מערך תרגיל קורס 89-133 סמסטר ב' תשע"ה
בחשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

אפריל 2015, גרסה 0.6

מבוא

נתחיל עם כמה דגשים:

- דף הקורס נמצא באתר `www.math-wiki.com`.
- שאלות בנוגע לחומר הלימודי מומלץ לשאול בדף השיחה באתר של הקורס.
- נכון לעכשיו יש הגשת תרגילים, עם בדיקה חלקית.
- נשמח לכל הערה על מסמך זה.

1 אינטגרל מסוים לפי רימן

הגדרה 1.1. יהי $[a,b]$ קטע סגור. נקרא ל-$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה של הקטע $[a,b]$. נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ לכל $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

הגדרה 1.2. תהא f פונקציה מוגדרת בקטע $[a,b]$ ותהא $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה של הקטע. בכל קטע $[x_{i-1},x_i]$ נבחר נקודה α_i ונבנה את סכום רימן עבור החלוקה T, הפונקציה f והנקודות $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ לפי

$$\sigma_T(\alpha_1,\ldots a_n) := \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\Delta x_i$$

הגדרה 1.3. פרמטר החלוקה של T מוגדר להיות $\lambda(T) = \max(\Delta x_i)$. נאמר כי סדרה של חלוקות $\{T_n\}$ היא נורמלית אם $\lim_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$.

הגדרה 1.4. נאמר שקיים הגבול $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = I$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ המקיימת: לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה $\lambda(T) < \delta$ ולכל בחירה של $\{\alpha_i\}$ מתקיים $|\sigma_T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - I'| < \epsilon$.

נהוג לסמן גבול זה $\int_a^b f(x)dx$. הוא נקרא האינטגראל (המסוים) של רימן (Riemann). במקרה זה נאמר כי f אינטגרבלית רימן בקטע $[a, b]$. באופן לא פורמלי, מטרת האינטגרל היא לחשב את השטח שכלוא בין עקומה לציר ה-x.

משפט 1.5. פונקציה רציפה או מונוטונית בקטע $[a, b]$ אינטגראבלית שם.

משפט 1.6. אם פונקציה f חסומה בקטע $[a, b]$ ויש לה שם קבוצה סופית (או ליתר דיוק בת מניה) של נקודות אי רציפות, אזי f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.
(להדגיש כי תנאי הכרחי לאינטגראביליות רימן היא חסימות הפונקציה.)

משפט 1.7. אם F פונקציה קדומה של פונקציה רציפה f בקטע $[a, b]$ אזי $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

תרגיל 1.8. חשבו את האינטגרל $\int_0^5 (5 - x)\, dx$.

פתרון. דרך אחת היא בעזרת "משולש" בגרף הפונקציה. הדרך הכללית היא לחשב עם חלוקה נורמלית את

$$\int_0^5 (5 - x)\, dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} (5 - \alpha_k)\, \Delta x_k$$

לפי המשפט הנ"ל, הפונקציה $f(x) = 5 - x$ אינטגרבילית בקטע $[0, 5]$, מפני שהיא רציפה שם. אפשר לבחור כל סדרה של חלוקות $\{T_n\}$. בפרט, נבחר חלוקה שווה

$$\Delta x = \frac{5 - 0}{n} = \frac{5}{n}$$

עם נקודת קצה ימנית $\alpha_k = 0 + k \cdot \frac{5}{n} = \frac{5k}{n}$, ונחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(5-\frac{5k}{n}\right)\frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{25}{n}-\frac{25k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{25}{n}\cdot n - \frac{25}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(25-\frac{25}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) = 25-\frac{25}{2} = \frac{25}{2}$$

תרגיל 1.9. חשבו את האינטגרל $\int_0^3 \left(4-\frac{x^2}{4}\right)dx$.

פתרון. לפי המשפט הנ"ל, הפונקציה $f(x) = 4-\frac{x^2}{4}$ אינטגרבילית בקטע $[0,3]$ כי היא רציפה שם. נבחר חלוקה שווה של $[0,3]$:

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

עם נקודת קצה שמאלית $\alpha_k = 0 + (k-1)\cdot\frac{3}{n} = \frac{3(k-1)}{n}$, ונחשב:

$$\int_0^3\left(4-\frac{x^2}{4}\right)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(4-\frac{1}{4}\left(\frac{3(k-1)}{n}\right)^2\right)\frac{3}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{12}{n}-\frac{27}{4n^3}(k-1)^2\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n}\cdot n-\frac{27}{4n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n}\cdot n-\frac{27}{4n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{54}{4n^3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{27}{4n^3}\cdot n\right)$$
$$= 12-\frac{27\cdot 2}{4\cdot 6} = 12-\frac{9}{4} = \frac{39}{4}$$

הערה. נשים לב כי ניתן להוכיח באינדוקציה כי

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

הגדרה 1.10. תהא A קבוצה. הפונקציה המציינת (או הפונקציה האופיינית) $\chi_A : A \to$

$\{0,1\}$ של A מוגדרת לפי

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

דוגמה 1.11. הפונקציה $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) + 2x \cdot \chi_{(1,2]}(x)$ רציפה למקוטעין ב $[0,2]$ ולכן

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 1 \cdot dx + \int_1^2 2xdx$$
$$= 1 + x^2|_1^2 = 1 + [2^2 - 1^2] = 4$$

תרגיל 1.12. הוכיחו כי פונקצית דיריכלה (Dirichlet) בקטע $[0,1]$ המוגדרת לפי

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

אינה אינטגראבלית. (נעיר כי לפעמים הפונקציה מוגדרת הפוך, כפונקציה המציינת של $\mathbb{Q}$, אך אין זה משנה לתרגיל זה.)

פתרון. $D(x)$ אינה אינטגראבלית כי עבור $\epsilon = 0.5$ לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה הקטן מ-0.5 נוכל לבחור את $\{\alpha_i\}$ להיות מספרים אי־רציונליים ואז

$$\sigma_T(\alpha_1, \ldots a_n) = \sum_{i=1}^{n} D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\Delta x_i = 1 - 0 = 1$$

ביתר פירוט: נבחר חלוקה שווה של הקטע $[0,1]$ וברור כי $\Delta x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. בבחירה $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$ תמיד אפשר לבחור נקודה רציונלית או נקודה אי־רציונלית, ולכן סכום רימן יכול לקבל כל ערך בין 0 ל-1. למשל אם נחבר רק נקודות רציונליות נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{n} D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x_i = 0$$

ולכן סכומי הרימן השונים במקרה זה לא מתכנסים לאותו הגבול.

תרגיל 1.13. קבעו האם הפונקציה המוגדרת לפי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

פתרון. הפונקציה לא אינטגרבילית, כי $\lim_{n\to 0^+} f(x) = \infty$, כלומר כי $f(x)$ אינה חסומה ב-$[0,1]$.

תרגיל 1.14. קבעו האם הפונקציה המוגדרת לפי

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[-1,1]$.

פתרון. הפונקציה כן אינטגרבילית, כי $|f(x)| \leq 1$ לכל $x \in [-1,1]$. כלומר $f(x)$ חסומה בקטע ויש לה נקודת אי רציפות אחת ב-$x = 0$.

תרגיל 1.15. הוכיחו או הפריכו: אם פונקציה $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

פתרון. נפריך בעזרת הדוגמה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = 2\chi_{\mathbb{Q}}(x) - 1$$

ברור כי $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$, כי היא קבועה שם. לעומת זאת הפונקציה f לא אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ מנימוקים דומים לכך שפונקצית דיריכלה לא אינטגרבילית. ביתר פירוט, אם בחלוקה הבחירה $\{\alpha_i\}$ נבחר רק נקודות רציונליות נקבל שסכום רימן חיובי 1, ואם נבחר רק נקודות אי־רציונליות נקבל שסכום רימן שלילי -1.

תרגיל 1.16. השתמשו באינטגרל מסויים על מנת לחשב את הגבול

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot 1^2}{n^4}}+\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot 2^2}{n^4}}+\cdots+\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot n^2}{n^4}}\right)$$

פתרון. נחשב

$$\begin{aligned}L&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\sqrt{4-\frac{4\cdot 1^2}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{4\cdot 2^2}{n^2}}+\cdots+\sqrt{4-\frac{4\cdot n^2}{n^2}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4-\frac{4\cdot k^2}{n^2}}=\int_0^2\sqrt{4-x^2}=\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\pi\end{aligned}$$

כאשר בשלבים האחרונים השתמשנו בכך שאנו יודעים מהו השטח של רבע עיגול $x^2+y^2\leq 4$, ושחישבנו את האינטגרל בקטע $[0,2]$ עם חלוקה שווה $\Delta x=\frac{2}{n}$ ובחירה $\alpha_k=\frac{2k}{n}$ שהיא הקצה הימני של הקטע $\left[\frac{2(k-1)}{n},\frac{2k}{n}\right]$.

תרגיל 1.17. תהיינה f ו-g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכיחו כי גם הפונקציה $f+g$ אינטגרבילית שם ומתקיים

$$\int_a^b(f+g)\,dx=\int_a^b fdx+\int_a^b gdx$$

הוכחה. תהי $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה כלשהי של הקטע $[a,b]$. נחשב

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}(f+g)(\alpha_k)\Delta x_k&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\alpha_k)\Delta x_k+g(\alpha_k)\Delta x_k\right)\\&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}g(\alpha_k)\Delta x_k\right)\\&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\Delta x_k+\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}g(\alpha_k)\Delta x_k\\&=\int_a^b fdx+\int_a^b gdx\end{aligned}$$

והשיוויון האחרון מתקיים כי הגבולות קיימים, שהרי לפי הנתון f ו-g פונקציות אינטגרביליות,

ולכן $f+g$ אינטגרבילית, כדרוש. $\square$

2 סכומי רימן, סכומי דרבו והמשפט היסודי

משפט 2.1 (תנאי רימן לאינטגרביליות). הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $f(x)$ חסומה בקטע $[a,b]$.
2. נסמן $I_k=[x_{k-1},x_k]$ עבור $1\leq k\leq n$. מתקיים

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{x\in I_k}f(x)-\inf_{x\in I_k}f(x)\right)\Delta x_k=0$$

תזכורת כמה משפחות של פונקציות אינטגרביליות:

- פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$.
- פונקציות מונוטוניות בקטע $[a,b]$.
- פונקציות חסומות ובעלות מספר סופי של נקודות אי־רציפות בקטע $[a,b]$.
- פונקציות חסומות ובעלות קבוצה בת מנייה של נקודות אי־רציפות בקטע $[a,b]$.

שאלה 2.2 (ממבחן תשע"ד). הוכיחו כי אם f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$, אזי גם הפונקציה $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$. רמז: ניתן להשתמש בעובדה הנובעת מאי שיוויון המשולש:

$$\sup_{x\in I}|f(x)|-\inf_{x\in I}|f(x)|\leq\sup_{x\in I}f(x)-\inf_{x\in I}f(x)$$

(הערות: השאלה נכונה גם באופן כללי עבור $[a,b]$. כמו כן אפשר להסיק כי לא רק ש-$|f|$ אינטגרבילית אלא גם שמתקיים $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|\,dx$. "הצד השני" של אי שיוויון המשולש באופן כללי הוא $||x|-|y||\leq|x-y|$.)

פתרון. נוכיח כי $|f|$ מקיימת את שני התנאים של תנאי רימן לאינטגרביליות.

ראשית, נתון כי f אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ ולכן חסומה שם. כלומר קיים קבוע $M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|f| \leq M$, ולכן גם $|f|$ חסומה בקטע $[0,1]$. שנית, אם T חלוקה כלשהי של הקטע $[0,1]$, לפי הרמז נשים לב כי

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_k} |f(x)| - \inf_{x \in I_k} |f(x)| \right) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \right) \Delta x_k \xrightarrow{\lambda(T) \to 0} 0$$

הסכום הימני שואף לאפס לפי הנתון ש-f אינטגרבילית, ולכן מתקיים

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_k} |f(x)| - \inf_{x \in I_k} |f(x)| \right) \Delta x_k = 0$$

שהוא התנאי השני הדרוש. לכן $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

2.1 אינטגראבליות לפי דארבו

הגדרה 2.3. תהא $f(x)$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ ותהא $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ חלוקה של הקטע. נסמן $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$ וכן $m_i = \inf_{x \in I_k} f(x)$.

הסכום $\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ נקרא הסכום התחתון של דרבו (Darboux).

הסכום $\bar{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ נקרא הסכום העליון של דרבו.

שימו לב כי סכומי דרבו העליון והתחתון כבר לא תלויים בבחירת $\{\alpha_k\}$ כמו בסכום רימן.

הגדרה 2.4. תהא T חלוקה של הקטע $[a,b]$. נקרא לחלוקה T' של הקטע $[a,b]$ העדנה של T (או עידון של T) אם היא מכילה את כל נקודות החלוקה של T, ואולי עוד נקודות.

משפט 2.5 (תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו). תהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ותהי $\{T_n\}$ סדרה של חלוקות של $[a,b]$ כך שלכל $1 \leq k \leq n$ החלוקה T_k היא העדנה של החלוקה T_{k-1}. אזי

$$\underline{S}(T_0) \leq \underline{S}(T_1) \leq \cdots \leq \underline{S}(T_n) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \bar{S}(T_n) \leq \bar{S}(T_{n-1}) \leq \ldots \bar{S}(T_0)$$

כלומר סדרת סכומי דרבו התחתונים היא מונוטונית עולה, וסדרת סכומי דרבו העליונים היא מונוטונית יורדת, ושתיהן מתכנסות לאינטגרל המסוים של $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

(גרסה קצרה יותר של משפט זה: תהא T חלוקה של הקטע $[a,b]$, ותהא T' העדנה שלה. אז מתקיים $\bar{S}(T) \geq \bar{S}(T')$ וגם $\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T')$.)

משפט 2.6. פונקציה $f(x)$ היא אינטגראבילית בקטע $[a,b]$ אם (ורק אם) לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $\left|\bar{S}(T) - \underline{S}(T)\right| < \varepsilon$.

תרגיל 2.7. הוכיחו כי

$$\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2} \leq \pi \leq 1+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}$$

הוכחה. נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ בקטע $[0,1]$. זו פונקציה רציפה בקטע הנ"ל, ולכן אינטגרבילית בו. נבחר חלוקה $T : 0 < 0.25 < 0.5 < 0.75 < 1$. בחלוקה זו $\Delta x = \frac{1}{4}$ לכל I_k.

$f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,1]$ ולכן סכום דרבו התחתון הוא

$$\underline{S}(T) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}+\sqrt{1-1^2}\right)$$

כי הערך המינימלי של הפונקציה בכל תת־קטע מתקבל בקצה הימני שלו. באופן דומה, סכום דרבו העליון הוא

$$\bar{S}(T) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0^2}+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right)$$

כי הערך המקסימלי של הפונקציה בכל תת־קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו. כמו כן ידוע לנו כי השטח של רבע מעגל היחידה הוא $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. לפי תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו מתקיים

$$\underline{S}(T) \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \leq \bar{S}(T)$$

ולכן

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right) \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right)$$

ונכפול ב-4 כדי לקבל את אי השיוויון המבוקש. $\square$

תרגיל 2.8 (ממבחן תשע"ג)**.** תהא $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה ממש בקטע $[0,1]$.
סדרו את הערכים הבאים מהקטן ביותר לגדול ביותר:

1. $f(0)$
2. $f(1)$
3. $\frac{1}{3}\big(f(0)+f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})\big)$
4. $\frac{1}{3}\big(f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+f(1)\big)$
5. $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300})$
6. $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$
7. $\int_0^1 f(x)dx$

פתרון. נגדיר שלוש חלוקות $T_0 : 0 < 1$, העידון שלה $T_1 : 0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ והעידון שלה $T_2 = 0 < \frac{1}{300} < \frac{2}{300} < \cdots < \frac{299}{300} < 1$. אזי מתקיים

$$\underline{S}(T_0) \le \underline{S}(T_1) \le \underline{S}(T_2) \le \int_0^1 f(x)dx \le \bar{S}(T_2) \le \bar{S}(T_1) \le \bar{S}(T_0)$$

וכיוון ש-f מונוטונית מתקיים:

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(T_0) &= f(0) \\
\bar{S}(T_0) &= f(1) \\
\underline{S}(T_1) &= \frac{1}{3}\big(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})\big) \\
\bar{S}(T_1) &= \frac{1}{3}\big(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(1)\big) \\
\underline{S}(T_2) &= \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300}) \\
\bar{S}(T_2) &= \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})
\end{aligned}
$$

הגדרה 2.9. פונקציה $F(x)$ תקרא פונקציה קדומה (antiderivative) של פונקציה $f(x)$ בקבוצה A אם מתקיים לכל $x \in A$ כי $F'(x) = f(x)$.

משפט 2.10. תהא $f(x)$ פונקציה. אם $F(x), G(x)$ שתי פונקציות קדומות שלה בקבוצה A, אזי מתקיים שם $F(x) = G(x) + c$ עבור c קבוע.

משפט 2.11 (המשפט היסודי של החדו"א, נוסחת ניוטון-לייבניץ)**.** אם $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, ו-$F(x)$ פונקציה קדומה של f בקטע $[a, b]$, אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(הערה: בגלל המשפט לעיל לא משנה באיזו פונקציה קדומה בוחרים. יש גרסה גם עבור f אינטגרבילית.)

רשימה (לא ממצה) של פונקציות קדומות:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \;\; n \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x dx = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int e^x dx = e^x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos x} \tan x dx = \frac{1}{\cos x} + c$$
$$\int \frac{1}{\sin x} \tan x dx = -\frac{1}{\sin x} + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

הערה 2.12. אם $F'(x) = f(x)$, אזי ניתן לחשב בקלות את ההסטה הלינארית $f(ax+b)$, כי מתקיים $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = f(ax+b)$. כלומר אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, אזי $\frac{1}{a}F(ax+b)$ היא פונקציה קדומה של $f(ax+b)$.

תרגיל 2.13. השתמשו באינטגרל המסוים על מנת לחשב את הגבול

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

פתרון. נחשב כי

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית בו. לכן

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$
$$= \arcsin \frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

משפט 2.14. אם f ו-g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\geq g(x)$, אז $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

תרגיל 2.15 (ממבחן תשע"ג). הוכיחו כי אם $0<a<b$, אזי

$$\int_a^b \ln x dx \leq \frac{b^2-a^2}{2}$$

הוכחה. לכל $x\in[a,b]$ מתקיים כי $\ln x\leq x$. לכן לפי המשפט האחרון,

$$\int_a^b \ln x dx \leq \int_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

כדרוש. □

תרגיל 2.16 (ממבחן). הוכיחו כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leq 2e^2$.

פתרון. נשתמש במשפט לפיו אם $f\leq g$ בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ (אם קיימים).

נמצא מינימום ומקסימום של הפונקציה $f(x)=e^{x^2-x}$. הנגזרת היא $f'(x) = f(x)(2x-1)$ ולכן יש נקודה חשודה ב-$x=0.5$. הנגזרת השנייה היא $f''(x) =$

$f(x)(2x-1)^2+2f(x)$ ולכן ב-$x=0.5$ יש נקודת מינימום ($f''(0.5)>0$) שהערך בה הוא $f(0.5)=e^{-0.25}$.

נקודת המקסימום מתקבלת באחד הקצוות: $\max\{f(0),f(2)\}=f(2)=e^2$. לכן

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}}=\int_0^2 e^{-0.25}dx\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le\int_0^2 e^2dx=2e^2$$

3 שיטות אינטגרציה

3.1 שיטת ההצבה

לפי כלל השרשרת (נגזרת של הרכבת פונקציות) מתקיים

$$(F(g(x)))'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$$

ולכן

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int(F(g(x)))'dx=F(g(x))+c$$

1. השלמה לריבוע

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^2+x+1\frac{1}{4}}&=\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1\frac{1}{4}}=\left[t=x+\frac{1}{2}\Rightarrow dt=dx\right]\\&=\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan(t)+c=\arctan(x+\frac{1}{2})+c\end{aligned}$$

2.

$$\int xe^{x^2}dx=\left[t=x^2\Rightarrow dt=2xdx\right]=\int e^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}e+c=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

3.

$$\begin{aligned}\int\tan(x)dx&=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=[t=\cos(x)\Rightarrow dt=-\sin(x)dx]\\&=\int\frac{1}{t}(-dt)=-\ln|t|+c=-\ln|\cos(x)|+c\end{aligned}$$

.4

$$\int x^3(3x^2-1)^{17}dx = \left[t=3x^2-1 \Rightarrow dt=6xdx\right] = \int (\frac{t+1}{3})t^{17}\frac{dt}{6}$$
$$= \frac{1}{18}\int \left(t^{18}+t^{17}\right)dt = \frac{1}{18}\left(\frac{t^{19}}{19}+\frac{t^{18}}{18}\right)+c = ...$$

.5 עבור $a > 0$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx = \left[t=\frac{x}{a} \Rightarrow dt=\frac{1}{a}dx\right]$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}adt = \frac{a}{a}\arcsin(t)+c = \arcsin(\frac{x}{a})+c$$

.6

$$\int \sin^{42}(x)\cos(x)dx = [t=\sin(x) \Rightarrow dt=\cos(x)dx]$$
$$= \int t^{42}dt = \frac{t^{43}}{43}+c = \frac{\sin^{43}(x)}{43}+c$$

3.2 אינטגרציה בחלקים

מחוקי נגזרת של מכפלה מתקיים $(f\cdot g)' = f'g+g'f$ ולכן

$$\int g'(x)f(x)dx = \int [f(x)g(x)]'dx - \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$$
$$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$$

.1

$$\int x\ln(x)dx = [g'(x)=x, f(x)=\ln(x)]$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}+c$$

.2

$$\begin{aligned}\int x\arctan(x)dx &= [u'=x, v=\arctan(x)] = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}(x-\arctan(x)) + c\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}F(x) &= \int e^x\cos(x)dx = [g'(x)=\cos(x), f(x)=e^x] = e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)dx\\ &= [u'(x)=\sin(x), v(x)=e^x] = e^x\sin(x) - \Big(-e^x\cos(x) - \int -e^x\cos(x)dx\Big)\\ &= e^x(\sin(x)+\cos(x)) - F(x)\end{aligned}$$

ומכאן נקבל $2F(x) = e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)$ ולכן

$$F(x) = \frac{e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)}{2}$$

4. נחשב באופן רקורסיבי את $I_m(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^m}dx$. תחילה

$$\begin{aligned}I_m(x) &= \int 1\cdot\frac{1}{(1+x^2)^m}dx = \left[g'=1, f=\frac{1}{(1+x^2)^m}\right]\\ &= x\frac{1}{(1+x^2)^m} - \int \frac{-x(2mx)}{(1+x^2)^{m+1}}dx\\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{m+1}}dx = \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m(I_m - I_{m+1})\end{aligned}$$

ולכן $I_{m+1} = \frac{x}{2m(1+x^2)^m} + \frac{(2m-1)}{2m}I_m$ עם תנאי התחלה $I_1 = \int\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)+c$.

דוגמה 3.1. לעיתים נדרש ליותר משיטת אינטגרציה אחת. למשל:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\left[t=\sqrt{x}\Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right]=\int 2te^{t}dt=\left[g'=e^{t},f=2t\right]$$
$$=2te^{t}-\int 2e^{t}dt=2te^{t}-2e^{t}+c=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+c$$

3.3 מבוא לאינטגרציה של פונקציות רציונליות

הגדרה 3.2. פונקציה (ממשית) $R(x)$ תקרא רציונלית אם היא מהצורה $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ כאשר $Q(x),P(x)$ הם פולינומים.

תרגיל 3.3. חשבו את $I=\int\frac{x}{x^{2}-4x+8}dx$.

פתרון. בדרך כלל, אם מעלת המונה היא n ומעלת המכנה היא $n+1$, ננסה לבדוק שימוש ב-ln. הרי $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c$. במקרה שלנו $f(x)=x^{2}-4x+8$ וכן $f'(x)=2x-4$. ננסה "להתאים" את המונה:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4+4}{x^{2}-4x+8}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^{2}-4x+8}dx+\int\frac{2}{x^{2}-4x+8}dx$$

כאשר במכנה יש פולינום אי־פריק ממעלה 2 נכון ל-arctan:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|x^{2}-4x+8\right|+2\int\frac{dx}{(x-2)^{2}+4}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^{2}-4x+8\right|+\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$$

כאשר במכנה יש פולינום פריק (וידוע לנו הפירוק) ניתן להשתמש בשיטה של "פירוק לשברים" על מנת להוריד את דרגת המכנה. למשל נחפש A,B כך שמתקיים $\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}$. בהמשך נראה כיצד למצוא פונקציה קדומה של כל פונקציה רציונלית.

דוגמה 3.4. נחשב $I=\int\frac{dx}{x^{2}-4}$. קל לראות כי המכנה פריק ונחפש A,B כך ש-

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{(A+B)x+2A-2B}{(x-2)(x+2)}$$

ובעזרת השוואת מקדמים נקבל כי $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$. לכן

$$I = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2|\right) + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

3.4 הצבות טריגונומטריות

1. במקרה של פונקציה עם $\sin(x)$, $\cos(x)$ שאחד מהם בחזקה אי־זוגית נבצע הצבה $t = \sin(x)$ או $t = \cos(x)$:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{2-\cos^2(x)}}dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)dx]$$
$$= \int \frac{-dt}{\sqrt{2-t^2}} = -\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c = -\arcsin\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}\right) + c$$

2. אם שניהם מופיעים עם חזקות זוגיות, ניתן לפעמים לפשט את הביטוי בעזרת זהויות טריגונומטריות:

$$\int \sin^2(x)\cos^4(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos(2x))(1+2\cos(2x)+\cos^2(x))dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos(2x)+\cos^2(x)-2\cos^3(2x)-\cos^2(x)\cos(2x)\right)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int\left(1+\cos(2x)+\frac{1+\cos(2x)}{2} - 2\cos(2x)[\frac{1+\cos(4x)}{2}] - \frac{1+\cos(2x)}{2}\cos(2x)\right)dx$$

ואפשר להמשיך לבד לפי הנוסחה $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A+B)+\cos(A-B)\right)$.

3. שימוש בזהות $\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$. נניח $a>0$:

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{a^2-x^2}dx &= [x=a\sin(t)\Rightarrow dx=a\cos(t)dt]\\
&= \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2(t)}a\cos(t)dt=a^2\int\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt\underset{*}{=}\\
&= a^2\int\cos^2(t)dt=a^2\int\frac{1}{2}(\cos(2t)+1)dt=\frac{a^2}{2}(\frac{\sin(2t)}{2}+t)+c\\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin(2\arcsin(\frac{x}{a}))}{2}+\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)+c
\end{aligned}$$

$*$: הנחנו כי $\cos(t)\geq 0$ כי $t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. אפשר לפשט את הביטוי האחרון אם משתמשים בזהות $\sin(2x)=2\cos(x)\sin(x)$.

4. טיפול בפונקציות רציונליות עם שורשיםיכול להעשות בעזרת פונקציות טריגונומטריות:

- אם מופיע הביטוי $\sqrt{a^2-x^2}$ נציב $x=a\cos(t)$ או $x=a\sin(t)$.
- אם מופיע הביטוי $\sqrt{x^2-a^2}$ נציב $x=\frac{a}{\cos(t)}$ או $x=\frac{a}{\sin(t)}$.
- אם מופיע הביטוי $\sqrt{a^2+x^2}$ נציב $x=a\tan(t)$.

דוגמה 3.5. נחשב

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\left[x=\frac{1}{\cos(t)},dx=\frac{\sin(t)dt}{\cos^2(t)}\right]=\int\frac{\frac{\sin(t)dt}{\cos^2(t)}}{\frac{1}{\cos^2(t)}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}-1}}$$

$$=\int\frac{\sin(t)dt}{\sqrt{\frac{1-\cos^2(t)}{\cos^2(t)}}}=\int\frac{\sin(t)dt}{\sqrt{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}}\underset{*}{=}\int\sqrt{\cos^2(t)}dt\underset{**}{=}\int\cos(t)dt$$

$$=\sin(t)+c=\sqrt{1-\cos^2(t)}+c\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+c=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c$$

$*$: הנחנו ש-$\sin(t)\geq 0$ כי $t=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\in[0,\pi]$.

$**$: הנחנו ש-$\cos(t)>0$. אם היינו מניחים ש-$\cos(t)<0$ היינו מקבלים

$$-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+c=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}+c=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש-$\sqrt{x^2}=-x$ כי $x=\frac{1}{\cos(t)}<0$.

3.5 המשך אינטגראציה של פונקציות רציונליות

עובדה 3.6. יש אלגוריתם לחישוב פונקציה קדומה כל פונקציה רציונלית.

אלגוריתם 3.7. תהא $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ פונקציה רציונלית במשתנה אחד. חישוב $\int R(x)dx$:

1. בעזרת חילוק פולינומים ניתן להניח כי $\deg(Q)<\deg(P)$.
2. את הפולינום הממשי $P(x)$ ניתן להציג כמכפלה של גורמים אי־פריקים מהצורה x^2+bx+c ו- $x-\alpha$.
3. אם נסמן

$$P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{m}(x^2+b_jx+c_j)^{l_j}$$

אז ניתן להציג את $R(x)$ בצורה

$$R(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k_i'=1}^{k_i}\frac{A_{i,k_i'}}{(x-\alpha_i)^{k_i'}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l_j'=1}^{l_j}\frac{B_{j,l_j'}x+C_{j,l_j'}}{(x^2+b_jx+c_j)^{l_j}}$$

4. בצורה זאת אנו מגיעים לשברים יסודיים שהאינטגראל שלהם ידוע.

רשימת שברים יסודיים:

1. $\int\frac{1}{x+\alpha}dx=\ln|x+\alpha|$.
2. $\int\frac{1}{(x+\alpha)^k}dx=\frac{1}{(1-k)(x+\alpha)^{k-1}}$ עבור $k>1$.
3. $\int\frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx=\ln|x^2+bx+c|$ עבור $b^2-4c<0$.
4. $\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}dx=\frac{1}{(1-k)(x^2+bx+c)^{k-1}}$ עבור $b^2-4c<0,\ k>1$.

5. $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^m}dx = \frac{1}{a^{2m}}\int \frac{1}{(1+(\frac{x}{a})^2)^m}dx = \frac{1}{a^{2m}}\int \frac{1}{(1+(t)^2)^m}adt = \frac{1}{a^{2m-1}}I_m(t) = \frac{1}{a^{2m-1}}I_m(\frac{x}{a})$ עבור I_m שכבר פתרנו.

6. $\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^m}dx = \int \frac{1}{((x+\frac{b}{2})^2+(-\frac{b}{4}+c))^m}dx$ ע"י החלפת משתנים מגיעים לצורה שכבר פתרנו.

תרגיל 3.8. חשבו את $I = \int \frac{x^4}{1-x^3}dx$.

פתרון. נפתור לפי האלגוריתם. נשים לב כי $I = \int \left(-x + \frac{x}{1-x^3}\right)dx$ ונמשיך עם החלק השני. נפרק את המכנה:

$$\int \frac{x}{1-x^3}dx = \int \frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)}dx$$

ונציג את האינטגרנד לפי האמור בסעיף השלישי של האלגוריתם:

$$\frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{Bx+C}{(1+x+x^2)}$$

נמצא "מחדש" את המכנה המשותף ונקבל: $x = A(1+x+x^2) + (Bx+c)(1-x)$.
בשיטה ישירה, אפשר לפתוח את הסוגריים, להשוות מקדמים ולמצוא את A, B.

בשיטה אחרת אפשר להציב ערכים בפולינום, שהרי כיוון שהשיוויון נכון לפולינום, הוא גם נכון עבור הצבות בפולינום (פולינום מדרגה n אפשר למצוא בעזרת $n+1$ הצבות). נציב $x=1$ ונקבל $1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$. נציב $x = 0$ ונקבל $0 = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$. לבסוף נציב $x = 2$ ונקבל $2 = \frac{7}{3} - (2B - \frac{1}{3}) \Rightarrow B = \frac{1}{3}$.

נמשיך לחשב:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-x}dx + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+x+1}dx \\ &= -\frac{1}{3}\ln|1-x| + \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2+x+1}dx \\ &= -\frac{1}{3}\ln|1-x| + \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}dx\end{aligned}$$

צעד סיום הוא

$$\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}dx = \left[t = x+\frac{1}{2}\right] = \int \frac{1}{t^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(\sqrt{\frac{4}{3}}t)^2+1}dt$$
$$= \left[u = \sqrt{\frac{4}{3}}t\right] = \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan u + c$$

בסך הכל קיבלנו כי

$$I = -\frac{x^2}{2} + -\frac{1}{3}\ln|1-x| + \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

תרגיל 3.9. חשבו את $I = \int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$.

פתרון. נפתור לפי האלגוריתם. תחילה נחלק:

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{l}{x} & \\ \hline x^4-x^3-x-1 & x^3-x^2 \quad = x(x^3-x^2) - \frac{x+1}{x^3-x^2} \\ \underline{x^4-x^3} & \\ \qquad -x-1 & \end{array}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned} I &= \int\left(x - \frac{x+1}{x^3-x^2}\right)dx = \int xdx - \int \frac{-2x(x-1)-(x-1)+2x^2}{x^2(x-1)}dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{A_{1,1}}{x}dx + \int\frac{A_{1,2}}{x^2}dx + \int\frac{A_{2,1}}{x-1}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \int\frac{2}{x}dx + \int\frac{1}{x^2}dx - \int\frac{2}{x-1}dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + c \end{aligned}$$

תרגיל 3.10. חשבו את $I = \int \frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2}dx$.

פתרון. נרצה להציג

$$\frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+2)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}$$

נכפיל במכנה משותף:

$$27 = A_1(x+1)(x^2+2)^2+A_2(x^2+2)^2+(B_1x+C_1)(x^2+2)(x+1)^2+(B_2x+C_2)(x+1)^2$$

נציב $x=-1$ ונקבל $27=9A_2$, כלומר $A_2=3$. נשווה מקדמים:

	R	L
x^0	27	$4A_1+4A_2+2C_1+C_2$
x^1	0	
x^2	0	
x^3	0	
x^3	0	
x^4	0	$A_1+A_2+C_1+2B_1$
x^5	0	A_1+B_1

נוסיף עוד משוואות ע"י הצבה. אם $x=1$, אז

$$27 = 18A_1+9A_2+12B_1+12C_1+4B_2+4C_2$$

ואם $x=-2$, אז

$$27 = -36A_1+36A_2+-12B_1+6C_1-2B_2+C_2$$

לבסוף נקבל מערכת משוואות

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 4 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -36 & -12 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -81 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נפתור אותה:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 18 & 12 & 4 & 12 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 15 \\ -36 & -12 & -2 & 6 & 1 & -81 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -6 & 4 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 24 & -2 & 6 & 1 & -81 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 4 & 18 & 4 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -18 & 6 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

ולכן קיבלנו כי $A_1 = 4, B_1 = -4, B_2 = -6, C_1 = 1, C_2 = -3$. נחזור:

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{4}{(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{-4x+1}{(x^2+2)} + \frac{-6x+-3}{(x^2+2)^2} \right) dx \\
&= 4\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} + -2\int \frac{2x}{x^2+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2}dx - 3\int \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx - 3\int \frac{1}{(x^2+2)^2} \\
&= 4\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} + -2\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}I_1(\frac{x}{\sqrt{2}}) + 3\frac{1}{x^2+2} + -3\frac{1}{2^{3/2}}I_2(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c
\end{aligned}$$

ולפי נוסחאת הרקורסיה מרשימת האינטגרלים היסודיים $I_1(\frac{x}{\sqrt{2}}) = \arctan(\frac{x}{\sqrt{2}})$ וכן $I_2(\frac{x}{\sqrt{2}}) = \frac{x}{2(1+\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2}I_1(\frac{x}{\sqrt{2}})$. לסיכום

$$\begin{aligned}
I = 4\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} + -2\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \ldots \\
3\frac{1}{x^2+2} + -3\frac{1}{2^{3/2}}\frac{x}{2(1+\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c
\end{aligned}$$

3.6 הצבה אוניברסלית

ההצבה האוניברסלית היא $t = \tan(\frac{x}{2})$ והיא מאפשרת להביע את $\sin(x)$ ו-$\cos(x)$ כפונקציה רציונלית של t ולחשב פונקציות קדומות עבור פונקציות רציונליות של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{\frac{1}{2}\cos^2(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}dx = \frac{1}{2}(1+t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\
\cos(x) &= \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
\sin(x) &= 2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2}) = \frac{2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

היכן ש-t מוגדר, כלומר $x \neq \pi + 2\pi n$ עבור $n \in \mathbb{Z}$. לדוגמה:

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t}$$
$$= \ln|1+t| + c = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

3.7 הצבת אוילר (לטיפול בשורשים)

שיטה אחרת לטיפול בשורשים היא הצבת אוילר, שבה ההצבה שונה אם הפולינום פריק או לא. שיטה זו טובה למציאת $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

טענה 3.11. נניח כי פולינום (ממעלה 2) פריק מעל הממשיים והוא מן הצורה $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. הצבת אוילר במקרה זה היא $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ ואז

$$\begin{aligned} a(x-\alpha)(x-\beta) &= ax^2+bx+c = t^2(x-\alpha)^2 \\ a(x-\beta) &= t^2(x-\alpha) \\ x(a-t^2) &= a\beta - \alpha t^2 \end{aligned}$$

נקבל $x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$ ונשים לב כי השורש נעלם.

דוגמה 3.12. נחשב את $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$. הפולינום בשורש פריק ולכן נציב $\sqrt{x^2+3x-4} = t(x+4)$. מכאן

$$\begin{aligned} (x+4)(x-1) &= x^2+3x-4 = t^2(x+4)^2 \\ x-1 &= t^2(x+4) \\ x(1-t^2) &= 1+4t^2 \end{aligned}$$

ולכן

$$x = \frac{1+4t^2}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{8t(1-t^2)+2t(1+4t^2)}{(1-t^2)^2}dt = \frac{10t}{(1-t^2)^2}dt$$

ונחשב

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}&=\int\frac{1}{t(\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4)}\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt=\int\frac{1}{t(\frac{5}{1-t^2})}\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt\\&=\int\frac{1}{5t}\frac{10t}{(1-t^2)}dt=2\int\frac{1}{1-t^2}dt=2\int\frac{1}{(1-t)(1+t)}dt\\&=2\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=\ln|1+t|-\ln|1-t|+c=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c\\&=\left[t=\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}\right]=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+c\end{aligned}$$

טענה 3.13. אם הפולינום ax^2+bx+c אי־פריק, ישנן שתי אפשרויות:

- אם $a>0$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$ ונקבל $x=\frac{c-t^2}{\pm2t\sqrt{a}-b}$.
- אם $c>0$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$ ונקבל $x=\frac{\pm2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$.

כאשר לא משנה בחירת הסימן $\pm$ בהצבה.

דוגמה 3.14. נחשב את $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-7x+6}}$. ניעזר בהצבת אוילר: $\sqrt{x^2-7x+6}=x+t$. נחלץ את x ונקבל

$$\begin{aligned}x=\frac{6-t^2}{2t+7}&\Rightarrow\sqrt{x^2-7x+6}=\frac{6-t^2}{2t+7}+t=\frac{6+7t+t^2}{2t+7}\\dx&=\frac{-2t(2t+7)-2(6-t^2)}{(2t+7)^2}dt=\frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2}dt\end{aligned}$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\frac{6-t^2}{2t+7}\cdot\frac{6+7t+t^2}{2t+7}}\frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2}dt = \int \frac{-2}{6-t^2}dt \\
&= -\frac{2}{6}\int \frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)^2}dt = \left[u = \frac{t}{\sqrt{6}}\right] = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\sqrt{6}du \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{1+\frac{t}{\sqrt{6}}}{1-\frac{t}{\sqrt{6}}}\right| + c \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t}\right| + c = -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{x^2-7x+6}-x}{\sqrt{6}-\sqrt{x^2-7x+6}+x}\right| + c
\end{aligned}
$$

הערה 3.15. אם $a, c < 0$ אז על ידי החלפת משתנים

$$
\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-\left(-ax^2-bx-c\right)} = \sqrt{-\left[\left(\sqrt{-a}x - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{-4a} - c\right)\right]}
$$

כיוון ש-$b^2 - 4ac < 0$ נקבל כי $\frac{b^2}{-4a} + c < 0$. כלומר הביטוי $\left(-\frac{b^2}{-4a} - c\right)$ חיובי ולכן $\left(\sqrt{-a}x - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{-4a} - c\right)$ חיובי ולכן הביטוי תחת השורש שלילי, ואז השורש כלל לא מוגדר!

3.8 שיטת המכנה המשותף המינימלי

בהנתן ביטוי שבו מופיעים כמשתנים רק $x, \frac{ax+b}{cx+d}$ עם חזקות רציונליות, נסמן את החזקות של הביטויים ב-$\frac{m_i}{n_i}$ ונציב $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ כאשר $n = \text{lcm}\{n_i\}$ (הכפולה המשותפת המינמלית של המכנים).

דוגמה 3.16. נחשב את $\int \frac{x+(x+4)^{1/2}}{(x+4)+(x+4)^{2/3}}dx$. נציב

$$
t^6 = \frac{x+4}{0x+1} = x+4 \Rightarrow 6t^5dt = dx
$$

כי $6 = \mathrm{lcm}\{1,2,3\}$. אז

$$\begin{aligned}\int \frac{x+(x+4)^{1/2}}{(x+4)+(x+4)^{2/3}}dx &= \int \frac{t^6-4+t^3}{t^6+t^4}6t^5dt = 6\int \frac{t(t^6+t^3-4)}{t^2+1}dt \\ &= 6\int\left(t^5-t^3+t^2+t-1-\frac{5t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= 6\left(\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t-\frac{5}{2}\ln|t^2+1|+\arctan(t)\right)+c\end{aligned}$$

(נעזרו בחילוק ארוך של פולינומים) ונשארת רק ההצבה חזרה ל-x.

3.9 פונקציות היפורבוליות

הגדרה 3.17. נגדיר את הסינוס ההיפרבולי והקוסינוס ההיפרבולי

$$\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

שמקיימות זהויות דומות מאוד לאלו של פונקציות טריגונומטריות:

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$
- $\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$
- $\sinh'(x) = \cosh(x)$
- $\cosh'(x) = \sinh(x)$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

דוגמה 3.18. חשבו את $I = \int x^2\sqrt{4+x^2}dx$.

פתרון. בעזרת הצבה נחשב

$$
\begin{aligned}
I &= [x = 2\sinh(t), dx = 2\cosh(t)dt] = \\
&= 2^2 \int \sinh^2(t)\sqrt{4(1+\sinh^2(t))}2\cosh(t)dt \\
&= 2^4 \int \sinh^2(t)\cosh^2(t)dt = 2^2 \int (2\sinh(t)\cosh(t))^2 dt \\
&= 4\int \sinh^2(2t)dt = 4\int \frac{\cosh(4t)-1}{2}dt = 2\left(\frac{\sinh(4t)}{4} - t\right) + c \\
&= 2\left(\frac{\sinh\left(4\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{4} - \sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c
\end{aligned}
$$

4 תוספות

תרגיל 4.1. הוכיחו כי

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx < \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$$

עבור $R > 0$. רמז: הוכיחו כי $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

הוכחה. קודם נראה כי $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. נגדיר $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$. זו פונקציה רציפה בקטע הסגור $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ולכן מקבלת ערך מינימלי ומקסימלי בקטע.

נמצא את הערך המינימלי. נבדוק התאפסות הנגזרת $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} = 0$. לכן $x = \arccos\frac{2}{\pi}$ נקודה חשודה לקיצון בקטע הנ"ל. נחשב כי $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ וגם $f(\arccos\frac{2}{\pi}) \approx 0.21 > 0$. לכן הערך המינימלי של הפונקציה בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ הוא 0. לכן $f(x) > 0$ לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$, כלומר $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, כדרוש.

כעת נסמן $g(x) = e^{-R\sin x}$. הפונקציה $g(x)$ יורדת בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ והוכחנו כי $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ בקטע זה, לכן $e^{-R\sin x} < e^{-R\frac{2}{\pi}x}$ בקטע זה ונקבל

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}x}dx = -\frac{\pi}{2R}e^{-R\frac{2}{\pi}x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$$

כדרוש. $\square$

משפט 4.2. מתקיים $\bar{S}(T) = \sup\{\sigma_T | \sigma_T \text{ is a Riemann sum}\}$
וגם $\underline{S}(T) = \inf\{\sigma_T | \sigma_T \text{ is a Riemann sum}\}$.

הגדרה 4.3. האינטגראל העליון של דארבו מוגדר להיות $\bar{I} := \inf\limits_T \{\bar{S}(T)\}$. באופן דומה, האינטגראל התחתון של דארבו מוגדר להיות $\underline{I} := \sup\limits_T \{\underline{S}(T)\}$.

משפט 4.4. תהא $f(x)$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$. אזי f אינטגראבילית רימן
$\Leftrightarrow$ $\bar{I} = \underline{I}$ (ואז הם שווים לערך $\int_a^b f(x)dx$).
$\Leftrightarrow$לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $|\bar{S}(T) - \underline{S}(T)| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow$לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ (כאשר $\omega_i = \sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f$ היא התנודה של f בקטע $[x_{i-1}, x_i]$).

משפט 4.5 (משפט הערך הממוצע האינטגראלי). תהיינה $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ ו-$g(x)$ אינטגראבלית אי-שלילית שם. אזי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$

במקרה הפרטי שבו $g(x) = 1$ נקבל $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

הוכחה. אם $\int_a^b g(x)dx = 0$ אז השיוון טריוויאלי (כל נקודה c תקיים את השיוון).
אחרת- נסמן $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ וגם $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ אזי מתקיים

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

ואז $m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$. כיוון ש f רציפה, נקבל ממשפט ערך הביניים כי קיימת $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. $\square$

שאלה 4.6. הוכח כי $\frac{1}{2e}\ln(2) \le \int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan(x)dx \le \frac{1}{2}\ln(2)$.

פתרון. לפי משפט ערך הביניים קיימת $c \in [0, \pi/4]$
כך ש $e^{-c^2}\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx = \int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan(x)dx$
כיוון ש $e^{-1} \le e^{-\pi/4} \le e^{-c^2} \le e^0 = 1$
נקבל כי $e^{-1}\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx \le \int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan(x)dx \le \int_0^{\pi/4}\tan(x)dx$
נראה כי $\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx = \frac{1}{2}\ln(2)$
ראינו כי פונקציה קדומה של $\tan(x)$ היא $-\ln|\cos(x)|$ (ע"י הצבה $t = \cos(x)$)
ולכן $\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx = -\ln|\cos(\pi/4)| - (-\ln|\cos(0)|) = -\ln(2^{-0.5}) = 0.5\ln(2)$.

4.1 חישובי שטח, נפח גוף סיבוב ואורך עקומה

מקורות

[1] אתר הקורס, www.math-wiki.com.