תרגיל מס 2 - אינפי 4 תשע`ט

11 במרץ 2019

ניתן להניח שהאינגרל לפי אורך אינו תלוי בפרמטירזציה כל עוד היא פשוטה או בעלת מספר סופי של נקודות x עבורן $\left|\gamma^{-1}\left(\{x\}\right)\right| > 0$. (כלמר בתרגילים חישוביים - מספירק למצוא פרמטריזציה פשוטה (עד או חח"ע פרט למספר סופי של נקודות). אין צורך להוכיח שהאינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה שנבחרה.

1. תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך עם תמונה Γ ותהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו ש f אינגרבילית אורך ביחס ל γ. (רמז: תנסו לחכות את ההוכחה עבור אינגרל רימן ולהחליף את Δx ב $\left\|\gamma\left(t_k\right) - \gamma\left(t_{k-1}\right)\right\|$.)

2. תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך ו $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ כך ש $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ קיים. (קיים אינגרל לפי אורך של f על γ.)

   (א) הוכיחו שכל $[c,d] \subseteq [a,b]$ עם $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[c,d]}$ אזי $\int_{\tilde{\gamma}} f\mathbf{d}l$ קיים.

   (ב) הוכיחו

$$\lim_{c\to a}\int_{\gamma|_{[c,b]}} f\mathbf{d}l = \lim_{c\to b}\int_{\gamma|_{[a,c]}} f\mathbf{d}l = \int_\gamma f\mathbf{d}l$$

   (ג) הוכיחו שאם γ' קיימת פרט למספר סופי של נקודות $c_1,\ldots,c_{n-1}$ בקטע $[a,b]$ גזירה ברציפות בקטעים $[c_{i-1},c_i]$ כאשר $a=c_0$ ו $b=c_n$ אזי האינטגרל אם האינטגרל $\int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt$ קיים ו f רציפה, אזי $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ קיים ומתקיים

$$\int_\gamma f\mathbf{d}l = \int_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|\mathbf{d}t .$$

3. תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ עקומה בעלת אורך.

   (א) הוכיחו שאם f אינגרבילית לפי אורך ביחס ל γ, אזי f חסומה.

   (ב) הוכיחו שאם f אינגרבילית אזי $\int_\gamma f\mathbf{d}l \le ML\left(\gamma\right)$.

4. חשבו את הינטגרלים הבאים:

   (א) $\int_\Gamma (x+y)\,\mathbf{d}l$ כאשר $\gamma = \{(x,y) : |x|+|y| = 1\}$

   (ב) $\int_\gamma (2x+y+z)\,\mathbf{d}l$ כאשר $\gamma(t) = (t+1, t+2, 3)$ עבור $0 \le t \le 2$.

ג) $\int_{\gamma}(2x+y+z)\,\mathbf{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y)\,|x^2+y^2=4x\right\}$.

ד) $\int_{\Gamma} xyz\mathbf{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y,z)\,|x=t,y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3},z=\frac{1}{2}t^2|0\leq t\leq 1\right\}$.

ה) $\int_{\Gamma}|y|\,\mathbf{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y):y^2=4x\right\}$.

5. נתון קפיץ $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,3t)$ כך שצפיפות המסה בנקודה (x,y,z) נתונה על ידי $x^2+y^2+z^2$. חשבו את מסת הקפיץ אם נתון שקצה אחד שלו נמצא ב $(0,0,1)$ ואורכו $\sqrt{360}\pi$.