסיס מציג איזשהוא איזון של קבוצה גדולה מספיק לפרוש אבל קטנה מספיק כדי להיות בת"ל. כל שינוי של וקטור יפר את האיזון הזה.

טענה 5.26 [לדלג אם אין זמן] יהיה $\{b_1,\ldots,b_k\}$בסיס של מרחב וקטורי V. כל וקטור $u\in V$ הוא צירוף לינארי של איברי הבסיס באופן <u>יחיד.</u>

הוכחה: היות שהבסיס הוא קבוצה פורשת. ברור שכל וקטור הוא צירוף לינארי של אברי הבסיס. נותר להוכיח ייחידות

$$\alpha_1 b_1+\ldots+\alpha_k b_k=u=\beta_1 b_1+\ldots+\beta_k b_k$$

אז נקבל ש

$$(\alpha_1-\beta_1)b_1+\ldots+(\alpha_k-\beta_k)b_k=0$$

אבל הבסיס הוא קבוצה בלתי תלויה לינארית. ולכן הצירוף הלינארי היחיד שמתאפס הוא טריויאלי. כלומר

$$\alpha_1-\beta_1=\cdots=\alpha_k-\beta_k=0$$

ולכן

$$\alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_k=\beta_k$$

שזה מה שרצינו להוכיח. יש רק דרך אחת להציג את u כצירוף לינארי של אברי הבסיס. ■

מסתבר שאם יש לנו קבוצה פורשת שהיא תלויה לינארית אפשר להקטין אותה לבסיס:

טענה 5.27 תהי $v_1,\ldots,v_k$ קבוצה שפורשת מרחב וקטורי V. אפשר למצוא לה תת קבוצה שהיא בסיס של V.

גם ההפך נכון. אפשר לקחת קבוצה בת"ל ולהגדיל אותה עד שיתקבל בסיס.

טענה 5.28 תהי $v_1,\ldots,v_k$ קבוצה בת"ל. אפשר להוסיף לה איברים עד שתהיה בסיס.

למה בסיסים זה דבר חשוב? יש כל מיני סיבות. אבל הסיבה היחידה שנציג כאן היא שהם נותנים לנו דרך מדויקת לדבר על מימד.

משפט 5.29 כל שני בסיסים B ו C של מרחב וקטורי V הם בעלי אותו גודל. הגודל הזה נקרא המימד של V ומסומן $\dim V$.

לא נוכיח את המשפט הזה.

אבחנה 5.30 למעשה קורה יותר מזה: כל קבוצה פורשת של V חייבת להיות לפחות מגודל $\dim V$ וכל קבוצה בת"ל היא לכל היותר מגודל $\dim V$. זה בגלל שאפשר להגדיל קבוצה בת"ל עד לבסיס ולהקטין קבוצה פורשת עד לבסיס.

למרחב וקטורי שהוא קו ישר יש איבר אחד בבסיס ולכן הוא ממימד 1 למישור יש בסיס בגודל 2 ולכן הוא ממימד 2 וכן הלאה. המימד של המרחב $\{0\}$ הוא 0.

כך אפשר לדבר באופן מדויק על מימד של מרחב וקטורי. שווה לציין שיש עוד דרכים להגדיר מימד במתמטיקה ולאו דווקא של מרחב וקטורי אבל זה מחוץ לחומר של הקורס.

יש עוד משפט מעניין שקשור לבסיסים. אני לא חושב שנשתמש בו בהמשך הקורס אבל בכל מקרה כדאי להציג אותו כי הוא תורם להבנה של החומר.

משפט 5.31 (השלישי חינם). תהי $v_1, \ldots, v_k$ קבוצה של k וקטורים בתוך מרחב וקטורי V. אם שניים מתוך התנאים הבאים מתקיימים אז גם השלישי מתקיים

- $v_1, \ldots, v_k$ קבוצה בת"ל.
- $v_1, \ldots, v_k$ בסיס.
- $k = \dim V$.

לטובת תת הפרק הבא, אנחנו נציג כאן עוד שתי טענות שקשורות לאי תלות לינארית.

טענה 5.32 תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מטריצה מדורגת. אזי השורות של A שאינן שורות אפסים מהוות קבוצה בת"ל

הוכחה: לא נוכיח בפירוט אבל נדגים: קל נסתכל על המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אם יש צירוף לינארי של השורות שמתאפס

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

אז מהאיבר הראשון רואים שבהכרח

$$\alpha_1 = 0$$

מהאיבר השני רואים ש

$$\alpha_2 = 0$$

ומהאיבר הרביעי

$$\alpha_4 = 0$$

אותו פרינציפ קורה בכל מטריצה מדורגת. ע"י הסתכלות על האיברים המובילים רואים שהצירוף הלינארי היחיד שיכול להתאפס הוא הטריויאלי. ■

טענה 5.33 תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מטריצה עם שורות בת"ל. ביצוע פעולות שורה משאיר את השורות בת"ל.

הוכחה: די ברור שהחלפת שורות או כפל שורה בסקלר משאיר את השורות בת"ל. גם הוספת שורה אחת לאחרת. נדגים למשל עם שלושה וקטורים.

נניח ש v_1, v_2, v_3 בת"ל. נוכיח שגם

$$v_1 + cv_2, v_2, v_3$$

בת"ל. נסתכל על צירוף לינארי

$$\alpha_1(v_1 + cv_2) + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

אז

$$\alpha_1 v_1 + (\alpha_1 c + \alpha_2)v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

בגלל ש v_1, v_2, v_3 בת"ל. נקבל ש

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 + c\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 = 0$$

אבל מכאן מיידי להסיק

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

שזה מה שרצינו. ∎

5.2 מרחבי המטריצה ודרגה של מטריצה

בפרק הזה נציג כמה מרחבים וקטורים חשובים שקשורים למטריצות. נדגיש שבפרק זה אנו מדברים על מטריצה כללית $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. לאו דווקא מטריצות ריבועיות.

המרחב הראשון והיחסית פשוט הוא מרחב האפס

הגדרה 5.34 תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה. **מרחב האפס** של A הוא תת המרחב של $\mathbb{R}^n$ שמכלי את כל הוקטורים v כך ש $Av = 0$.

טענה 5.35 זה באמת מרחב וקטורי

הוכחה: אכן קל לוודא שאם

$$Au = 0, \quad Av = 0$$

אז

$$A(u+v) = 0$$

ו

$$A(\alpha v) = \alpha A v = 0$$

■

נרצה להציג טכניקה למציאת בסיס למרחב האפס של מטריצה. למעשה אנחנו כבר ראינו איך עושים את זה. זה כמו למצוא הצגה פרמטרית לישר/מישור. מוצאים פתרון כללי של המערכת ההומוגנית.

דוגמא 5.36 נסתכל על המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

אנחנו רוצים למצוא בסיס למרחב האפס. כלומר אנחנו מחפשים בסיס למרחב הוקטורי של כל הפתרונות של המערכת $Ax = 0$. נמצא את הפתרון על ידי דירוג המערכת.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 9 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{R_2 = R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 9 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{R_3 = R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xmapsto{R_3 = R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{R_3 = R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אז יש לנו משתנים חופשיים $w = s$ ו $z = t$ וקל לגלות שהפתרון הכללי הוא

$$y = \frac{s}{4} + \frac{t}{4}$$

$$x = -\frac{s}{2} - \frac{t}{2} - 3t - 4s = -\frac{9}{2}s - \frac{7}{2}t$$

אז הפתרון הכללי הוא

$$(-\frac{9}{2}s - \frac{7}{2}t, \frac{s}{4} + \frac{t}{4}, t, s)$$

אלה כל הוקטורים שמהווים פתרון למערכת ההומוגנית. אז איך מוצאים בסיס? פשוט כותבים את המערכת הזאת קצת אחרת

$$(-\frac{9}{2}s - \frac{7}{2}t, \frac{s}{4} + \frac{t}{4}, t, s) = t(-\frac{7}{2}, \frac{1}{4}, 1, 0) + s(-\frac{9}{2}, \frac{1}{4}, 0, 1)$$

אז בעצם מרחב הפתרונות הוא

$$\mathrm{Span}\{(-\frac{7}{2}, \frac{1}{4}, 1, 0), (-\frac{9}{2}, \frac{1}{4}, 0, 1)\}$$

ולכן הקבוצה $\{(-\frac{7}{2}, \frac{1}{4}, 1, 0), (-\frac{9}{2}, \frac{1}{4}, 0, 1)\}$ היא קבוצה פורשת. למעשה היא גם בסיס כי הוקטורים האלה בת"ל.

העיקרון הזה תמיד עובד. אם מדרגים את המטריצה ומוצאים פתרון כללי למערכת ההומוגנית. אפשר לכתוב אותו כצירוף לינארי של וקטורים. הוקטורים האלה תמיד יהיו בסיס למרחב האפס של המטריצה.

כדאי לשים לב לכמה דברים: המימד של מרחב האפס = מספר המשתנים החופשיים בצורה המדורגת.

האם יש מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ שמרחב האפס שלה הוא כל המרחב $\mathbb{R}^n$? זאת צריכה להיות מטריצה שבצורה המדורגת שלה יש n משתנים חופשיים. כלומר אין בכלל איברים מובילים. יש רק מטריצה אחת כזו והיא מטריצת האפס $0_{m\times n}$.

מה קורה אם $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא מטריצה הפיכה? אז למערכת $Ax = 0$ יש רק פתרון אחד והוא וקטור האפס. כלומר מרחב האפס של מטריצה הפיכה מכיל רק את $\{0\}$ והוא ממימד 0. גם ההפך נכון, אם מרחב האפס של מטריצה ריבועית A הוא $\{0\}$ בלבד. אז זה אומר שלמערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד ולפי משפט שראינו בעבר זה אומר ש A הפיכה.

עכשיו אנחנו רוצים לעבור למושג חשוב אחר: דרגה של מטריצה.

הגדרה 5.37 תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה כלשהיא. הדרגה של A היא מספר המשתנים התלויים בדירוג של A. הדרגה מסומנת $\mathrm{rank}\,A$.

למשל הדרגה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

שראינו למעלה היא 2 כי יש שני משתנים תלויים בצורה המדורגת.

לפי ההגדרה הזאת ברור שדרגת A + מימד מרחב האפס של A = n. זה בגלל שמספר המשתנים התלויים ועוד מספר המשתנים החופשיים הוא מספר העמודות.

לפי זה אפשר כבר להסיק למשל שאם A ריבועית אז מטריצה הפיכה אם ורק אם $\mathrm{rank}\,A = n$. כי ראינו שמטריצה היא הפיכה אם ורק אם מרחב האפס שלה הוא ממימד 0.

הגדרה 5.38 מרחב השורות של מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ הוא המרחב הנפרש משורות A. מרחב זה מסומן ב $R(A)$. במילים אחרות:

$$R(A) = \mathrm{Span}\{R_1(A), R_2(A), \ldots, R_m(A)\}$$

טענה 5.39 דירוג מטריצה לא משנה את מרחב השורות שלה.

הוכחה: למעשה זאת טענה שהוכחנו ממזמן. פעולות שורה לא משנות Span של הוקטורים בשורות. ■

טענה 5.40 $\dim R(A) = \mathrm{rank}\,A$.

הוכחה: אם A מטריצה מדורגת. אז קל לראות שהשורות שלה פורשות מרחב שהמימד שלו זה בדיוק מספר האיברים המובילים. שזה בדיוק ה rank. ■

אפשר להגדיר גם מרחב עמודות.

הגדרה 5.41 תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. מרחב העמודות של A הוא המרחב הנפרש על ידי עמודות A.

$$C(A) = \mathrm{Span}\{C_1(A), C_2(A), \ldots, C_m(A)\}$$

שימו לב: דירוג מטריצה **כן** משנה את מרחב העמודות שלה. למרות זאת התוצאה המפתיעה הבאה כן מתקיימת:

טענה 5.42 $\dim C(A) = \mathrm{rank}\, A$.

ההוכחה קצת מסובכת אז נוותר עליה.
יש עוד עובדה חשובה בנוגע ל rank שנזדקק לה בהמשך.

טענה 5.43 אם $A = DB$ אז $R(A) \subseteq R(B)$ ולכן בפרט $\mathrm{rank}\, A \leq \mathrm{rank}\, B$

הוכחה: נסתכל על השורה הראשונה של A: $R_1(A)$ לפי חוקי כפל מטריצות, אפשר לראות שהשורה הראשונה של A מתקבלת ממכפלת השורה הראשונה של D בשורות של B. כלומר

$$R_1(A) = d_{1,1}R_1(B) + d_{1,2}R_2(B) + \ldots + d_{1,n}R_n(B)$$

ולכן

$$R_1(A) \in \mathrm{Span}\{R_1(B), \ldots, R_n(B)\} = R(B)$$

באופן דומה כל שורה של A נמצאת במרחב השורות של B. כלומר

$$R_i(A) \in R(B)$$

אז גם הצירופים הלינאריים של שורות A נמצאים במרחב השורות של B ולכן

$$R(A) \subseteq R(B)$$

■

טענה 5.44 אם $A = DB$ ו D הפיכה אז $R(A) = R(B)$ ולכן בפרט $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B$.

הוכחה: מתקיים $A = DB$ וגם $B = D^{-1}A$ אז הטענה ברורה על ידי שימוש במשפט הקודם. ■

מה קורה אם מכפילים במטריצה מימין?

טענה 5.45 אם $A = BD$ אז $C(A) \subseteq C(B)$ ולכן בפרט $\mathrm{rank}\, A \leq \mathrm{rank}\, B$.

הוכחה: אם $A = BD$ אז $A^t = D^tB^t$ ולכן לפי טענה קודמת $R(A^t) \subseteq R(B^t)$ ולכן $C(A) \subseteq C(B)$. ■

טענה 5.46 אם $A = BD$ ו D הפיכה אז $C(A) = C(B)$ ולכן בפרט $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B$

ההוכחה דומה למה שעשינו קודם. מה שנצטרך מכאן זאת המסקנה הבאה: כפל במטריצה הפיכה לא משנה rank של מטריצה!

אני רוצה לסיים את הפרק הזה במשפט הבא שאת רובו כבר הוכחנו בפרק הזה ובפרקים הקודמים.

משפט 5.47 התנאים הבאים שקולים עבור מטריצה **ריבועית** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. A הפיכה.
2. למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד (לא משנה מה b)
3. ניתן לדרג את A עד ל I
4. A היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.
5. $|A| \neq 0$
6. מרחב האפס של A הוא $\{0\}$.
7. $\operatorname{rank} A = n$
8. שורות A הן בסיס.
9. עמודות A הן בסיס.

הוכחה: למעשה הוכחנו כבר את הכל חוץ מאשר את שני האחרונים.

נוכיח את 8: מצד אחד, אם A הפיכה אפשר לדרג את A לI ודירוג לא משנה בת"ל או פרישה. אז בגלל ששורות I בסיס גם שורות A בסיס.

מצד שני: אם שורות A בסיס אז מימד מרחב השורות יהיה n ולכן $\operatorname{rank} A = n$.

נוכיח את 9: עמודות A בת"ל $\Leftrightarrow$ שורות A^t בת"ל $\Leftrightarrow$ A^t הפיכה $\Leftrightarrow A$ הפיכה. ∎

6 ערכים עצמיים ולכסון מטריצות

בפרק זה נדבר רק על מטריצות ריבועיות.

הגדרה 6.1 אומרים כי מטריצה A **דומה** למטריצה B. אם קיימת מטריצה הפיכה Pכך ש

$$P^{-1}AP = B$$

טענה 6.2 דמיון מטריצות הוא יחס שקילות. רפלקסיבי סימטרי וטרנזיטיבי.

הוכחה: רפלקסיביות: לוקחים $P = I$.

סימטריות: אם

$$P^{-1}AP = B$$

אז

$$B = PAP^{-1} = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$$

ו P^{-1} ודאי הפיכה.

טרנזיטיביות: אם

$$P^{-1}AP = B$$

$$Q^{-1}BQ = C$$

אז

$$(PQ)^{-1}APQ = Q^{-1}P^{-1}APQ = Q^{-1}BQ = C$$

■

למה היחס הזה טוב לנו בחיים? הנה למשל דוגמא קלאסית.

ראינו שלפעמים אנחנו רוצים למצוא את A^{100} או אפילו A^k עבור k כלשהוא (או אולי כאשר $k \to \infty$). עכשיו נניח ש A שלנו דומה למטריצה אלכסונית D. כלומר

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 & 0 \\ & d_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

ונניח שאנחנו יודעים מה P המתאים, כלומר

$$A = P^{-1}DP$$

עכשיו,

$$A^k = P^{-1}DP \cdot P^{-1}DP \cdots P^{-1}DP = P^{-1}D^kP =$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} d_1^k & & 0 & 0 \\ & d_2^k & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_n^k \end{pmatrix}P$$

כלומר בשביל לחשב את A^k מספיק לעשות רק 3 פעולות של כפל מטריצות במקום לעשות k פעולות. זאת תהיה המוטביציה העיקרית שלנו כאן.

לפני שנמשיך ניתן שתי אבחנות בסיסיות:

טענה 6.3 אם A, B הן מטריצות דומות אז יש להן אותו rank ואותה דטרמיננטה.

הוכחה: $A = P^{-1}BP$ וראינו כבר שכפל במטריצה הפיכה לא משנה rank. לגבי דטרמיננטה:

$$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |P^{-1}||P||B| = |P^{-1}P||B| = |I||B| = |B|$$

■

הגדרה 6.4 אם A דומה למטריצה אלכסונית אז A מטריצה **לכסינה**. מטריצה הפיכה P שתקיים כי $P^{-1}AP = D$ נקראת **מטריצה מלכסנת**.

הערה 6.5 אם

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 & 0 \\ & d_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסונית ו D' היא מטריצה אלכסונית עם אותם איברים בדיוק אבל בסדר אחר אז D ו D' דומות.

הוכחה: לא נוכיח בדיוק. רק נגיד שאם E מטריצה אלמנטרית של החלפת שורות i ו j אז ביצוע

$$E^{-1}DE = EDE$$

בעצם מחליף את הערכים d_i ו d_j. למשל אם

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

אז

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} D \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

המסקנה מכאן היא, שאם D אלכסונית ודומה ל A אז כל מטריצה אלכסונית D' שיש לה אותם איברים רק בסדר אחר היא גם דומה ל A. אז לא צריך להתרגש מהסדר של האיברים במטריצה האלכסונית שלנו.

אז הנה השאלה המנחה שלנו לפרק הזה:

שאלה 6.6 בהינתן מטריצה ריבועית A, איך יודעים אם היא לכסינה? אם כן, איך מוצאים את הצורה האלכסונית D ואת המטריצה המלכסנת P?

המושגים העיקריים בהקשר הזה יהיו המושגים של ערך עצמי ווקטור עצמי.

6.1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הגדרה 6.7 מספר $\lambda \in \mathbb{R}$ נקרא **ערך עצמי** של A אם קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$.
אם λ הוא ערך עצמי אז כל וקטור v המקיים $Av = \lambda v$ נקרא **וקטור עצמי** של A (המתאים לערך העצמי λ).

דוגמא 6.8 נסתכל על המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אז $\lambda = 1$ הוא ערך עצמי בגלל שאם ניקח את הוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ אז קל לבדוק ש

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1v$$

ולכן $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v$ הוא וקטור עצמי (המתאים לערך העצמי $\lambda = 1$)

למטריצה יכול להיות יותר מערך עצמי אחד. למשל אם ניקח את $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ אז

$$Av = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2v$$

ולכן גם 2 הוא ערך עצמי ו $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 2.

אבחנה 6.9 לערך העצמי יש הרבה וקטורים עצמיים. למשל גם $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי שמתאים לערך העצמי 1. נתייחס לזה יותר בפירוט בהמשך.

אבחנה 6.10 יש פה נקודה עדינה בנוגע לוקטור האפס $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. לכל מספר λ בוודאי מתקיים ש $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. אבל זה לא אומר שכל λ הוא ערך עצמי. אם נסתכל על ההגדרה בזהירות נראה שכדי ש λ יהיה ערך עצמי צריך שיהיה $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$.
מצד שני, אחרי שאנחנו יודעים ש λ הוא ערך עצמי של A כי יש $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$.
אז אנחנו מחשיבים גם את $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ כוקטור עצמי של λ כי גם הוא מקיים $Av = \lambda v$. לכן אנחנו נגיד בדוגמא למעלה ש $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא גם וקטור עצמי של 2 וגם של 1 (אבל לא של 3 נניח כי 3 הוא בכלל לא ערך עצמי).
אזהרה: יש ספרים (למעשה רוב הספרים וגם ויקיפדיה) שלא מחשיבים את וקטור האפס כוקטור עצמי. יש להם כמה סיבות טובות לזה. אז להזהר שיש קצת הבדל בהגדרות אם קוראים במקורות אחרים.

שאלה 6.11 טוב, אז למה זה עוזר לנו בחיים ערכים עצמיים?

כהרגלנו בקודש נצטרך לחכות קצת לפני שנוכל לענות על השאלה הזאת בצורה מוצלחת. קודם נצטרך לחקור קצת את הנושא של ערכים עצמיים.

נתחיל בשאלה הבאה: בהינתן מטריצה ריבועית A, איך מוצאים את הערכים העצמיים שלה?

טענה 6.12 מטריצה A היא אינה הפיכה אם ורק אם יש וקטור $v \neq 0$ כך ש $Av = 0$.

הוכחה: למעשה הוכחנו את זה כבר מזמן. ראינו כבר ממזמן ש A הפיכה אם ורק אם למערכת משוואות לינארית $Ax = b$ יש פתרון יחיד ולא משנה מהו b. בפרט אפשר לקחת $b = 0$ ולהגיד שA הפיכה אם ורק אם למערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד. עכשיו, למערכת הזאת יש תמיד לפחות פתרון אחד $x = 0$. זה הפתרון היחיד אם ורק אם A הפיכה. יש עוד פתרון $v \neq 0$ כך ש $Av = 0$ אם ורק אם A לא הפיכה. ■

מסקנה 6.13 A אינה הפיכה אם ורק אם $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי של A.

באופן כללי יותר אפשר להגיד את הדבר הבא:

טענה 6.14 λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם המטריצה $A - \lambda I$ **לא** הפיכה.

הוכחה: λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם יש $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$ זה קורה אם ורק אם $Av - \lambda v = 0$ וזה קורה אם ורק אם $(A - \lambda I)v = 0$ וזה כפי הרגע הוכחנו, קורה אם ורק אם $A - \lambda I$ אינה הפיכה. ■

דוגמא 6.15 נחזור למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

שבחנו קודם. λ הוא ערך עצמי אם ורק אם המטריצה

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

אינה הפיכה. איך נבדוק את זה? בדר"כ נשתמש בדטרמיננטה. במקרה שלנו

$$|A - \lambda I| = (3-\lambda)(-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

אז השאלה היא מתי מתקיים השוויון:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

במקרה הזה קל לפתור משוואה ריבועית ולוודא שזה קורה כאשר $\lambda = 1$ או $\lambda = 2$ ולכן אלו הערכים העצמיים היחידים של A.

יש פה הרבה תובנות שאפשר להסיק. ניגש לזה לאט לאט. דבר ראשון ננסח שוב את המשפט הקודם.

מסקנה 6.16 λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם $|A - \lambda I| = 0$.

עוד דרך חשובה לתאר את אותה מסקנה היא באמצעות המושג של פולינום אופייני. קודם נזכיר על מה אנחנו מדברים. וניתן כמה עובדות חשובות לגבי פולינומים.

הגדרה 6.17 פונקציה מהצורה $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. נקראת פולינום.

למשל $x^3 + x + 5$ ו $2x + 3$ הם פולינום. לעומת $\sin x$ ו $\sqrt{x^3 + x}$ שהם לא פולינומים.

הגדרה 6.18 החזקה הכי גבוהה בפולינום נקראת ה**דרגה** או **המעלה** של הפולינום.

למשל הדרגה של $2x + 3$ היא 1. והדרגה של $x^3 + x + 5$ היא 3.

הגדרה 6.19 יהי $p(\lambda)$ פולינום כלשהוא. מספר λ_0 נקרא **שורש** של הפולינום $p(\lambda)$ אם $p(\lambda_0) = 0$.

הנה עובדה חשובה בנוגע לפולינומים (לא ניכנס להוכחה)

עובדה 6.20 לפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים.

בלי להיכנס יותר מדי לפרטים טכניים, נגיד רק שאם λ_0 הוא שורש של $p(\lambda)$ אז $\lambda - \lambda_0$ אמור להיות גורם של p. למשל אם $p(5) = 0$ אז צריך להיות אפשרי לפרק את p ל $p(\lambda) = (\lambda - 5)\tilde{p}(\lambda)$ כש $\tilde{p}$ הוא איזשהוא פולינום אחר.

אומרים שפולינום $p(\lambda)$ **מתפרק לגורמים לינאריים** אם אפשר לכתוב אותו כמכפלה של גורמים מהצורה $\lambda - \lambda_0$ כלומר משהו כזה:

$$p(\lambda) = (\lambda - d_1)(\lambda - d_2)\cdots(\lambda - d_n)$$

דוגמא 6.21 את הפולינום $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ אפשר לפרק ל

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

את הפולינום $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ אפשר לפרק ל

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

אבל זה לא תמיד אפשרי. לפולינום

$$\lambda^2 + 1$$

אין שורשים ואי אפשר לפרק אותו יותר מאיך שהוא כתוב כרגע.

לפולינום

$$\lambda^3 - 1$$

יש שורש $\lambda = 1$ והוא גם מתפרק

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

אבל הוא לא מתפרק לגורמים לינאריים.

עכשיו נחזור לנושא שלנו.תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. מטריצה ריבועית. זה אולי לא לגמרי ברור מאליו. אבל הביטוי $|A - \lambda I|$ הוא פולינום (במשתנה λ). חוץ מזה, הוא תמיד פולינום ממעלה n. למשל עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

שדיברנו עליה קודם. נקבל את הפולינום $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

הגדרה 6.22 תהי $A \in \mathbb{R}^n$ מטריצה ריבועית. הפולינום $|A - \lambda I|$ נקרא הפולינום האופייני של A ונסמן אותו $p_A(\lambda)$.

עכשיו אפשר לנסח שוב את התובנה ממקודם.

מסקנה 6.23 λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם $p_A(\lambda) = 0$ (כלומר λ הוא שורש של הפולינום האופייני).

היות שלפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים. נקבל ש:

מסקנה 6.24 למטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ יש לכל היותר n ערכים עצמיים. (כי כולם שורשים של הפולינום $p_A(\lambda)$ שהוא פולינום מדרגה n).

שימו לב: יש מטריצות שאין להם ערכים עצמיים. למשל נסתכל על המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אז הפולינום האופייני שלה הוא:

$$|A - \lambda I| = |\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}| = \lambda^2 + 1$$

לפולינום הזה אין שורשים (ממשיים). ולכן למטריצה אין ערכים עצמיים.

הגדרה 6.25 יהי λ_0 ערך עצמי של A.מספר הפעמים ש $\lambda - \lambda_0$ מופיע בפירוק של p נקרא הריבוי האלגברי של λ_0.

למשל, אם הפולינום האופייני הוא $(\lambda - 4)^2(\lambda - 3)^5(\lambda^2 + 1)$ אז 4 הוא ע"ע עם ריבוי אלגברי 2 והמספר 3 הוא ע"ע עם ריבוי אלגברי 5.

הנה עוד אבחנה חשובה:

טענה 6.26 אם $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא מטריצה משולשית עליונה (או תחתונה) אז הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים ולכן ל A יש n ערכים עצמיים (כולל ריבויים) והם בדיוק האיברים על האלכסון.

הוכחה: ניקח

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & * & * \\ & d_2 & & * \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

אז

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} d_1 - \lambda & & * & * \\ & d_2 - \lambda & & * \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_n - \lambda \end{pmatrix} \right| =$$
$$= (d_1 - \lambda) \cdots (d_n - \lambda)$$

אז השורשים של הפולינום הם בדיוק הערכים שעל האלכסון.

$$\lambda = d_1, \ldots, d_n$$

■

שימו לב שהטענה האחרונה נכונה בפרט למטריצות אלכסונית!
מה הכוונה שיש n ערכים עצמיים כולל ריבויים?נסתכל על המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

יש ל A רק שני ערכים עצמיים 1 ו -2אבל הריבוי האלגברי של 1 הוא 2 כי הפולינום האופייני הוא $(\lambda-1)^2(\lambda+2)$. לכן כולל ספירה של הריבויים יש 3 ערכים עצמיים.
סוף סוף נקשר בין ערכים עצמיים לדמיון מטריצות.

טענה 6.27 אם A ו B הן מטריצות דומות אז גם $A - \lambda I$ ו $B - \lambda I$ הן מטריצות דומות.

הוכחה: אם $A = P^{-1}BP$ אז

$$A - \lambda I = P^{-1}BP - \lambda I = P^{-1}BP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(B - \lambda I)P$$

כנדרש. ■

טענה 6.28 יהיו A, B מטריצות דומות. אזי יש להן אותו פולינום אופייני ולכן ממילא אותם ערכים עצמיים.

הוכחה: נניח P הפיכה כך ש $A = P^{-1}BP$. אז

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

אבל כפי שראינו הרגע, $B - \lambda I$ דומה ל $A - \lambda I$ ולכן יש להם את אותה דטרמיננטה ולכן

$$|A - \lambda I| = |B - \lambda I| = p_B(\lambda)$$

■

טענה 6.29 שתי מטריצות אלכסונית עם ערכים שונים על האלכסון הן **לא דומות**. (כי יש להן פולינום אופייני שונה)

דוגמא 6.30 למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

הן שתי מטריצות לא דומות.

דוגמא 6.31

1. נסתכל על המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אם המטריצה לכסינה, אז בגלל שהערכים העצמיים שלה הם $1, 2$ הצורה האלכסונית שלה חייבת להיות

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(או $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

2. המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אינה לכסינה כי אין לה ערכים עצמיים. אם היא הייתה דומה לאלכסונית אז היו לה ערכים עצמיים שהם האיברים על האלכסון של המטריצה האלכסונית.

3. הפולינום האופייני של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הוא $(\lambda - 1)^2$ ולכן רק 1 הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי 2. לכן, אם היא דומה למטריצה אלכסונית אז היא תהיה דומה למטריצה

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אבל

$$P^{-1}IP = P^{-1}P = I$$

כלומר I דומה רק לעצמה. ולכן $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה.

מסקנה 6.32 כפי שהרגע ראינו יש מטריצות **לא דומות** שיש להן בדיוק את אותו פולינום אופייני. לכן בהינתן מטריצה A חישוב הערכים העצמיים שלה לא אומר לנו אם היא לכסינה או לא. זה רק אומר לנו שאם ידוע כבר שהיא לכסינה אז אנחנו יודעים מה הצורה האלכסונית המתאימה (עד כדי סדר האיברים - היא יחידה). גרוע מזה, הערכים העצמיים לא אומרים לנו מה המטריצה המלכסנת P. בכל אופן התקדמנו הרבה בפתרון הבעיה.

כדי לסיים את הפתרון נחזור לדוגמא של

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אני טוען שאם נבחר

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

אז

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

מה מיוחד במטריצה P שבחרנו? העמודות שלה מכילות וקטורים עצמיים.

נסתכל על דוגמא כללית: נניח ש

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & * \\ & \lambda_2 & & * \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אז

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & * \\ & \lambda_2 & & * \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אם נסתכל למשל על העמודה הראשונה של המטריצה הזאת. אז אפשר לראות לפי כפל במטריצות שבצד שמאל נקבל

$$AC_1(P)$$

ובצד ימין נקבל

$$\lambda_1 C_1(P)$$

כלומר

$$AC_1(P) = \lambda_1 C_1(P)$$

כלומר $C_1(P)$ הוא וקטור עצמי שמתאים לערך העצמי λ_1. באופן יותר כללי העמודה ה i של P - $C_i(P)$ היא וקטור עצמי שמתאים לערך העצמי λ_i. כלומר העמודות של P צריכות להכיל וקטורים עצמיים. היות ש P צריכה להיות הפיכה הוקטורים העצמיים האלה צריכים להיות בת"ל. איך מוצאים אותם? זה לא כל כך קשה כמו שנסביר בחלק הבא:

6.2 מרחבים עצמיים

הגדרה 6.33 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. ויהי $\lambda \in \mathbb{R}$ ערך עצמי של A. המרחב העצמי של λ - שנסמן אותו V_λ- הוא אוסף הוקטורים העצמיים שמתאימים ל λ. במילים אחרות:

$$V_\lambda = \{v \mid Av = \lambda v\}$$

במילים אחרות: $V_\lambda = N(A - \lambda I)$ הוא מרחב האפס של המטריצה $A - \lambda I$.

היות שאנחנו כבר יודעים איך מוצאים בסיס למרחב האפס של מטריצה, אנחנו גם יודעים איך מוצאים בסיס למרחב עצמי. למשל אם נחזור לדוגמא שדיברנו עליה קודם

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אז למשל המרחב העצמי של $\lambda = 2$ הוא מרחב האפס של

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ואפשר לדרג ולחשב שזה יוצא

$$V_2 = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

כנ"ל קל למצוא בסיס למרחב העצמי של הערך העצמי 1.

[לדלג אם אין זמן] למטריצות דומות יש ערכים עצמיים שווים אבל המרחבים העצמיים של הערכים העצמיים האלה לא חייבים להיות שווים. מה שכן צריך להיות שווה זה ה**מימד** שלהם. נשים לב:

אבחנה 6.34 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה עם ערך עצמי λ אז

$$\dim V_\lambda = \dim N(A - \lambda I) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda I)$$

טענה 6.35 תהינה A, B שתי מטריצות דומות ויהי λ ערך עצמי של A (ולכן גם של B). נסמן ב V_λ^A את המרחב העצמי של λ ביחס ל A ובדומה V_λ^B. אזי מתקיים

$$\dim V_\lambda^A = \dim V_\lambda^B$$

הוכחה: כפי שראינו

$$\dim V_\lambda^A = \dim N(A - \lambda I) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda I)$$
$$\dim V_\lambda^B = \dim N(B - \lambda I) = n - \mathrm{rank}(B - \lambda I)$$

אבל בגלל ש A ו B דומות מתקיים גם ש $A - \lambda I$ ו $B - \lambda I$ דומות ולכן עם אותו rank. לכן מתקבל השוויון המבוקש. ■

אז איך יודעים אם A לכסינה? ואיך מוצאים את המטריצה P המלכסנת? הנה הדרך:

משפט 6.36 המטריצה A לכסינה אם ורק אם מתקיים שהפולינום האופייני p_Aמתפרק לגורמים לינאריים **וגם** לכל ערך עצמי λ המימד $\dim V_\lambda$ שווה לריבוי האלגברי של λ. במצב זה האלכסון של המטריצה האלכסונית D מכיל את הערכים העצמיים (כל אחד מופיע מספר פעמים כמו הריבוי האלגברי שלו) בעמודות של מטריצה P צריכים להיות בסיסים למרחבים העצמיים.

כרגיל לא נוכיח את המשפט. אני מקווה שהמחשנו מספיק את ההיגיון שלו. נכתוב שוב את התהליך שעושים כשמקבלים מטריצה A:

דבר ראשון מוצאים את הפולינום האופייני $p_A(\lambda)$ ואת הערכים העצמיים - צריך לשים לב גם לכפילויות! אם הערך העצמי λלמשל מופיע k פעמים בפולינום האופייני $p_A(\lambda)$ אז הוא גם יופיע k פעמים במטריצה האלכסונית D ולכן אנחנו צריכים k וקטורים בת"ל מהמרחב העצמי V_λ שיהיו בעמודות של P. הרגע ראינו איך מוצאים בסיס למרחב העצמי. אם $k < \dim V_k$ אז אין אפשרות למצוא k וקטורים בת"ל והמטריצה לא לכסינה. אם לכל ערך עצמי המרחב העצמי מספיק גדול אז המטריצה לכסינה. ובסיסים של המרחבים העצמיים מהווים את העמודות של P.

כדי להבין את כל המלל הזה צריך דוגמאות:

דוגמא 6.37 נחזור למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כבר ראינו שהפולינום האופייני הוא $(\lambda-1)^2$ ולכן הערכים העצמיים הם : $1,1$ (כלומר רק 1 אבל הוא כפול). נבדוק מה המרחב העצמי שלו

$$A - \lambda I = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rank} A = 1$$

ולכן

$$\dim V_1 = 2 - 1 = 1$$

כלומר המימד של V_1 לא מספיק גדול ולכן A לא לכסינה.

דוגמא 6.38 נסתכל על המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

אפשר לחשב פולינום אופייני ולהראות שהערכים העצמיים הם $\lambda = -2, -2, 4$.

אפשר למצוא בסיס עבור $N(A-4I)$ ולהגיע לכך ש

$$V_4 = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

ולכן

$$\dim V_4 = 1$$

וכנ"ל עבור $\lambda = -2$ אפשר לגלות ש

$$V_{-2} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

ולכן

$$\dim V_{-2} = 2$$

אז יש לנו מספיק וקטורים כדי לייצר את P כלומר:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ואז מתקיים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6.3 יישום

נדגים יישום של לכסון מטריצות במצב שבו צריך לחשב חזקה גבוהה של מטריצה. למען הפשטות של החישובים נתאר מודל עם מטריצה 2×2 (כמובן במבחן זה יהיה מטריצה 17×17)

הנה המודל שלנו: אנחנו חברה א' ואנחנו מתחרים בחברה ב'. לנו יש 30 לקוחות ולחברה המתחרה יש 70 לקוחות. אנחנו רוצים לפתוח בקמפיין שיווק אגרסיבי כדי להעביר אלינו לקוחות. אנחנו נורא חכמים ויודעים שבמהלך כל שבוע של קמפיין, כל לקוח שלנו יישאר שלנו בסבירות של 90% וכל לקוח של המתחרים יעבור אלינו בסבירות של 20%. כמה שבועות של קמפיין נצטרך לממן (בממוצע) עד שיהיו לנו 50 לקוחות? כמה לקוחות יהיו לנו אחרי n שבועות?

אז הנה התיאור המתמטי של הסיפור הזה: יש לנו וקטור של לקוחות שהוא מתאר את מצב הלקוחות כרגע

$$x_0 = \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix}$$

ויש לנו מטריצה שמתארת את השינוי בכל שבוע

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

המצב של השוק אחרי שבוע אחד הוא

$$x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 41 \\ 59 \end{pmatrix}$$

המצב אחרי n שבועות

$$x_n = A^n x_0$$

אז איך מחשבים את A^n? צריך ללכסן את A. אפשר לחשב שהערכים העצמיים של

$$A$$

הם

$$1, \frac{7}{10}$$

ומטריצה מלכסנת היא

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} \end{pmatrix} P^{-1}$$

ולכן

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{7}{10})^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{7}{10})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -(\frac{7}{10})^n \\ 1 & (\frac{7}{10})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\frac{7}{10})^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(\frac{7}{10})^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{7}{10})^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{7}{10})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ואז אפשר להגיע לנוסחא של

$$x_n = A^n x_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\frac{7}{10})^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(\frac{7}{10})^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{7}{10})^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{7}{10})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$x_n = \begin{pmatrix} 66\frac{2}{3} - 36\frac{2}{3}(\frac{7}{10})^n \\ 33\frac{1}{3} + 36\frac{2}{3}(\frac{7}{10})^n \end{pmatrix}$$

מכאן אפשר להסיק איזה מסקנות שרוצים. אפשר לחשב איזה n צריך כך ש

$$66\frac{2}{3}-36\frac{2}{3}(\frac{7}{10})^n>50$$

אפשר לראות שכאשר $n\to\infty$ למשל אז

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{pmatrix}66\frac{2}{3}\\33\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

אז יש לנו פוטנציאל השתלטות על $\frac{2}{3}$ מהשוק.

כמובן המודל הזה הוא נאיבי. אין כל כך מערכות במציאות שאפשר למדל אותם בכזאת קלות. אבל מודלים כאלה יכולים להיות חלק ממודל מורכב יותר שכן יתאר יותר טוב תהליכים במציאות.

7 אורתוגונליות והיבטים גיאומטריים הקשורים לניצבות

טוב. עשינו כבר הרבה גיאומטריה בקורס שלנו. אבל יש כל מיני מושגים גיאומטריים מוכרים שלא דיברנו עליהם בכלל בקורס כמו זויות בין וקטורים ואורכים של וקטורים. בפרק הזה נעשה הכרות בסיסת עם המושגים האלה.

7.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 7.1 יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ שני וקטורים (וקטורי עמודה) אז המכפלה הסקלרית שלהם היא המספר

$$u^t\cdot v$$

אם נכתוב

$$u=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

אז בעצם אפשר לכתוב גם

$$u^t\cdot v=a_1b_1+\ldots+a_nb_n=\sum_{i=1}^n a_ib_i$$

אנחנו נסמן מכפלה סקלרית גם בסימון $\langle u,v\rangle$.

דוגמא 7.2 נחשב למשל שתי מכפלות סקלריות

$$\langle\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\rangle=1\cdot 3+2\cdot(-1)=3-2=1$$

$$\langle\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}\rangle=1\cdot 3+2\cdot 0+4\cdot(-1)=-1$$

טענה 7.3 המכפלה הסקלרית מקיימת את התכונות הבאות:

1. לינאריות:

$$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$$

$$\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$$

$$\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle = \langle u, \alpha v\rangle$$

2. סימטריות:

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$

3. אי שליליות:

$$\langle u, u\rangle \geq 0$$

$$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

הוכחה: די קל לבדוק כאן הכל:
לינאריות:

$$\langle u_1 + u_2, v\rangle = (u_1 + u_2)^t v = (u_1^t + u_2^t)v = u_1^t v + u_2^t v = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$$

$$\langle \alpha u, v\rangle = (\alpha u)^t v = \alpha u^t v = \alpha\langle u, v\rangle$$

בדומה בודקים את שאר הדרישות של לינאריות.
סימטריות:

$$\langle u, v\rangle = u^t \cdot v = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \ldots + b_n a_n = v^t \cdot u = \langle v, u\rangle$$

אי שליליות:

$$\langle u, u\rangle = u^t \cdot u = a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq 0$$

הביטוי הנ"ל מתאפס רק אם $a_i = 0$ לכל i, כלומר $u = 0$. ■

אז מה המשמעות של מכפלה פנימית? בהינתן שני וקטורים u, v אין לי מושג מה אומר המספר $\langle u, v\rangle$ עצמו. אבל הוא קשור להרבה דברים גיאומטריים.
בתור התחלה הוא קשור לאורכים:

הגדרה 7.4 האורך של הוקטור u (נקרא גם הנורמה ומסומן $||u||$) הוא

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

שימו לב ש

$$\sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

שזאת הנוסחא המוכרת לאורך של וקטור.

דוגמא 7.5 נחשב למשל

$$|| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} || = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

עובדה חשובה בנוגע לאורך: כפל בסקלר משפיע על האורך לפי הערך המוחלט של הסקלר: כלומר:

טענה 7.6

$$||\alpha u|| = |\alpha|||u||$$

הוכחה:

$$||\alpha u|| = \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle u, u\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle u, u\rangle} = |\alpha|||u||$$

■

תכונה חשובה היא האי שוויון הבא, שנקרא אי שוויון קושי שורץ. (נוכיח אותו אם יהיה זמן)

טענה 7.7 לכל $u, v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$$

ומתקיים שוויון אם ורק אם u, v מקבילים (כלומר אחד הוא כפל בסקלר של השני)

עוד תכונה חשובה בנוגע לאורכים היא אי שוויון המשולש:

טענה 7.8 (אי שוויון המשולש): לכל שני וקטורים $u, v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

ההיגיון של השם הוא ש $u+v$ מייצג צלע במשולש ששתי הצלעות האחרות שלו הם u,v ולכן האי שוויון פשוט אומר שסכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית. **הוכחה:** נבצע את החישוב הבא:

$$||u+v||^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

לפי לינאריות זה שווה ל

$$\begin{aligned}\langle u+v, u+v\rangle &= \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle\end{aligned}$$

לפי הסימטריות זה שווה ל

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle &= ||u||^2 + 2\langle u,v\rangle + ||v||^2 \\ &\le ||u||^2 + 2|\langle u,v\rangle| + ||v||^2\end{aligned}$$

ולפי אי שוויון קושי שורץ מתקיים

$$\begin{aligned}||u||^2 + 2|\langle u,v\rangle| + ||v||^2 &\le ||u||^2 + 2||u||\cdot||v|| + ||v||^2 \\ &= (||u|| + ||v||)^2\end{aligned}$$

בסך הכל קיבלנו

$$||u+v||^2 \le (||u|| + ||v||)^2$$

ולכן

$$||u+v|| \le ||u|| + ||v||$$

כנדרש. ■

הדבר הבא שאפשר לעשות זה לדבר על מרחק בין וקטורים

הגדרה 7.9 המרחק בין u ל v הוא

$$||u-v||$$

שימו לב שזה נותן את הגדרת המרחק המוכרת

$$||u-v|| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \ldots + (a_n-b_n)^2}$$

דוגמא 7.10 למשל: המרחק בין $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ל $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא

$$||\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}|| = ||\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}|| = \sqrt{5}$$

שימו לב ש

$$||u-v|| = ||(-1)(v-u)|| = |-1|||v-u|| = ||v-u||$$

כלומר המרחק בין u ל v שווה למרחק בין v ל $\underline{u}$.

ההיבט הגיאומטרי הבא הוא זוויות:

הגדרה 7.11 יהיו u,v שני וקטורים. הזווית α בין u ל v היא הזוית היחידה בטווח $[0,\pi]$ המקיימת ש

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||||v||}$$

שימו לב שלפי אי שוויון קושי שורץ

$$-||u||||v|| \leq \langle u,v\rangle \leq ||u||||v||$$

ולכן

$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{||u||||v||} \leq 1$$

אז ההגדרה הגיונית.

דוגמא 7.12 נחשב את הזוית בין הוקטור $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ לוקטור $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$:

$$\frac{\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle}{||\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}||||\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}||} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}$$

עכשיו

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

אומר ש $\alpha = \frac{\pi}{4}$ היא הזוית המבוקשת.

אבחנה 7.13 נשים לב שהזוית בין שני וקטורים היא $\frac{\pi}{2}$, אם ורק אם

$$\langle u,v\rangle = 0$$

במצב זה נגיד שהוקטורים הם **אורתוגונליים** או **ניצבים**.

טענה 7.14 (משפט פיתגורס) אם u ו v הם וקטורים אורתוגונליים אז

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

הוכחה: נשים לב ש:

$$\begin{aligned}||u+v||^2 &= \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u+v\rangle + \langle v,u+v\rangle\\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle =\\ &= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle = ||u||^2 + ||v||^2\end{aligned}$$

■

7.2 הטלות

נתחיל בלהסביר מה זו הטלה של וקטור אחד על וקטור אחר.

הגדרה 7.15 יהיו שני וקטורים $u, v \in \mathbb{R}^n$. ההטלה של u על v היא וקטור $\pi_v(u)$ המקיים את שתי התכונות הבאות:

1. $\pi_v(u) \in \mathrm{Span}\{v\}$.
2. $u - \pi_v(u)$ אורתוגונאלי ל v.

טענה 7.16 יש רק וקטור אחד שעונה על התנאים הנ"ל והוא:

$$\pi_v(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

הוכחה: שלב א': קודם נוכיח שהוקטור המצויין באמת מקיימת את הדרישות של הטלה. ראשית ברור ש

$$\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v \in \mathrm{Span}\{v\}$$

הרי הוא v כפול סקלר כלשהוא. נותר לבדוק ש $u - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v$ אורתוגונאלי ל v. אבל באמת

$$\begin{aligned}\langle u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v, v\rangle &= \langle u, v\rangle - \langle \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v, v\rangle = \langle u, v\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle v, v\rangle \\ &= \langle u, v\rangle - \langle v, v\rangle = 0\end{aligned}$$

מצד שני, נראה שכל וקטור שמקיים את התנאים של הטלה חייב להיות $\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v$. קודם כל, מאחר שההטלה ב $\mathrm{Span}\{v\}$, חייב להתקיים:

$$\pi_v(u) = \alpha v$$

עבור איזשהיא α. עכשיו, מהתנאי של האורתוגונליות נקבל ש

$$0 = \langle u - \alpha v, v\rangle = \langle u, v\rangle - \alpha\langle v, v\rangle$$

ולכן

$$\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

כנדרש. ■

דוגמא 7.17 הנה דוגמא חישובית פשוטה. מה ההטלה של הוקטור $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ על הוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? נחשב ונקבל כי

$$\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = \frac{1}{\sqrt{2}} v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

מה זה עוזר לנו הטלה בחיים? אנחנו נציג שני דברים. ראשית נוכיח באמצעות הטלות את אי שוויון קושי שורץ:

הוכחה: (עבור אי שוויון קושי שורץ) [אם יש זמן]: צריך להוכיח שלכל שני וקטורים

$$|\langle u,v\rangle| \leq ||u||||v||$$

- מקרה א': אם $v=0$ מתקיים שוויון באופן ברור.
- מקרה ב': אם $||v||=1$ אז בעצם צריך להוכיח

$$|\langle u,v\rangle| \leq ||u||$$

נשים לב ש

$$|\langle u,v\rangle| = |\langle u,v\rangle|||v|| = ||\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v|| = ||\pi_v(u)||$$

עכשיו, היות ש

$$||u||^2 = ||u-\pi_v(u)+\pi_v(u)||^2$$

וזה לפי משפט פיתגורס שווה ל

$$||u-\pi_v(u)||^2 + ||\pi_v(u)||^2$$

אז מקבלים בעצם ש

$$||\pi_v(u)||^2 \leq ||u||^2$$

ולכן

$$||\pi_v(u)|| \leq ||u||$$

שזה מה שרצינו.

- מקרה ג': אם $v\neq 0$ כללי אז נגדיר וקטור

$$w=\frac{v}{||v||}$$

נשים לב ש

$$||w|| = ||\frac{v}{||v||}|| = \frac{||v||}{||v||} = 1$$

ולכן לפי מקרה ב' מתקיים

$$|\langle u,w\rangle| \leq ||u||$$

כלומר

$$|\langle u, \frac{v}{||v||}\rangle| \leq ||u||$$

לפי תכונות של מכפלה פנימית נקבל

$$\frac{1}{||v||}|\langle u, v\rangle| \leq ||u||$$

ולכן

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$$

כנדרש.

■

עוד תכונה חשובה של הטלות היא העובדה שהן הוקטור הכי קרוב ל u שמקביל ל v.

טענה 7.18 ההטלה $\pi_v(u)$ היא הוקטור ב $\mathrm{Span}\{v\}$ הקרוב ביותר ל u.

הוכחה: נבצע טריק דומה למה שעשינו בהוכחה של אי שוויון קושי שורץ. ניקח וקטור כלשהוא $\alpha v \in \mathrm{Span}\{v\}$ ונשים לב ש

$$||u - \alpha v||^2 = ||u - \pi_v(u) + \pi_v(u) + \alpha v||^2$$

עכשיו, נשים לב ש $\pi_v(u) + \alpha v \in \mathrm{Span}\{v\}$ ולכן לפי הגדרה $u - \pi_v(u)$ אורתוגונלי אליו. ולכן לפי משפט פיתגורס:

$$||u - \pi_v(u) + \pi_v(u) + \alpha v||^2 = ||u - \pi_v(u)||^2 + ||\pi_v(u) + \alpha v||^2$$

היות ש

$$||\pi_v(u) + \alpha v||^2 \geq 0$$

אנחנו מקבלים ש

$$||u - \pi_v(u)||^2 \leq ||u - \alpha v||^2$$

ולכן

$$||u - \pi_v(u)|| \leq ||u - \alpha v||$$

שזה בדיוק מה שרצינו להוכיח. המרחק בין u להטלה שלו על v, קטן יותר מהמרחק של u לכל וקטור אחר ב $\mathrm{Span}\{v\}$. ■

מה לא הספקנו: בסיס אורתוגונלי. הטלה של וקטור על מרחב וקטורי. זוית בין וקטור למרחב וקטורי. תהליך גרהם שמידט. בסיס אורתונורמלי.