

תרגיל מס 2 - אינפי 4 תשע׳ט

11 במרץ 2019

ניתן להניח שהאינטגרל לפי אורך אינו תלוי בפרמטריזציה כל עוד היא פשוטה או בעלת מספר סופי של נקודות x עבורן $|\gamma^{-1}(\{x\})| > 0$. (כלומר בתרגילים חישוביים - מספיק למצוא פרמטריזציה פשוטה (עד או חח"ע פרט למספר סופי של נקודות). אין צורך להוכיח שהאינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה שנבחרה.

1. תהי $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך עם תמונה Γ ותהי $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו ש f אינטגרבילית ביחס לאורך γ . (רמז: תנסו לחקות את ההוכחה עבור אינטגרל רימן ולהחליף את Δx ב $\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$).

2. תהי $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך ו $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש $\int_\gamma f \, d\mathbf{l}$ קיים. (קיים אינטגרל של f על לפי אורך γ).

(א) הוכיחו שכל $[c, d] \subseteq [a, b]$ עם $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[c, d]}$ אזי $\int_{\tilde{\gamma}} f \, d\mathbf{l}$ קיים.

(ב) הוכיחו

$$\lim_{c \rightarrow a} \int_{\gamma|_{[c, b]}} f \, d\mathbf{l} = \lim_{c \rightarrow b} \int_{\gamma|_{[a, c]}} f \, d\mathbf{l} = \int_\gamma f \, d\mathbf{l}$$

(ג) הוכיחו שאם γ' קיימת פרט למספר סופי של נקודות c_1, \dots, c_{n-1} בקטע $[a, b]$ גזירה ברציפות בקטעים $[c_{i-1}, c_i]$ כאשר $a = c_0$ ו $b = c_n$ אזי האינטגרל אם האינטגרל $\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$ קיים ו f רציפה, אזי $\int_\gamma f \, d\mathbf{l}$ קיים ומתקיים

$$\int_\gamma f \, d\mathbf{l} = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

3. תהי $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ עקומה בעלת אורך.

(א) הוכיחו שאם f אינטגרבילית לפי אורך ביחס ל γ , אזי f חסומה.

(ב) הוכיחו שאם f אינטגרבילית אזי $\int_\gamma f \, d\mathbf{l} \leq ML(\gamma)$.

4. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_\Gamma (x + y) \, d\mathbf{l}$ כאשר $\gamma = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$

(ב) $\int_\gamma (2x + y + z) \, d\mathbf{l}$ כאשר $\gamma(t) = (t + 1, t + 2, 3)$ עבור $0 \leq t \leq 2$.

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4x\} \text{ כאשר } \int_{\gamma} (2x + y + z) \, dl \quad (\text{ג})$$

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) \mid x = t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z = \frac{1}{2}t^2 \mid 0 \leq t \leq 1 \right\} \text{ כאשר } \int_{\Gamma} xyz \, dl \quad (\text{ד})$$

$$\Gamma = \{(x, y) : y^2 = 4x\} \text{ כאשר } \int_{\Gamma} |y| \, dl \quad (\text{ה})$$

5. נתון קפיץ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ כך שצפיפות המסה בנקודה (x, y, z) נתונה על ידי $x^2 + y^2 + z^2$. חשבו את מסת הקפיץ אם נתון שקצה אחד שלו נמצא ב $(0, 0, 1)$ ואורכו $\sqrt{360}\pi$.