מערך תרגיל קורס 89-133 סמסטר ב' תשע"ה
בחשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

מרץ 2015, גרסה 0.3

מבוא

נתחיל עם כמה דגשים:

- דף הקורס נמצא באתר `www.math-wiki.com`.
- שאלות בנוגע לחומר הלימודי מומלץ לשאול בדף השיחה באתר של הקורס.
- נכון לעכשיו יש הגשת תרגילים, עם בדיקה חלקית.
- נשמח לכל הערה על מסמך זה.

1 אינטגרל מסוים לפי רימן

הגדרה 1.1. יהי $[a,b]$ קטע סגור. נקרא ל-$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה של הקטע $[a,b]$. נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ לכל $i\in\{1,2,\dots,n\}$.

הגדרה 1.2. תהא f פונקציה מוגדרת בקטע $[a,b]$ ותהא $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה של הקטע. בכל קטע $[x_{i-1},x_i]$ נבחר נקודה α_i ונבנה את סכום רימן עבור החלוקה T, הפונקציה f והנקודות $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ לפי

$$\sigma_T(\alpha_1,\dots a_n) := \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\Delta x_i$$

הגדרה 1.3. פרמטר החלוקה של T מוגדר להיות $\lambda(T) = \max(\Delta x_i)$. נאמר כי סדרה של חלוקות $\{T_n\}$ היא נורמלית אם $\lim_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$.

הגדרה 1.4. נאמר שקיים הגבול $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = I$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ המקיימת: לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה $\lambda(T) < \delta$ ולכל בחירה של $\{\alpha_i\}$ מתקיים $|\sigma_T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - I'| < \epsilon$.

נהוג לסמן גבול זה $\int_a^b f(x)dx$. הוא נקרא האינטגראל (המסוים) של רימן (Riemann). במקרה זה נאמר כי f אינטגרבלית רימן בקטע $[a,b]$. באופן לא פורמלי, מטרת האינטגרל היא לחשב את השטח שכלוא בין עקומה לציר ה-x.

משפט 1.5. פונקציה רציפה או מונוטונית בקטע $[a,b]$ אינטגראבלית שם.

משפט 1.6. אם פונקציה f חסומה בקטע $[a,b]$ ויש לה שם קבוצה סופית (או ליתר דיוק בת מניה) של נקודות אי רציפות, אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

(להדגיש כי תנאי הכרחי לאינטגראביליות רימן היא חסימות הפונקציה.)

משפט 1.7. אם F פונקציה קדומה של פונקציה רציפה f בקטע $[a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

תרגיל 1.8. חשבו את האינטגרל $\int_0^5 (5-x)\,dx$.

פתרון. דרך אחת היא בעזרת "משולש" בגרף הפונקציה. הדרך הכללית היא לחשב עם חלוקה נורמלית את

$$\int_0^5 (5-x)\,dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} (5-\alpha_k)\,\Delta x_k$$

לפי המשפט הנ"ל, הפונקציה $f(x) = 5 - x$ אינטגרבילית בקטע $[0,5]$, מפני שהיא רציפה שם. אפשר לבחור כל סדרה של חלוקות $\{T_n\}$. בפרט, נבחר חלוקה שווה

$$\Delta x = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$$

עם נקודת קצה ימנית $\alpha_k = 0 + k \cdot \frac{5}{n} = \frac{5k}{n}$, ונחשב:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(5-\frac{5k}{n}\right)\frac{5}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{25}{n}-\frac{25k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{25}{n}\cdot n-\frac{25}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(25-\frac{25}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) = 25-\frac{25}{2} = \frac{25}{2}\end{aligned}$$

תרגיל 1.9. חשבו את האינטגרל $\int_0^3\left(4-\frac{x^2}{4}\right)dx$.

פתרון. לפי המשפט הנ"ל, הפונקציה $f(x) = 4-\frac{x^2}{4}$ אינטגרבילית בקטע $[0,3]$ כי היא רציפה שם. נבחר חלוקה שווה של $[0,3]$:

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

עם נקודת קצה שמאלית $\alpha_k = 0 + (k-1)\cdot\frac{3}{n} = \frac{3(k-1)}{n}$, ונחשב:

$$\begin{aligned}\int_0^3\left(4-\frac{x^2}{4}\right)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(4-\frac{1}{4}\left(\frac{3(k-1)}{n}\right)^2\right)\frac{3}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{12}{n}-\frac{27}{4n^3}(k-1)^2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n}\cdot n-\frac{27}{4n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n}\cdot n-\frac{27}{4n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{54}{4n^3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{27}{4n^3}\cdot n\right)\\ &= 12-\frac{27\cdot 2}{4\cdot 6} = 12-\frac{9}{4} = \frac{39}{4}\end{aligned}$$

הערה. נשים לב כי ניתן להוכיח באינדוקציה כי

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

הגדרה 1.10. תהא A קבוצה. הפונקציה המציינת (או הפונקציה האופיינית) $\chi_A : A \to$

$\{0,1\}$ של A מוגדרת לפי
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

דוגמה 1.11. הפונקציה $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) + 2x \cdot \chi_{(1,2]}(x)$ רציפה למקוטעין ב $[0,2]$ ולכן

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 1 \cdot dx + \int_1^2 2xdx$$
$$= 1 + x^2|_1^2 = 1 + [2^2 - 1^2] = 4$$

תרגיל 1.12. הוכיחו כי פונקצית דריכלה בקטע $[0,1]$ המוגדרת לפי

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

אינה אינטגראבלית. (נעיר כי לפעמים הפונקציה מוגדרת הפוך, כפונקציה המציינת של $\mathbb{Q}$, אך אין זה משנה לתרגיל זה.)

פתרון. $D(x)$ אינה אינטגראבלית כי עבור $\epsilon = 0.5$ לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה הקטן מ-0.5 נוכל לבחור את $\{\alpha_i\}$ להיות מספרים אי־רציונאליים ואז

$$\sigma_T(\alpha_1, \dots a_n) = \sum_{i=1}^n D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1\Delta x_i = 1 - 0 = 1$$

ביתר פירוט: נבחר חלוקה שווה של הקטע $[0,1]$ וברור כי $\Delta x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. בבחירה $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$ תמיד אפשר לבחור נקודה רציונלית או נקודה אי־רציונלית, ולכן סכום רימן יכול לקבל כל ערך בין 0 ל-1. למשל אם נחבר רק נקודות רציונליות נקבל כי

$$\sum_{i=1}^n D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0\Delta x_i = 0$$

ולכן סכומי הרימן השונים במקרה זה לא מתכנסים לאותו הגבול.

תרגיל 1.13. קבעו האם הפונקציה המוגדרת לפי

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

פתרון. הפונקציה לא אינטגרבילית, כי $\lim_{n\to 0^+} f(x)=\infty$, כלומר כי $f(x)$ אינה חסומה ב-$[0,1]$.

תרגיל 1.14. קבעו האם הפונקציה המוגדרת לפי

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[-1,1]$.

פתרון. הפונקציה כן אינטגרבילית, כי $|f(x)|\leq 1$ לכל $x\in[-1,1]$. כלומר $f(x)$ חסומה בקטע ויש לה נקודת אי רציפות אחת ב-$x=0$.

תרגיל 1.15. הוכיחו או הפריכו: אם פונקציה $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

פתרון. נפריך בעזרת הדוגמה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=2\chi_{\mathbb{Q}}(x)-1$$

ברור כי $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$, כי היא קבועה שם. לעומת זאת הפונקציה f לא אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ מנימוקים דומים לכך שפונקציית דיריכלה לא אינטגרבילית. ביתר פירוט, אם בחלוקה הבחירה $\{\alpha_i\}$ נבחר רק נקודות רציונליות נקבל שסכום רימן חיובי 1, ואם נבחר רק נקודות אי־רציונליות נקבל שסכום רימן שלילי -1.

תרגיל 1.16. השתמשו באינטגרל מסויים על מנת לחשב את הגבול

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot 1^2}{n^4}}+\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot 2^2}{n^4}}+\cdots+\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot n^2}{n^4}}\right)$$

פתרון. נחשב

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\sqrt{4-\frac{4\cdot 1^2}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{4\cdot 2^2}{n^2}}+\cdots+\sqrt{4-\frac{4\cdot n^2}{n^2}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4-\frac{4\cdot k^2}{n^2}} = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} = \frac{1}{4}\pi\cdot 2^2 = \pi \end{aligned}$$

כאשר בשלבים האחרונים השתמשנו בכך שאנו יודעים מהו השטח של רבע עיגול $x^2 + y^2 \leq 4$, ושחישבנו את האינטגרל בקטע $[0,2]$ עם חלוקה שווה $\Delta x = \frac{2}{n}$ ובחירה $\alpha_k = \frac{2k}{n}$ שהיא הקצה הימני של הקטע $\left[\frac{2(k-1)}{n}, \frac{2k}{n}\right]$.

תרגיל 1.17. תהיינה f ו-g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכיחו כי גם הפונקציה $f+g$ אינטגרבילית שם ומתקיים

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

הוכחה. תהי $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ חלוקה כלשהי של הקטע $[a,b]$. נחשב

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}(f+g)(\alpha_k)\Delta x_k &= \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\alpha_k)\Delta x_k + g(\alpha_k)\Delta x_k\right) \\ &= \lim_{\lambda(T)\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\alpha_k)\Delta x_k\right) \\ &= \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k + \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(\alpha_k)\Delta x_k \\ &= \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \end{aligned}$$

והשיוויון האחרון מתקיים כי הגבולות קיימים, שהרי לפי הנתון f ו-g פונקציות אינטגרביליות,

ולכן $f+g$ אינטגרבילית, כדרוש. $\square$

2 סכומי רימן, סכומי דרבו והמשפט היסודי

משפט 2.1 (תנאי רימן לאינטגרביליות). הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $f(x)$ חסומה בקטע $[a,b]$.
2. נסמן $I_k=[x_{k-1},x_k]$ עבור $1\le k\le n$. מתקיים

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{x\in I_k}f(x)-\inf_{x\in I_k}f(x)\right)\Delta x_k=0$$

תזכורת כמה משפחות של פונקציות אינטגרביליות:

- פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$.
- פונקציות מונוטוניות בקטע $[a,b]$.
- פונקציות חסומות ובעלות מספר סופי של נקודות אי־רציפות בקטע $[a,b]$.
- פונקציות חסומות ובעלות קבוצה בת מנייה של נקודות אי־רציפות בקטע $[a,b]$.

שאלה 2.2 (ממבחן תשע"ד). הוכיחו כי אם f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$, אזי גם הפונקציה $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$. רמז: ניתן להשתמש בעובדה הנובעת מאי שיוויון המשולש:

$$\sup_{x\in I}|f(x)|-\inf_{x\in I}|f(x)|\le\sup_{x\in I}f(x)-\inf_{x\in I}f(x)$$

(הערות: השאלה נכונה גם באופן כללי עבור $[a,b]$. כמו כן אפשר להסיק כי לא רק ש-$|f|$ אינטגרבילית אלא גם שמתקיים $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$. "הצד השני" של אי שיוויון המשולש באופן כללי הוא $||x|-|y||\le|x-y|$.)

פתרון. נוכיח כי $|f|$ מקיימת את שני התנאים של תנאי רימן לאינטגרביליות.

ראשית, נתון כי f אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ ולכן חסומה שם. כלומר קיים קבוע $M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|f| \leq M$, ולכן גם $|f|$ חסומה בקטע $[0,1]$. שנית, אם T חלוקה כלשהי של הקטע $[0,1]$, לפי הרמז נשים לב כי

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{x\in I_k}|f(x)| - \inf_{x\in I_k}|f(x)|\right)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{x\in I_k}f(x) - \inf_{x\in I_k}f(x)\right)\Delta x_k \xrightarrow{\lambda(T)\to 0} 0$$

הסכום הימני שואף לאפס לפי הנתון ש-f אינטגרבילית, ולכן מתקיים

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{x\in I_k}|f(x)| - \inf_{x\in I_k}|f(x)|\right)\Delta x_k = 0$$

שהוא התנאי השני הדרוש. לכן $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

2.1 אינטגראבליות לפי דארבו

הגדרה 2.3. תהא $f(x)$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ ותהא $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ חלוקה של הקטע. נסמן $M_k = \sup_{x\in I_k} f(x)$ וכן $m_i = \inf_{x\in I_k} f(x)$.

הסכום $\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ נקרא הסכום התחתון של דרבו (Darboux).

הסכום $\bar{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ נקרא הסכום העליון של דרבו.

שימו לב כי סכומי דרבו העליון והתחתון כבר לא תלויים בבחירת $\{\alpha_k\}$ כמו בסכום רימן.

הגדרה 2.4. תהא T חלוקה של הקטע $[a,b]$. נקרא לחלוקה T' של הקטע $[a,b]$ העדנה של T (או עידון של T) אם היא מכילה את כל נקודות החלוקה של T, ואולי עוד נקודות.

משפט 2.5 (תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו)**.** תהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ותהי $\{T_n\}$ סדרה של חלוקות של $[a,b]$ כך שלכל $1 \leq k \leq n$ החלוקה T_k היא העדנה של החלוקה T_{k-1}. אזי

$$\underline{S}(T_0) \leq \underline{S}(T_1) \leq \cdots \leq \underline{S}(T_n) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \bar{S}(T_n) \leq \bar{S}(T_{n-1}) \leq \ldots \bar{S}(T_0)$$

כלומר סדרת סכומי דרבו התחתונים היא מונוטונית עולה, וסדרת סכומי דרבו העליונים היא מונוטונית יורדת, ושתיהן מתכנסות לאינטגרל המסוים של $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

(גרסה קצרה יותר של משפט זה: תהא T חלוקה של הקטע $[a,b]$, ותהא T' העדנה שלה. אז מתקיים $\bar{S}(T) \geq \bar{S}(T')$ וגם $\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T')$.)

משפט 2.6. פונקציה $f(x)$ היא אינטגראבילית בקטע $[a,b]$ אם (ורק אם) לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $\left|\bar{S}(T) - \underline{S}(T)\right| < \varepsilon$.

תרגיל 2.7. הוכיחו כי

$$\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2} \leq \pi \leq 1+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}$$

הוכחה. נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ בקטע $[0,1]$. זו פונקציה רציפה בקטע הנ"ל, ולכן אינטגרבילית בו. נבחר חלוקה $T : 0 < 0.25 < 0.5 < 0.75 < 1$. בחלוקה זו $\Delta x = \frac{1}{4}$ לכל I_k.

$f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,1]$ ולכן סכום דרבו התחתון הוא

$$\underline{S}(T) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}+\sqrt{1-1^2}\right)$$

כי הערך המינימלי של הפונקציה בכל תת־קטע מתקבל בקצה הימני שלו. באופן דומה, סכום דרבו העליון הוא

$$\bar{S}(T) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0^2}+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right)$$

כי הערך המקסימלי של הפונקציה בכל תת־קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו. כמו כן ידוע לנו כי השטח של רבע מעגל היחידה הוא $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. לפי תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו מתקיים

$$\underline{S}(T) \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \leq \bar{S}(T)$$

ולכן

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right) \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right)$$

ונכפול ב-4 כדי לקבל את אי השיוויון המבוקש. $\square$

תרגיל 2.8 (ממבחן תשע"ג)**.** תהא $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה ממש בקטע $[0,1]$.
סדרו את הערכים הבאים מהקטן ביותר לגדול ביותר:

1. $f(0)$
2. $f(1)$
3. $\frac{1}{3}\big(f(0)+f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})\big)$
4. $\frac{1}{3}\big(f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+f(1)\big)$
5. $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300})$
6. $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$
7. $\int_0^1 f(x)dx$

פתרון. נגדיר שלוש חלוקות $T_0 : 0 < 1$, העידון שלה $T_1 : 0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ והעידון שלה $T_2 = 0 < \frac{1}{300} < \frac{2}{300} < \cdots < \frac{299}{300} < 1$. אזי מתקיים

$$\underline{S}(T_0) \leq \underline{S}(T_1) \leq \underline{S}(T_2) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \bar{S}(T_2) \leq \bar{S}(T_1) \leq \bar{S}(T_0)$$

וכיוון ש-f מונוטונית מתקיים:

$$\underline{S}(T_0) = f(0)$$
$$\bar{S}(T_0) = f(1)$$
$$\underline{S}(T_1) = \frac{1}{3}\big(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})\big)$$
$$\bar{S}(T_1) = \frac{1}{3}\big(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(1)\big)$$
$$\underline{S}(T_2) = \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300})$$
$$\bar{S}(T_2) = \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$$

הגדרה 2.9. פונקציה $F(x)$ תקרא פונקציה קדומה (antiderivative) של פונקציה $f(x)$ בקבוצה A אם מתקיים לכל $x \in A$ כי $F'(x) = f(x)$.

משפט 2.10. תהא $f(x)$ פונקציה. אם $F(x), G(x)$ שתי פונקציות קדומות שלה בקבוצה A, אזי מתקיים שם $F(x) = G(x) + c$ עבור c קבוע.

משפט 2.11 (המשפט היסודי של החדו"א, נוסחת ניוטון-לייבניץ)**.** אם $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ו-$F(x)$ פונקציה קדומה של f בקטע $[a,b]$, אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(הערה: בגלל המשפט לעיל לא משנה באיזו פונקציה קדומה בוחרים. יש גרסה גם עבור f אינטגרבילית.)

רשימה (לא ממצה) של פונקציות קדומות:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ n \neq 1$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x dx = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int e^x dx = e^x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos x} \tan x dx = \frac{1}{\cos x} + c$$
$$\int \frac{1}{\sin x} \tan x dx = -\frac{1}{\sin x} + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

הערה 2.12. אם $F'(x) = f(x)$, אזי ניתן לחשב בקלות את ההסטה הלינארית $f(ax+b)$, כי מתקיים $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = f(ax+b)$. כלומר אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, אזי $\frac{1}{a}F(ax+b)$ היא פונקציה קדומה של $f(ax+b)$.

תרגיל 2.13. השתמשו באינטגרל המסוים על מנת לחשב את הגבול

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right)$$

פתרון. נחשב כי

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית בו. לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$
$$=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$$

משפט 2.14. אם f ו-g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\geq g(x)$, אז $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.

תרגיל 2.15 (ממבחן תשע"ג). הוכיחו כי אם $0<a<b$, אזי

$$\int_a^b \ln x dx\leq\frac{b^2-a^2}{2}$$

הוכחה. לכל $x\in[a,b]$ מתקיים כי $\ln x\leq x$. לכן לפי המשפט האחרון,

$$\int_a^b \ln x dx\leq\int_a^b x dx=\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2}$$

כדרוש. □

תרגיל 2.16 (ממבחן). הוכיחו כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\leq\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leq 2e^2$.

פתרון. נשתמש במשפט לפיו אם $f\leq g$ בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$ (אם קיימים).

נמצא מינימום ומקסימום של הפונקציה $f(x)=e^{x^2-x}$. הנגזרת היא $f'(x)=f(x)(2x-1)$ ולכן יש נקודה חשודה ב-$x=0.5$. הנגזרת השנייה היא $f''(x)=$

$f(x)(2x-1)^2+2f(x)$ ולכן ב-$x=0.5$ יש נקודת מינימום ($f''(0.5)>0$) שהערך בה הוא $f(0.5)=e^{-0.25}$.

נקודת המקסימום מתקבלת באחד הקצוות: $\max\{f(0),f(2)\}=f(2)=e^2$. לכן

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}}=\int_0^2 e^{-0.25}dx\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le\int_0^2 e^2dx=2e^2$$

תרגיל 2.17. הוכיחו כי

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx<\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$$

עבור $R>0$. רמז: הוכיחו כי $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

הוכחה. קודם נראה כי $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. נגדיר $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$. זו פונקציה רציפה בקטע הסגור $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ולכן מקבלת ערך מינימלי ומקסימלי בקטע.

נמצא את הערך המינימלי. נבדוק התאפסות הנגזרת $f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}=0$. לכן $x=\arccos\frac{2}{\pi}$ נקודה חשודה לקיצון בקטע הנ"ל. נחשב כי $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$ וגם $f(\arccos\frac{2}{\pi})\approx 0.21>0$. לכן הערך המינימלי של הפונקציה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הוא 0. לכן $f(x)>0$ לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$, כלומר $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, כדרוש.

כעת נסמן $g(x)=e^{-R\sin x}$. הפונקציה $g(x)$ יורדת בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ והוכחנו כי $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ בקטע זה, לכן $e^{-R\sin x}<e^{-R\frac{2}{\pi}x}$ בקטע זה ונקבל

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}x}dx=-\frac{\pi}{2R}e^{-R\frac{2}{\pi}x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$$

כדרוש. □

3 תוספות

משפט 3.1. מתקיים $\bar{S}(T)=\sup\{\sigma_T|\sigma_T \text{ is a Riemann sum}\}$ וגם $\underline{S}(T)=\inf\{\sigma_T|\sigma_T \text{ is a Riemann sum}\}$.

הגדרה 3.2. האינטגראל העליון של דארבו מוגדר להיות $\bar{I}:=\inf\limits_T\left\{\bar{S}(T)\right\}$. באופן דומה,

האינטגראל התחתון של דארבו מוגדר להיות $\underline{I} := \sup_T \{\underline{S}(T)\}$.

משפט 3.3. תהא $f(x)$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$. אזי f אינטגראבילית רימן
$\Leftrightarrow$ $\bar{I} = \underline{I}$ (ואז הם שווים לערך $\int_a^b f(x)dx$).
$\Leftrightarrow$לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $|\bar{S}(T) - \underline{S}(T)| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow$לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ (כאשר $\omega_i = \sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f$ היא התנודה של f בקטע $[x_{i-1}, x_i]$).

משפט 3.4 (משפט הערך הממוצע האינטגראלי). תהיינה $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ ו-$g(x)$ אינטגראבלית אי-שלילית שם. אזי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$

במקרה הפרטי שבו $g(x) = 1$ נקבל $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

הוכחה. אם $\int_a^b g(x)dx = 0$ אז השיוון טריוויאלי (כל נקודה c תקיים את השיוון).
אחרת- נסמן $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ וגם $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ אזי מתקיים

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

ואז $M \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le m$. כיוון ש f רציפה, נקבל ממשפט ערך הביניים כי קיימת $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. □

שאלה 3.5. הוכח כי $\frac{1}{2}\ln(2) \le \int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan(x)dx \le \frac{1}{2e}\ln(2)$.

פתרון. לפי משפט ערך הביניים קיימת $c \in [0, \pi/4]$
כך ש $\int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan(x)dx = e^{-c^2}\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx$
כיוון ש $e^{-1} \le e^{-\pi/4} \le e^{-c^2} \le e^0 = 1$
נקבל כי $e^{-1}\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx \le \int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan(x)dx \le \int_0^{\pi/4}\tan(x)dx$
נראה כי $\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx = \frac{1}{2}\ln(2)$
ראינו כי פונקציה קדומה של $\tan(x)$ היא $-\ln|\cos(x)|$ (ע"י הצבה $t = \cos(x)$)
ולכן $\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx = -\ln|\cos(\pi/4)| - (-\ln|\cos(0)|) = -\ln(2^{-0.5}) = 0.5\ln(2)$.

מקורות

[1] אתר הקורס, www.math-wiki.com.