מערך תרגיל קורס 89-133 סמסטר ב' תשע"ה
בחשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

מאי 2015, גרסה 0.8

מבוא

נתחיל עם כמה דגשים:

- דף הקורס נמצא באתר `www.math-wiki.com`.
- שאלות בנוגע לחומר הלימודי מומלץ לשאול בדף השיחה באתר של הקורס.
- נכון לעכשיו יש הגשת תרגילים, עם בדיקה חלקית.
- נשמח לכל הערה על מסמך זה.

1 אינטגרל מסוים לפי רימן

הגדרה 1.1. יהי $[a,b]$ קטע סגור. נקרא ל-$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה של הקטע $[a,b]$. נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ לכל $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

הגדרה 1.2. תהא f פונקציה מוגדרת בקטע $[a,b]$ ותהא $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה של הקטע. בכל קטע $[x_{i-1},x_i]$ נבחר נקודה α_i ונבנה את סכום רימן עבור החלוקה T, הפונקציה f והנקודות $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ לפי

$$\sigma_T(\alpha_1,\ldots a_n) := \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\Delta x_i$$

הגדרה 1.3. פרמטר החלוקה של T מוגדר להיות $\lambda(T) = \max(\Delta x_i)$. נאמר כי סדרה של חלוקות $\{T_n\}$ היא נורמלית אם $\lim_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$.

הגדרה 1.4. נאמר שקיים הגבול $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = I$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ המקיימת: לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה $\lambda(T) < \delta$ ולכל בחירה של $\{\alpha_i\}$ מתקיים $|\sigma_T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - I'| < \epsilon$.

נהוג לסמן גבול זה $\int_a^b f(x)dx$. הוא נקרא האינטגראל (המסוים) של רימן (Riemann). במקרה זה נאמר כי f אינטגרבלית רימן בקטע $[a, b]$. באופן לא פורמלי, מטרת האינטגרל היא לחשב את השטח שכלוא בין עקומה לציר ה-x.

משפט 1.5. פונקציה רציפה או מונוטונית בקטע $[a, b]$ אינטגראבלית שם.

משפט 1.6. אם פונקציה f חסומה בקטע $[a, b]$ ויש לה שם קבוצה סופית (או ליתר דיוק בת מניה) של נקודות אי רציפות, אזי f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

(להדגיש כי תנאי הכרחי לאינטגראביליות רימן היא חסימות הפונקציה.)

משפט 1.7. אם F פונקציה קדומה של פונקציה רציפה f בקטע $[a, b]$ אזי $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

תרגיל 1.8. חשבו את האינטגרל $\int_0^5 (5 - x)\, dx$.

פתרון. דרך אחת היא בעזרת "משולש" בגרף הפונקציה. הדרך הכללית היא לחשב עם חלוקה נורמלית את

$$\int_0^5 (5 - x)\, dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} (5 - \alpha_k)\, \Delta x_k$$

לפי המשפט הנ"ל, הפונקציה $f(x) = 5 - x$ אינטגרבילית בקטע $[0, 5]$, מפני שהיא רציפה שם. אפשר לבחור כל סדרה של חלוקות $\{T_n\}$. בפרט, נבחר חלוקה שווה

$$\Delta x = \frac{5 - 0}{n} = \frac{5}{n}$$

עם נקודת קצה ימנית $\alpha_k = 0 + k\cdot\frac{5}{n} = \frac{5k}{n}$, ונחשב:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(5-\frac{5k}{n}\right)\frac{5}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{25}{n}-\frac{25k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{25}{n}\cdot n - \frac{25}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(25-\frac{25}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) = 25-\frac{25}{2} = \frac{25}{2}\end{aligned}$$

תרגיל 1.9. חשבו את האינטגרל $\int_0^3\left(4-\frac{x^2}{4}\right)dx$.

פתרון. לפי המשפט הנ"ל, הפונקציה $f(x) = 4-\frac{x^2}{4}$ אינטגרבילית בקטע $[0,3]$ כי היא רציפה שם. נבחר חלוקה שווה של $[0,3]$:

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

עם נקודת קצה שמאלית $\alpha_k = 0+(k-1)\cdot\frac{3}{n} = \frac{3(k-1)}{n}$, ונחשב:

$$\begin{aligned}\int_0^3\left(4-\frac{x^2}{4}\right)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(4-\frac{1}{4}\left(\frac{3(k-1)}{n}\right)^2\right)\frac{3}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{12}{n}-\frac{27}{4n^3}(k-1)^2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n}\cdot n-\frac{27}{4n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n}\cdot n-\frac{27}{4n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{54}{4n^3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{27}{4n^3}\cdot n\right)\\ &= 12-\frac{27\cdot 2}{4\cdot 6} = 12-\frac{9}{4} = \frac{39}{4}\end{aligned}$$

הערה. נשים לב כי ניתן להוכיח באינדוקציה כי

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

הגדרה 1.10. תהא A קבוצה. הפונקציה המציינת (או הפונקציה האופיינית) $\chi_A : A\to$

$\{0,1\}$ של A מוגדרת לפי

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

דוגמה 1.11. הפונקציה $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) + 2x \cdot \chi_{(1,2]}(x)$ רציפה למקוטעין ב $[0,2]$ ולכן

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 1 \cdot dx + \int_1^2 2xdx$$
$$= 1 + x^2|_1^2 = 1 + [2^2 - 1^2] = 4$$

תרגיל 1.12. הוכיחו כי פונקצית דיריכלה (Dirichlet) בקטע $[0,1]$ המוגדרת לפי

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

אינה אינטגראבלית. (נעיר כי לפעמים הפונקציה מוגדרת הפוך, כפונקציה המציינת של $\mathbb{Q}$, אך אין זה משנה לתרגיל זה.)

פתרון. $D(x)$ אינה אינטגראבלית כי עבור $\epsilon = 0.5$ לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה הקטן מ-0.5 נוכל לבחור את $\{\alpha_i\}$ להיות מספרים אי־רציונליים ואז

$$\sigma_T(\alpha_1, \dots a_n) = \sum_{i=1}^n D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1\Delta x_i = 1 - 0 = 1$$

ביתר פירוט: נבחר חלוקה שווה של הקטע $[0,1]$ וברור כי $\Delta x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. בבחירה $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$ תמיד אפשר לבחור נקודה רציונלית או נקודה אי־רציונלית, ולכן סכום רימן יכול לקבל כל ערך בין 0 ל-1. למשל אם נחבר רק נקודות רציונליות נקבל כי

$$\sum_{i=1}^n D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0\Delta x_i = 0$$

ולכן סכומי הרימן השונים במקרה זה לא מתכנסים לאותו הגבול.

תרגיל 1.13. קבעו האם הפונקציה המוגדרת לפי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

פתרון. הפונקציה לא אינטגרבילית, כי $\lim_{n\to 0^+} f(x) = \infty$, כלומר כי $f(x)$ אינה חסומה ב-$[0,1]$.

תרגיל 1.14. קבעו האם הפונקציה המוגדרת לפי

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[-1,1]$.

פתרון. הפונקציה כן אינטגרבילית, כי $|f(x)| \leq 1$ לכל $x \in [-1,1]$. כלומר $f(x)$ חסומה בקטע ויש לה נקודת אי רציפות אחת ב-$x = 0$.

תרגיל 1.15. הוכיחו או הפריכו: אם פונקציה $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

פתרון. נפריך בעזרת הדוגמה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = 2\chi_{\mathbb{Q}}(x) - 1$$

ברור כי $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$, כי היא קבועה שם. לעומת זאת הפונקציה f לא אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ מנימוקים דומים לכך שפונקצית דיריכלה לא אינטגרבילית. ביתר פירוט, אם בחלוקה הבחירה $\{\alpha_i\}$ נבחר רק נקודות רציונליות נקבל שסכום רימן חיובי 1, ואם נבחר רק נקודות אי־רציונליות נקבל שסכום רימן שלילי -1.

תרגיל 1.16. השתמשו באינטגרל מסויים על מנת לחשב את הגבול

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot 1^2}{n^4}}+\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot 2^2}{n^4}}+\cdots+\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot n^2}{n^4}}\right)$$

פתרון. נחשב

$$\begin{aligned}L&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\sqrt{4-\frac{4\cdot 1^2}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{4\cdot 2^2}{n^2}}+\cdots+\sqrt{4-\frac{4\cdot n^2}{n^2}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4-\frac{4\cdot k^2}{n^2}}=\int_0^2\sqrt{4-x^2}=\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\pi\end{aligned}$$

כאשר בשלבים האחרונים השתמשנו בכך שאנו יודעים מהו השטח של רבע עיגול $x^2+y^2\leq 4$, ושחישבנו את האינטגרל בקטע $[0,2]$ עם חלוקה שווה $\Delta x=\frac{2}{n}$ ובחירה $\alpha_k=\frac{2k}{n}$ שהיא הקצה הימני של הקטע $\left[\frac{2(k-1)}{n},\frac{2k}{n}\right]$.

תרגיל 1.17. תהיינה f ו-g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכיחו כי גם הפונקציה $f+g$ אינטגרבילית שם ומתקיים

$$\int_a^b(f+g)\,dx=\int_a^b fdx+\int_a^b gdx$$

הוכחה. תהי $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה כלשהי של הקטע $[a,b]$. נחשב

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}(f+g)(\alpha_k)\Delta x_k&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\alpha_k)\Delta x_k+g(\alpha_k)\Delta x_k\right)\\&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}g(\alpha_k)\Delta x_k\right)\\&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\Delta x_k+\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}g(\alpha_k)\Delta x_k\\&=\int_a^b fdx+\int_a^b gdx\end{aligned}$$

והשיוויון האחרון מתקיים כי הגבולות קיימים, שהרי לפי הנתון f ו-g פונקציות אינטגרביליות,

ולכן $f+g$ אינטגרבילית, כדרוש. $\square$

2 סכומי רימן, סכומי דרבו והמשפט היסודי

משפט 2.1 (תנאי רימן לאינטגרביליות)**.** הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $f(x)$ חסומה בקטע $[a,b]$.
2. נסמן $I_k=[x_{k-1},x_k]$ עבור $1\le k\le n$. מתקיים

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{x\in I_k}f(x)-\inf_{x\in I_k}f(x)\right)\Delta x_k=0$$

תזכורת כמה משפחות של פונקציות אינטגרביליות:

- פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$.
- פונקציות מונוטוניות בקטע $[a,b]$.
- פונקציות חסומות ובעלות מספר סופי של נקודות אי־רציפות בקטע $[a,b]$.
- פונקציות חסומות ובעלות קבוצה בת מנייה של נקודות אי־רציפות בקטע $[a,b]$.

שאלה 2.2 (ממבחן תשע"ד)**.** הוכיחו כי אם f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$, אזי גם הפונקציה $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$. רמז: ניתן להשתמש בעובדה הנובעת מאי שיוויון המשולש:

$$\sup_{x\in I}|f(x)|-\inf_{x\in I}|f(x)|\le\sup_{x\in I}f(x)-\inf_{x\in I}f(x)$$

(הערות: השאלה נכונה גם באופן כללי עבור $[a,b]$. כמו כן אפשר להסיק כי לא רק ש-$|f|$ אינטגרבילית אלא גם שמתקיים $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$. "הצד השני" של אי שיוויון המשולש באופן כללי הוא $||x|-|y||\le|x-y|$.)

פתרון. נוכיח כי $|f|$ מקיימת את שני התנאים של תנאי רימן לאינטגרביליות.

ראשית, נתון כי f אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ ולכן חסומה שם. כלומר קיים קבוע $M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|f| \leq M$, ולכן גם $|f|$ חסומה בקטע $[0,1]$. שנית, אם T חלוקה כלשהי של הקטע $[0,1]$, לפי הרמז נשים לב כי

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_k} |f(x)| - \inf_{x \in I_k} |f(x)| \right) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \right) \Delta x_k \xrightarrow{\lambda(T) \to 0} 0$$

הסכום הימני שואף לאפס לפי הנתון ש-f אינטגרבילית, ולכן מתקיים

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_k} |f(x)| - \inf_{x \in I_k} |f(x)| \right) \Delta x_k = 0$$

שהוא התנאי השני הדרוש. לכן $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

2.1 אינטגראבליות לפי דארבו

הגדרה 2.3. תהא $f(x)$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ ותהא $T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ חלוקה של הקטע. נסמן $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$ וכן $m_i = \inf_{x \in I_k} f(x)$.

הסכום $\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ נקרא הסכום התחתון של דרבו (Darboux).

הסכום $\bar{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ נקרא הסכום העליון של דרבו.

שימו לב כי סכומי דרבו העליון והתחתון כבר לא תלויים בבחירת $\{\alpha_k\}$ כמו בסכום רימן.

הגדרה 2.4. תהא T חלוקה של הקטע $[a,b]$. נקרא לחלוקה T' של הקטע $[a,b]$ העדנה של T (או עידון של T) אם היא מכילה את כל נקודות החלוקה של T, ואולי עוד נקודות.

משפט 2.5 (תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו). תהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ותהי $\{T_n\}$ סדרה של חלוקות של $[a,b]$ כך שלכל $1 \leq k \leq n$ החלוקה T_k היא העדנה של החלוקה T_{k-1}. אזי

$$\underline{S}(T_0) \leq \underline{S}(T_1) \leq \cdots \leq \underline{S}(T_n) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \bar{S}(T_n) \leq \bar{S}(T_{n-1}) \leq \ldots \bar{S}(T_0)$$

כלומר סדרת סכומי דרבו התחתונים היא מונוטונית עולה, וסדרת סכומי דרבו העליונים היא מונוטונית יורדת, ושתיהן מתכנסות לאינטגרל המסוים של $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

(גרסה קצרה יותר של משפט זה: תהא T חלוקה של הקטע $[a,b]$, ותהא T' העדנה שלה. אז מתקיים $\bar{S}(T) \geq \bar{S}(T')$ וגם $\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T')$.)

משפט 2.6. פונקציה $f(x)$ היא אינטגראבילית בקטע $[a,b]$ אם (ורק אם) לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $\left|\bar{S}(T) - \underline{S}(T)\right| < \varepsilon$.

תרגיל 2.7. הוכיחו כי

$$\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2} \leq \pi \leq 1+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}$$

הוכחה. נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ בקטע $[0,1]$. זו פונקציה רציפה בקטע הנ"ל, ולכן אינטגרבילית בו. נבחר חלוקה $T: 0 < 0.25 < 0.5 < 0.75 < 1$. בחלוקה זו $\Delta x = \frac{1}{4}$ לכל I_k.

$f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,1]$ ולכן סכום דרבו התחתון הוא

$$\underline{S}(T) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}+\sqrt{1-1^2}\right)$$

כי הערך המינימלי של הפונקציה בכל תת־קטע מתקבל בקצה הימני שלו. באופן דומה, סכום דרבו העליון הוא

$$\bar{S}(T) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0^2}+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right)$$

כי הערך המקסימלי של הפונקציה בכל תת־קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו. כמו כן ידוע לנו כי השטח של רבע מעגל היחידה הוא $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. לפי תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו מתקיים

$$\underline{S}(T) \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \leq \bar{S}(T)$$

ולכן

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right) \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right)$$

ונכפול ב-4 כדי לקבל את אי השיוויון המבוקש. $\square$

תרגיל 2.8 (ממבחן תשע"ג)**.** תהא $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה ממש בקטע $[0,1]$.
סדרו את הערכים הבאים מהקטן ביותר לגדול ביותר:

1. $f(0)$
2. $f(1)$
3. $\frac{1}{3}\big(f(0)+f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})\big)$
4. $\frac{1}{3}\big(f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+f(1)\big)$
5. $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300})$
6. $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$
7. $\int_0^1 f(x)dx$

פתרון. נגדיר שלוש חלוקות $T_0 : 0 < 1$, העידון שלה $T_1 : 0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ והעידון שלה $T_2 = 0 < \frac{1}{300} < \frac{2}{300} < \cdots < \frac{299}{300} < 1$. אזי מתקיים

$$\underline{S}(T_0) \leq \underline{S}(T_1) \leq \underline{S}(T_2) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \bar{S}(T_2) \leq \bar{S}(T_1) \leq \bar{S}(T_0)$$

וכיוון ש-f מונוטונית מתקיים:

$$\underline{S}(T_0) = f(0)$$
$$\bar{S}(T_0) = f(1)$$
$$\underline{S}(T_1) = \frac{1}{3}\big(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})\big)$$
$$\bar{S}(T_1) = \frac{1}{3}\big(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(1)\big)$$
$$\underline{S}(T_2) = \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300})$$
$$\bar{S}(T_2) = \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$$

הגדרה 2.9. פונקציה $F(x)$ תקרא פונקציה קדומה (antiderivative) של פונקציה $f(x)$ בקבוצה A אם מתקיים לכל $x \in A$ כי $F'(x) = f(x)$.

משפט 2.10. תהא $f(x)$ פונקציה. אם $F(x), G(x)$ שתי פונקציות קדומות שלה בקבוצה A, אזי מתקיים שם $F(x) = G(x) + c$ עבור c קבוע.

משפט 2.11 (המשפט היסודי של החדו"א, נוסחת ניוטון-לייבניץ)**.** אם $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, ו-$F(x)$ פונקציה קדומה של f בקטע $[a, b]$, אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(הערה: בגלל המשפט לעיל לא משנה באיזו פונקציה קדומה בוחרים. יש גרסה גם עבור f אינטגרבילית.)

רשימה (לא ממצה) של פונקציות קדומות:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ \ n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} \tan x dx = \frac{1}{\cos x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \tan x dx = -\frac{1}{\sin x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

הערה 2.12. אם $F'(x) = f(x)$, אזי ניתן לחשב בקלות את ההסטה הלינארית $f(ax+b)$, כי מתקיים $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = f(ax+b)$. כלומר אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, אזי $\frac{1}{a}F(ax+b)$ היא פונקציה קדומה של $f(ax+b)$.

תרגיל 2.13. השתמשו באינטגרל המסוים על מנת לחשב את הגבול

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right)$$

פתרון. נחשב כי

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית בו. לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$
$$=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$$

משפט 2.14. אם f ו-g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\geq g(x)$, אז $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.

תרגיל 2.15 (ממבחן תשע"ג)**.** הוכיחו כי אם $0<a<b$, אזי

$$\int_a^b \ln x dx\leq\frac{b^2-a^2}{2}$$

הוכחה. לכל $x\in[a,b]$ מתקיים כי $\ln x\leq x$. לכן לפי המשפט האחרון,

$$\int_a^b \ln x dx\leq\int_a^b x dx=\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2}$$

כדרוש. □

תרגיל 2.16 (ממבחן)**.** הוכיחו כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\leq\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leq 2e^2$.

פתרון. נשתמש במשפט לפיו אם $f\leq g$ בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx$ (אם קיימים).

נמצא מינימום ומקסימום של הפונקציה $f(x)=e^{x^2-x}$. הנגזרת היא $f'(x)=f(x)(2x-1)$ ולכן יש נקודה חשודה ב-$x=0.5$. הנגזרת השנייה היא $f''(x)=$

$f(x)(2x-1)^2+2f(x)$ ולכן ב-$x=0.5$ יש נקודת מינימום ($f''(0.5)>0$) שהערך בה הוא $f(0.5)=e^{-0.25}$.
נקודת המקסימום מתקבלת באחד הקצוות: $\max\{f(0),f(2)\}=f(2)=e^2$. לכן

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}}=\int_0^2 e^{-0.25}dx\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le\int_0^2 e^2dx=2e^2$$

3 שיטות אינטגרציה

3.1 שיטת ההצבה

לפי כלל השרשרת (נגזרת של הרכבת פונקציות) מתקיים

$$(F(g(x)))'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$$

ולכן

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int(F(g(x)))'dx=F(g(x))+c$$

1. השלמה לריבוע

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1\frac{1}{4}}=\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1\frac{1}{4}}=\left[t=x+\frac{1}{2}\Rightarrow dt=dx\right]$$
$$=\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan(t)+c=\arctan(x+\frac{1}{2})+c$$

2.

$$\int xe^{x^2}dx=\left[t=x^2\Rightarrow dt=2xdx\right]=\int e^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}e+c=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

3.

$$\int\tan(x)dx=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=[t=\cos(x)\Rightarrow dt=-\sin(x)dx]$$
$$=\int\frac{1}{t}(-dt)=-\ln|t|+c=-\ln|\cos(x)|+c$$

.4

$$\int x^3(3x^2-1)^{17}dx = \left[t = 3x^2-1 \Rightarrow dt = 6xdx\right] = \int (\frac{t+1}{3})t^{17}\frac{dt}{6}$$
$$= \frac{1}{18}\int \left(t^{18}+t^{17}\right)dt = \frac{1}{18}\left(\frac{t^{19}}{19}+\frac{t^{18}}{18}\right)+c = ...$$

.5 עבור $a>0$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx = \left[t = \frac{x}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a}dx\right]$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}adt = \frac{a}{a}\arcsin(t)+c = \arcsin(\frac{x}{a})+c$$

.6

$$\int \sin^{42}(x)\cos(x)dx = [t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)dx]$$
$$= \int t^{42}dt = \frac{t^{43}}{43}+c = \frac{\sin^{43}(x)}{43}+c$$

3.2 אינטגרציה בחלקים

מחוקי נגזרת של מכפלה מתקיים $(f\cdot g)' = f'g+g'f$ ולכן

$$\int g'(x)f(x)dx = \int [f(x)g(x)]'dx - \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$$
$$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$$

.1

$$\int x\ln(x)dx = [g'(x) = x, f(x) = \ln(x)]$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}+c$$

.2

$$\begin{aligned}\int x\arctan(x)dx &= [u'=x, v=\arctan(x)] = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}(x-\arctan(x)) + c\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}F(x) &= \int e^x\cos(x)dx = [g'(x)=\cos(x), f(x)=e^x] = e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)dx\\ &= [u'(x)=\sin(x), v(x)=e^x] = e^x\sin(x) - \big(-e^x\cos(x) - \int -e^x\cos(x)dx\big)\\ &= e^x(\sin(x)+\cos(x)) - F(x)\end{aligned}$$

ומכאן נקבל $2F(x) = e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)$ ולכן

$$F(x) = \frac{e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)}{2}$$

4. נחשב באופן רקורסיבי את $I_m(x) = \int\frac{1}{(1+x^2)^m}dx$. תחילה

$$\begin{aligned}I_m(x) &= \int 1\cdot\frac{1}{(1+x^2)^m}dx = \left[g'=1, f=\frac{1}{(1+x^2)^m}\right]\\ &= x\frac{1}{(1+x^2)^m} - \int\frac{-x(2mx)}{(1+x^2)^{m+1}}dx\\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m\int\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{m+1}}dx = \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m(I_m - I_{m+1})\end{aligned}$$

ולכן $I_{m+1} = \frac{x}{2m(1+x^2)^m} + \frac{(2m-1)}{2m}I_m$ עם תנאי התחלה $I_1 = \int\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)+c$.

דוגמה 3.1. לעיתים נדרש ליותר משיטת אינטגרציה אחת. למשל:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \left[t=\sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right] = \int 2te^{t}dt = \left[g'=e^{t}, f=2t\right]$$
$$= 2te^{t} - \int 2e^{t}dt = 2te^{t} - 2e^{t} + c = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$$

3.3 מבוא לאינטגרציה של פונקציות רציונליות

הגדרה 3.2. פונקציה (ממשית) $R(x)$ תקרא רציונלית אם היא מהצורה $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ כאשר $Q(x), P(x)$ הם פולינומים.

תרגיל 3.3. חשבו את $I=\int \frac{x}{x^2-4x+8}dx$.

פתרון. בדרך כלל, אם מעלת המונה היא n ומעלת המכנה היא $n+1$, ננסה לבדוק שימוש ב-ln. הרי $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$. במקרה שלנו $f(x)=x^2-4x+8$ וכן $f'(x)=2x-4$. ננסה "להתאים" את המונה:

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{2x-4+4}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + \int \frac{2}{x^2-4x+8}dx$$

כאשר במכנה יש פולינום אי־פריק ממעלה 2 נכון ל-arctan:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2+4}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + \arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + c$$

כאשר במכנה יש פולינום פריק (וידוע לנו הפירוק) ניתן להשתמש בשיטה של "פירוק לשברים" על מנת להוריד את דרגת המכנה. למשל נחפש A, B כך שמתקיים $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$. בהמשך נראה כיצד למצוא פונקציה קדומה של כל פונקציה רציונלית.

דוגמה 3.4. נחשב $I=\int \frac{dx}{x^2-4}$. קל לראות כי המכנה פריק ונחפש A, B כך ש-

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x-2)(x+2)}$$

ובעזרת השוואת מקדמים נקבל כי $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$. לכן

$$I = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2|\right) + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

3.4 הצבות טריגונומטריות

1. במקרה של פונקציה עם $\sin(x)$, $\cos(x)$ שאחד מהם בחזקה אי־זוגית נבצע הצבה $t = \sin(x)$ או $t = \cos(x)$:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{2-\cos^2(x)}}dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)dx]$$
$$= \int \frac{-dt}{\sqrt{2-t^2}} = -\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c = -\arcsin\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}\right) + c$$

2. אם שניהם מופיעים עם חזקות זוגיות, ניתן לפעמים לפשט את הביטוי בעזרת זהויות טריגונומטריות:

$$\int \sin^2(x)\cos^4(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos(2x))(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x))dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)-\cos(2x)-2\cos^2(2x)-\cos^3(2x)\right)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos(2x)-\cos^2(2x)-\cos^3(2x)\right)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}-\cos(2x)\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\right)dx$$

ואפשר להמשיך לבד לפי הנוסחה $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A+B)+\cos(A-B)\right)$.

3. שימוש בזהות $\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$. נניח $a>0$:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}dx &= [x=a\sin(t)\Rightarrow dx=a\cos(t)dt]\\ &= \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2(t)}a\cos(t)dt=a^2\int\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt\underset{*}{=}\\ &= a^2\int\cos^2(t)dt=a^2\int\frac{1}{2}(\cos(2t)+1)dt=\frac{a^2}{2}(\frac{\sin(2t)}{2}+t)+c\\ &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin(2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right))}{2}+\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)+c\end{aligned}$$

$*$: הנחנו כי $\cos(t)\geq 0$ כי $t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. אפשר לפשט את הביטוי האחרון אם משתמשים בזהות $\sin(2x)=2\cos(x)\sin(x)$.

4. טיפול בפונקציות רציונליות עם שורשיםיכול להעשות בעזרת פונקציות טריגונומטריות:

- אם מופיע הביטוי $\sqrt{a^2-x^2}$ נציב $x=a\cos(t)$ או $x=a\sin(t)$.
- אם מופיע הביטוי $\sqrt{x^2-a^2}$ נציב $x=\frac{a}{\cos(t)}$ או $x=\frac{a}{\sin(t)}$.
- אם מופיע הביטוי $\sqrt{a^2+x^2}$ נציב $x=a\tan(t)$.

דוגמה 3.5. נחשב

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} &= \left[x=\frac{1}{\cos(t)},dx=\frac{\sin(t)dt}{\cos^2(t)}\right]=\int\frac{\frac{\sin(t)dt}{\cos^2(t)}}{\frac{1}{\cos^2(t)}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}-1}}\\ &= \int\frac{\sin(t)dt}{\sqrt{\frac{1-\cos^2(t)}{\cos^2(t)}}}=\int\frac{\sin(t)dt}{\sqrt{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}}\underset{*}{=}\int\sqrt{\cos^2(t)}dt\underset{**}{=}\int\cos(t)dt\\ &= \sin(t)+c=\sqrt{1-\cos^2(t)}+c=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+c=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c\end{aligned}$$

$*$: הנחנו ש-$\sin(t)\geq 0$ כי $t=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\in[0,\pi]$.

$**$: הנחנו ש-$\cos(t)>0$. אם היינו מניחים ש-$\cos(t)<0$ היינו מקבלים

$$-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+c=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}+c=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש-$\sqrt{x^2}=-x$ כי $x=\frac{1}{\cos(t)}<0$.

3.5 המשך אינטגראציה של פונקציות רציונליות

עובדה 3.6. יש אלגוריתם לחישוב פונקציה קדומה כל פונקציה רציונלית.

אלגוריתם 3.7. תהא $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ פונקציה רציונלית במשתנה אחד. חישוב $\int R(x)dx$:

1. בעזרת חילוק פולינומים ניתן להניח כי $\deg(Q)<\deg(P)$.
2. את הפולינום הממשי $P(x)$ ניתן להציג כמכפלה של גורמים אי־פריקים מהצורה x^2+bx+c ו- $x-\alpha$.
3. אם נסמן
$$P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{m}(x^2+b_jx+c_j)^{l_j}$$
אז ניתן להציג את $R(x)$ בצורה
$$R(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k_i'=1}^{k_i}\frac{A_{i,k_i'}}{(x-\alpha_i)^{k_i'}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l_j'=1}^{l_j}\frac{B_{j,l_j'}x+C_{j,l_j'}}{(x^2+b_jx+c_j)^{l_j}}$$
4. בצורה זאת אנו מגיעים לשברים יסודיים שהאינטגראל שלהם ידוע.

רשימת שברים יסודיים:

1. $\int\frac{1}{x+\alpha}dx=\ln|x+\alpha|$.
2. $\int\frac{1}{(x+\alpha)^k}dx=\frac{1}{(1-k)(x+\alpha)^{k-1}}$ עבור $k>1$.
3. $\int\frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx=\ln|x^2+bx+c|$ עבור $b^2-4c<0$.
4. $\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}dx=\frac{1}{(1-k)(x^2+bx+c)^{k-1}}$ עבור $b^2-4c<0,\ k>1$.

5. $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^m}dx = \frac{1}{a^{2m}}\int \frac{1}{(1+(\frac{x}{a})^2)^m}dx = \frac{1}{a^{2m}}\int \frac{1}{(1+(t)^2)^m}adt = \frac{1}{a^{2m-1}}I_m(t) = \frac{1}{a^{2m-1}}I_m(\frac{x}{a})$ עבור I_m שכבר פתרנו.

6. $\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^m}dx = \int \frac{1}{((x+\frac{b}{2})^2+(-\frac{b}{4}+c))^m}dx$ ע"י החלפת משתנים מגיעים לצורה שכבר פתרנו.

תרגיל 3.8. חשבו את $I = \int \frac{x^4}{1-x^3}dx$.

פתרון. נפתור לפי האלגוריתם. נשים לב כי $I = \int \left(-x + \frac{x}{1-x^3}\right) dx$ ונמשיך עם החלק השני. נפרק את המכנה:

$$\int \frac{x}{1-x^3}dx = \int \frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)}dx$$

ונציג את האינטגרנד לפי האמור בסעיף השלישי של האלגוריתם:

$$\frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{Bx+C}{(1+x+x^2)}$$

נמצא "מחדש" את המכנה המשותף ונקבל: $x = A(1+x+x^2)+(Bx+c)(1-x)$.
בשיטה ישירה, אפשר לפתוח את הסוגריים, להשוות מקדמים ולמצוא את A, B.

בשיטה אחרת אפשר להציב ערכים בפולינום, שהרי כיוון שהשיוויון נכון לפולינום, הוא גם נכון עבור הצבות בפולינום (פולינום מדרגה n אפשר למצוא בעזרת $n+1$ הצבות). נציב $x=1$ ונקבל $1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$. נציב $x=0$ ונקבל $0 = \frac{1}{3}+C \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$. לבסוף נציב $x=2$ ונקבל $2 = \frac{7}{3} - (2B - \frac{1}{3}) \Rightarrow B = \frac{1}{3}$.

נמשיך לחשב:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-x}dx + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+x+1}dx \\ &= -\frac{1}{3}\ln|1-x| + \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2+x+1}dx \\ &= -\frac{1}{3}\ln|1-x| + \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}dx\end{aligned}$$

צעד סיום הוא

$$\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}dx = \left[t = x+\frac{1}{2}\right] = \int \frac{1}{t^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(\sqrt{\frac{4}{3}}t)^2+1}dt$$
$$= \left[u = \sqrt{\frac{4}{3}}t\right] = \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan u + c$$

בסך הכל קיבלנו כי

$$I = -\frac{x^2}{2} + -\frac{1}{3}\ln|1-x| + \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

תרגיל 3.9. חשבו את $I = \int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$.

פתרון. נפתור לפי האלגוריתם. תחילה נחלק:

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{x} & \\
\hline
x^4-x^3-x-1 & x^3-x^2 \quad = x(x^3-x^2) - \frac{x+1}{x^3-x^2} \\
\underline{x^4-x^3} & \\
\qquad -x-1 &
\end{array}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}
I &= \int\left(x - \frac{x+1}{x^3-x^2}\right)dx = \int xdx - \int \frac{-2x(x-1)-(x-1)+2x^2}{x^2(x-1)}dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{A_{1,1}}{x}dx + \int\frac{A_{1,2}}{x^2}dx + \int\frac{A_{2,1}}{x-1}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2} + \int\frac{2}{x}dx + \int\frac{1}{x^2}dx - \int\frac{2}{x-1}dx \\
&= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + c
\end{aligned}$$

תרגיל 3.10. חשבו את $I = \int \frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2}dx$.

פתרון. נרצה להציג

$$\frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2}=\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+2)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}$$

נכפיל במכנה משותף:

$$27=A_1(x+1)(x^2+2)^2+A_2(x^2+2)^2+(B_1x+C_1)(x^2+2)(x+1)^2+(B_2x+C_2)(x+1)^2$$

נציב $x=-1$ ונקבל $27=9A_2$, כלומר $A_2=3$. נשווה מקדמים:

	R	L
x^0	27	$4A_1+4A_2+2C_1+C_2$
x^1	0	
x^2	0	
x^3	0	
x^3	0	
x^4	0	$A_1+A_2+C_1+2B_1$
x^5	0	A_1+B_1

נוסיף עוד משוואות ע"י הצבה. אם $x=1$, אז

$$27=18A_1+9A_2+12B_1+12C_1+4B_2+4C_2$$

ואם $x=-2$, אז

$$27=-36A_1+36A_2+-12B_1+6C_1-2B_2+C_2$$

לבסוף נקבל מערכת משוואות

$$\begin{pmatrix}18&12&4&12&4\\4&0&0&2&1\\-36&-12&-2&6&1\\1&2&0&1&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\B_1\\B_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\15\\-81\\-3\\0\end{pmatrix}$$

נפתור אותה:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 18 & 12 & 4 & 12 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 15 \\ -36 & -12 & -2 & 6 & 1 & -81 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -6 & 4 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 24 & -2 & 6 & 1 & -81 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 4 & 18 & 4 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -18 & 6 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

ולכן קיבלנו כי $A_1 = 4, B_1 = -4, B_2 = -6, C_1 = 1, C_2 = -3$. נחזור:

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{4}{(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{-4x+1}{(x^2+2)} + \frac{-6x+-3}{(x^2+2)^2} \right) dx \\
&= 4\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} + -2\int \frac{2x}{x^2+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2}dx - 3\int \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx - 3\int \frac{1}{(x^2+2)^2} \\
&= 4\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} + -2\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}I_1(\frac{x}{\sqrt{2}}) + 3\frac{1}{x^2+2} + -3\frac{1}{2^{3/2}}I_2(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c
\end{aligned}$$

ולפי נוסחאת הרקורסיה מרשימת האינטגרלים היסודיים $I_1(\frac{x}{\sqrt{2}}) = \arctan(\frac{x}{\sqrt{2}})$ וכן $I_2(\frac{x}{\sqrt{2}}) = \frac{x}{2(1+\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2}I_1(\frac{x}{\sqrt{2}})$. לסיכום

$$\begin{aligned}
I = 4\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} + -2\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \dots \\
3\frac{1}{x^2+2} + -3\frac{1}{2^{3/2}}\frac{x}{2(1+\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c
\end{aligned}$$

3.6 הצבה אוניברסלית

ההצבה האוניברסלית היא $t = \tan(\frac{x}{2})$ והיא מאפשרת להביע את $\sin(x)$ ו-$\cos(x)$ כפונקציה רציונלית של t ולחשב פונקציות קדומות עבור פונקציות רציונליות של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{\frac{1}{2}\cos^2(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}dx = \frac{1}{2}(1+t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\
\cos(x) &= \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
\sin(x) &= 2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2}) = \frac{2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

היכן ש-t מוגדר, כלומר $x \neq \pi + 2\pi n$ עבור $n \in \mathbb{Z}$. לדוגמה:

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t}$$
$$= \ln|1+t| + c = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

3.7 הצבת אוילר (לטיפול בשורשים)

שיטה אחרת לטיפול בשורשים היא הצבת אוילר, שבה ההצבה שונה אם הפולינום פריק או לא. שיטה זו טובה למציאת $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

טענה 3.11. נניח כי פולינום (ממעלה 2) פריק מעל הממשיים והוא מן הצורה $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. הצבת אוילר במקרה זה היא $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ ואז

$$\begin{aligned} a(x-\alpha)(x-\beta) &= ax^2+bx+c = t^2(x-\alpha)^2 \\ a(x-\beta) &= t^2(x-\alpha) \\ x(a-t^2) &= a\beta - \alpha t^2 \end{aligned}$$

נקבל $x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$ ונשים לב כי השורש נעלם.

דוגמה 3.12. נחשב את $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$. הפולינום בשורש פריק ולכן נציב $\sqrt{x^2+3x-4} = t(x+4)$. מכאן

$$\begin{aligned} (x+4)(x-1) &= x^2+3x-4 = t^2(x+4)^2 \\ x-1 &= t^2(x+4) \\ x(1-t^2) &= 1+4t^2 \end{aligned}$$

ולכן

$$x = \frac{1+4t^2}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{8t(1-t^2)+2t(1+4t^2)}{(1-t^2)^2}dt = \frac{10t}{(1-t^2)^2}dt$$

ונחשב

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} &= \int \frac{1}{t(\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4)}\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt = \int \frac{1}{t(\frac{5}{1-t^2})}\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt \\ &= \int \frac{1}{5t}\frac{10t}{(1-t^2)}dt = 2\int \frac{1}{1-t^2}dt = 2\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt \\ &= 2\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt = \ln|1+t| - \ln|1-t| + c = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c \\ &= \left[t=\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}\right] = \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + c\end{aligned}$$

טענה 3.13. אם הפולינום ax^2+bx+c אי־פריק, ישנן שתי אפשרויות:

- אם $a>0$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x+t$ ונקבל $x=\frac{c-t^2}{\pm 2t\sqrt{a}-b}$.
- אם $c>0$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt\pm\sqrt{c}$ ונקבל $x=\frac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$. שימו לב שבכל מקרה צריך $a>0$ כדי שהשורש יהיה מוגדר, אך לפעמים הצבה זו מובילה לחישוב יותר פשוט.

כאשר לא משנה בחירת הסימן $\pm$ בהצבה.

דוגמה 3.14. נחשב את $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-7x+6}}$. ניעזר בהצבת אוילר: $\sqrt{x^2-7x+6} = x+t$. נחלץ את x ונקבל

$$\begin{aligned} x &= \frac{6-t^2}{2t+7} \Rightarrow \sqrt{x^2-7x+6} = \frac{6-t^2}{2t+7}+t = \frac{6+7t+t^2}{2t+7} \\ dx &= \frac{-2t(2t+7)-2(6-t^2)}{(2t+7)^2}dt = \frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2}dt\end{aligned}$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\frac{6-t^2}{2t+7}\cdot\frac{6+7t+t^2}{2t+7}} \frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2}dt = \int \frac{-2}{6-t^2}dt \\
&= -\frac{2}{6}\int \frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)^2}dt = \left[u=\frac{t}{\sqrt{6}}\right] = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\sqrt{6}du \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{1+\frac{t}{\sqrt{6}}}{1-\frac{t}{\sqrt{6}}}\right| + c \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t}\right| + c = -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{x^2-7x+6}-x}{\sqrt{6}-\sqrt{x^2-7x+6}+x}\right| + c
\end{aligned}
$$

הערה 3.15. אם $a, c < 0$ אז על ידי החלפת משתנים

$$
\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-\left(-ax^2-bx-c\right)} = \sqrt{-\left[\left(\sqrt{-a}x-\frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2+\left(-\frac{b^2}{-4a}-c\right)\right]}
$$

כיוון ש-$b^2-4ac<0$ נקבל כי $\frac{b^2}{-4a}+c<0$. כלומר הביטוי $\left(-\frac{b^2}{-4a}-c\right)$ חיובי ולכן $\left(\sqrt{-a}x-\frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2+\left(-\frac{b^2}{-4a}-c\right)$ חיובי ולכן הביטוי תחת השורש שלילי, ואז השורש כלל לא מוגדר!

3.8 שיטת המכנה המשותף המינימלי

בהנתן ביטוי שבו מופיעים כמשתנים רק $x, \frac{ax+b}{cx+d}$ עם חזקות רציונליות, נסמן את החזקות של הביטויים ב-$\frac{m_i}{n_i}$ ונציב $t^n=\frac{ax+b}{cx+d}$ כאשר $n=\text{lcm}\{n_i\}$ (הכפולה המשותפת המינמלית של המכנים).

דוגמה 3.16. נחשב את $\int\frac{x+(x+4)^{1/2}}{(x+4)+(x+4)^{2/3}}dx$. נציב

$$
t^6=\frac{x+4}{0x+1}=x+4\Rightarrow 6t^5dt=dx
$$

כי $6 = \operatorname{lcm}\{1,2,3\}$. אז

$$\begin{aligned}\int \frac{x+(x+4)^{1/2}}{(x+4)+(x+4)^{2/3}}dx &= \int \frac{t^6-4+t^3}{t^6+t^4}6t^5dt = 6\int \frac{t(t^6+t^3-4)}{t^2+1}dt \\ &= 6\int\left(t^5-t^3+t^2+t-1-\frac{5t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= 6\left(\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t-\frac{5}{2}\ln|t^2+1|+\arctan(t)\right)+c\end{aligned}$$

(נעזרו בחילוק ארוך של פולינומים) ונשארת רק ההצבה חזרה ל-x.

3.9 פונקציות היפרבוליות

הגדרה 3.17. נגדיר את הסינוס ההיפרבולי והקוסינוס ההיפרבולי

$$\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

שמקיימות זהויות דומות מאוד לאלו של פונקציות טריגונומטריות:

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$
- $\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$
- $\sinh'(x) = \cosh(x)$
- $\cosh'(x) = \sinh(x)$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

דוגמה 3.18. חשבו את $I = \int x^2\sqrt{4+x^2}dx$.

פתרון. בעזרת הצבה נחשב

$$
\begin{aligned}
I &= [x = 2\sinh(t), dx = 2\cosh(t)dt] = \\
&= 2^2 \int \sinh^2(t)\sqrt{4(1+\sinh^2(t))}2\cosh(t)dt \\
&= 2^4 \int \sinh^2(t)\cosh^2(t)dt = 2^2 \int (2\sinh(t)\cosh(t))^2 dt \\
&= 4\int \sinh^2(2t)dt = 4\int \frac{\cosh(4t)-1}{2}dt = 2\left(\frac{\sinh(4t)}{4} - t\right) + c \\
&= 2\left(\frac{\sinh\left(4\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{4} - \sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c
\end{aligned}
$$

3.10 נגזרת של פונקציה המוגדרת באמצעות אינטגרל

4 ישומים לאינטגרל מסויים

4.1 חישוב שטח

4.2 חישוב נפח גוף סיבוב

4.3 חישוב אורך עקומה

5 אינטגרלים מוכללים

5.1 אינטגרלים על קטע אינסופי

5.2 אינטגרלים על קטע סופי של פונקציות לא חסומות

5.3 תנאים לקיום אינטגרלים בקטע אינסופי

משפט 5.1 (מבחן האינטגרל להתכנסות טורים חיוביים). תהי $f(x)$ פונקציה חיובית מונוטונית יורדת ורציפה בקטע $[a,\infty)$. אזי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אם ורק אם הטור החיובי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(a+k)$ מתכנס (כלומר האינטגרל והטור מתכנסים ומתבדרים יחד).

תרגיל 5.2. הוכח כי האינטגרל $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx$ מתבדר.

פתרון. האינטגראל מתכנס אס"ם הטור $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln(k)}$ מתכנס אס"ם (ממבחן העיבוי) הטור $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(2)\cdot k} = \sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{2^k}{2^k\ln(2^k)}$ מתכנס, אבל ידוע שהטור האחרון מתבדר.

תרגיל 5.3. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$ מתכנס.

פתרון. בעזרת מבחן האינטגרל מספיק להראות כי האינטגרל $I=\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)(\ln(x+1))^2}$ מתכנס. בעזרת הצבה נקבל

$$I=\left[t=\ln(x+1), dt=\frac{dx}{x+1}\right]=\int_{\ln(2)}^{\infty}\frac{dt}{t^2}$$

והאינטגרל מתכנס.

תרגיל 5.4. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{\arctan n}{1+n^2}$ מתכנס.

פתרון. בעזרת מבחן האינטגרל נראה כי האינטגרל $I=\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ מתכנס. בעזרת הצבה נקבל

$$I=\left[t=\arctan x, dt=\frac{dx}{1+x^2}\right]=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} tdt=\cdots=\frac{3}{32}\pi^2$$

האינטגרל מתכנס, ולכן גם הטור. שימו לב שיש לוודא שמתקיימים תנאי מבחן האינטגרל. כלומר, שהפונקציה $\frac{\arctan x}{1+x^2}$ מונוטונית יורדת לכל $x\geq 1$. אפשר לראות זאת לפי כך שהנגזרת שלה שלילית לכל $x\geq 1$.

5.3.1 הערות

הערה 5.5. ניתן לנסח גרסאות של משפט ההשוואה ומשפט המנה (מבחן ההשוואה הגבולי) גם עבור אינטגרלים על קטע סופי של פונקציות לא חסומות.

הערה 5.6. יהי $a > 0$. האינטגרל $\int_a^\infty \frac{dx}{x^r}$ מתכנס אם $r > 1$, ואחרת ($r \leq 1$) הוא מתבדר. אינטגרל זה הוא מאוד שימושי בבדיקה של התכנסות אינטגרלים בקטע אינסופי.

הערה 5.7. יהי $b > 0$. האינטגרל $\int_0^b \frac{dx}{x^r}$ מתכנס אם $0 < r < 1$, אם $r \geq 1$ הוא מתבדר, ואם $r \leq 0$ הפונקציה אינטגרבילית לפי רימן. אינטגרל זה הוא מאוד שימושי בבדיקה של התכנסות אינטגרלים של פונקציות לא חסומות בקטע סופי. שימו לב שהערכים של r בהם האינטגרל מתכנס או מתבדר הפוכים מן המקרה של אינטגרל בקטע אינסופי.

תרגיל 5.8 קבעו האם האינטגרל $I = \int_0^2 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1}dx$ מתכנס או מתבדר.

פתרון. נשתמש במבחן המנה, ונשווה עם $\int_0^2 \frac{dx}{x^{\frac{2}{5}}}$. נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1}}{\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{\sqrt[5]{x^3}}\cdot\frac{\sin x}{e^{\sin x}-1}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}\cdot x^{\frac{2}{5}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{\sqrt[5]{x^3}}\cdot\frac{\sin x}{e^{\sin x}-1}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{x} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

האינטגרל $\int_0^2 \frac{dx}{x^{\frac{2}{5}}}$ מתכנס ($r = \frac{2}{5} < 1$) ולכן האינטגרל I מתכנס.

תרגיל 5.9 קבעו האם האינטגרל $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}dx$ מתכנס או מתבדר.

פתרון. נשתמש במבחן המנה, ונשווה עם $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$. נחשב:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}} = \lim_{x\to 2^-}\sqrt[3]{2-x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{2-x}\sqrt[3]{(2+x)(4+x^2)}}$$
$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{(2+x)(4+x^2)}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{32}}$$

האינטגרל $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$ מתכנס ולכן האינטגרל I מתכנס.

6 סדרות וטורי פונקציות

הגדרה 6.1. תהי $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של פונקציות (כלומר לכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ מתאימים את הפונקציה $(f_n(x)$ המוגדרות בתחום $B \subseteq \mathbb{R}$. יהי $x_0 \in B$ אזי $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סדרה של נקודות. אם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ נסמנו $f(x_0)$ ונאמר שסדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית ב-x_0.

הגדרה 6.2. תהי A קבוצת כל הנקודות שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת בהם. הקבוצה A נקראת תחום ההתכנסות של הסדרה. לכל $x \in A$ נסמן $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
הפונקציה $f(x)$ (אם קיימת) נקראת פונקצית הגבול של סדרת הפונקציות.

דוגמה 6.3. נקבע התכנסות של $f_n(x) = x^n$ בקטע $[-1,1]$. אז לפי הגדרה

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \text{undefined} & x = -1 \end{cases}$$

הגדרה 6.4. תהי $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של פונקציות המוגדרות בתחום $B \subseteq \mathbb{R}$. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים (סס"ח) $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ שלה להיות $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.
את פונקצית הגבול נסמן $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

דוגמה 6.5. מסדרת הסכומים החלקיים של $f_n(x) = x^n$ בקטע $[-1,1]$ נקבל כי

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ \infty & x = 1 \\ \text{undefined} & x = -1 \end{cases}$$

6.1 התכנסות במידה שווה

הגדרה 6.6. תהי $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של פונקציות עם תחום התכנסות A ופונקצית גבול $f(x)$. נאמר שההתכנסות היא במידה שווה (במ"ש) אם

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

הסבר להגדרה: סביב פונקציית הגבול $f(x)$ ניקח "פס-ε", כלומר המרווח בין $f(x)+\varepsilon$ לבין $f(x)-\varepsilon$. הסדרה $\{f_n(x)\}$ תתכנס במ"ש ל-$f(x)$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שממנו והלאה כל פונקציה $f_n(x)$ תהיה מוכלת כולה (בתחום A) בתוך אותו "פס-ε".

דוגמה 6.7. סדרת הפונקציות $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$ בכל הישר מתכנסת לפונקציה $f(x)=0$. נטען כי ההתכנסות היא במ"ש.

הוכחה. יהא עבור $\varepsilon>0$. נבחר $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$ ואז לכל $n>n_0$ ולכל x ממשי מתקיים

$$\frac{1}{x^2+n}-0<\frac{1}{x^2+n_0}<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$$

□

דוגמה 6.8. סדרת הפונקציות $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ בקטע $[0,1]$ מתכנסת ל- $f(x)=0$, אבל ההתכנסות אינה במ"ש. למשל, עבור $\varepsilon=\frac{1}{4}$ לכל n נוכל לקחת $x=2^{-\frac{1}{n}}$ ונקבל $f_n(x)=\frac{1}{4}\nless\varepsilon$.

הגדרה 6.9. תהי $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של פונקציות עם תחום התכנסות A ופונקצית גבול $f(x)$. הטור $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ נקרא טור פונקציות.

צורת רישום 6.10. בהינתן טור פונקציות $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$, ההפרש $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ נקרא השארית של הטור.

הגדרה 6.11 (התכנסות במ"ש לטורים). תהי $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של פונקציות עם תחום התכנסות A, סס"ח $\{S_n(x)\}$ ופונקצית הגבול של סס"ח היא $S(x)$. נאמר שההתכנסות היא במ"ש אם

$$\forall\varepsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n>n_0,x\in A:|r_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k(x)\right|<\varepsilon$$

משפט 6.12 (מבחן ה-M של ויירשטראס). אם קיימת סדרת מספרים $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ כך שמתקיים $|f_k(x)|\le a_k$ (לכל $x\in A$) וגם $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$, אז הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במ"ש בתחום A.

דוגמה 6.13. הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^n(x)}{n^2}$ מתכנס במ"ש בקטע $[-1, 32]$ כי מתקיים שם $\left|\frac{\sin^n(x)}{n^2}\right| \leq$ $\frac{1}{n^2}$ וטור המספרים $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ מתכנס.

משפט 6.14. קריטריון קושי להתכנסות במ"ש של טור פונקציות (נקרא גם קריטריון $\lim - \sup$) אומר שסדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ עם תחום התכנסות A ופונקצית גבול $f(x)$ מתכנסת במ"ש אס"ס

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |r_n(x)| = 0$$

תרגיל 6.15. קבעו האם סדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right) & x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

מתכנסת במ"ש.

פתרון. ברור שפונקצית הגבול היא $f(x) = 0$. ההתכנסות אינה במ"ש כי

$$\sup_{x\in[0,1]} |r_n(x)| \geq \sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})\right| = n \to \infty$$

תרגיל 6.16. האם סדרת הפונקציות $f_k(x) = \frac{kx}{1+x^2k^2}$ מתכנסת במ"ש בקטע $[0, 1]$?

פתרון. נתחיל עם התכנסות: יהי x בקטע, אזי $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{kx}{1+x^2k^2} = 0$. נותר לבדוק האם ההתכנסות במ"ש. נבדוק את $\sup_{x\in[0,1]} \frac{kx}{1+x^2k^2}$ ע"י גזירה שלה והשוואה ל-0:

$$f_k'(x) = \frac{k(1 + x^2k^2) - 2xk^2 \cdot kx}{(1 + xk^2)^2} = 0$$

ומכאן ש $k^3x^2 = k$ ולכן $x = \frac{1}{k}$. נבדוק האם זו נקודת מינימום או מקסימום

$$f_k(0) = 0, f_k(1) = \frac{k}{1 + k^2} < \frac{1}{2} = f(\frac{1}{k})$$

ולכן זה מקס' שערכו $f_k(\frac{1}{k}) = \frac{1}{2}$. כעת,

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_k(x)-f(x)| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2} \neq 0$$

ולכן ההתכנסות אינה במ"ש.

תרגיל 6.17. האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{n}$ מתכנסת במ"ש בקטע $[-1,3]$?

פתרון. מבחן ה-M נכשל פה כי $\left|\frac{(-1)^n x^2}{n}\right| \le \frac{9}{n}$ שאינו טור מתכנס, אבל כיוון שזה טור מחליף סימן אנו יודעים לפי לייבניץ כי הטור מתכנס לכל x בתחום.

כעת נסמן את פונקצית הגבול ב-$S(x)$ ואז (כיוון שממשפט לייביניץ גם מתקיים $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \le |a_{n+1}|$)

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|r_n(x)| \le \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^2}{n+1}\right| \le \lim_{n\to\infty}\frac{9}{n+1} = 0$$

כלומר ההתכנסות במ"ש.

משפט 6.18. תהי סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ של פונקציות **רציפות** המתכנסות בקטע $[a,b]$, המתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)$. אזי גם $f(x)$ רציפה.

הערה 6.19. ניתן להחליף את תנאי הרציפות בקטע $[a,b]$ באינטגרביליות רימן בקטע, ואז פונקציית הגבול גם היא אינטגרבילית רימן. לפי המשפט, אם הפונקציה $f(x)$ אינה רציפה בתחום ההתכנסות A, אזי בהכרח הסדרה $\{f_n(x)\}$ אינה מתכנסת במ"ש.

הערה 6.20. שימו לב ששלילת המשפט אינה נכונה. תתכן סדרת פונקציות שאינה מתכנסת במ"ש, אך מתכנסת לפונקצית גבול רציפה. למשל הסדרה $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ בקטע $[0,1]$ אינה מתכנסת במ"ש, למרות שפונקצית הגבול $f(x) = 0$ רציפה.

דוגמה 6.21. סדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n$ בקטע $[0,1]$ אינה מתכנסת במ"ש ל- $f(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$, כי $f(x)$ אינה רציפה.

דוגמה 6.22. הפונקציה $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^k(x)}{k^2}$ רציפה, כי $S_k(x)$ מתכנסת במ"ש אליה לפי מבחן ה-M של ויירשטראס.

משפט 6.23 (מבחן דיריכלה). אם בקטע I מתקיימים התנאים

1. $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x)$ חסומה באופן אחיד. כלומר $|S_n(x)|<M$ לכל n טבעי לכל $x\in I$.
2. סדרה $\{b_n(x)\}$ מונוטונית (עולה או יורדת) מתכנסת במ"ש ל-0.

אז הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k(x)b_k(x)$ מתכנס במ"ש.

דוגמה 6.24. הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{x+k}}$ מתכנס במ"ש בקטע $[1,100]$ כי $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leq 2$ לכל n ולכל x, וכמו כן $b_k(x)=\frac{1}{\sqrt{x+k}}$ סדרה מונוטונית מתכנסת במ"ש ל-0.

דוגמה 6.25. הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{\sqrt{x+k}}$ מתכנס בקטע $[1,100]$ כי מתקיימים תנאי מבחן דיריכלה: הסדרה $b_k(x)=\frac{1}{\sqrt{x+k}}$ מונוטונית מתכנסת במ"ש ל-0.

כעת נראה כי לכל x מתקיים כי $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(kx)$ חסומה לכל n. עבור $x=2\pi l$ כאשר $l\in\mathbb{Z}$ הסכום הוא 0. עבור x אחר נקבל

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\right|=\left|\text{Imag}(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx})\right|=\left|\text{Imag}(\frac{e^{ix(n+1)}-1}{e^{ix}-1})\right|$$
$$\leq\left|\frac{e^{ix(n+1)}-1}{e^{ix}-1}\right|\leq\frac{2}{|e^{ix}-1|}$$

שימו לב כי $|e^{ix}-1|$ הינה פונקציה קבועה (בתחום ההתכנסות) שאינה תלויה ב-n.

משפט 6.26. תהי סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ של פונקציות **רציפות** המתכנסות בקטע $[a,b]$, המתכנסת לפונקציה רציפה $f(x)$. אם $f_{n+1}(x)\geq f_n(x)$ (או $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$) לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in[a,b]$ אז ההתכנסות היא במ"ש.

דוגמה 6.27. סדרת הפונקציות $f_n(x)=|x|^n$ בקטע $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$מתכנסת במ"ש ל $f(x)=0$.

מסקנה 6.28. תהי סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ של פונקציות **רציפות אי-שליליות** שסס"ח שלהם מתכנסת בקטע $[a,b]$ לפונקציה $S(x)$ רציפה, אזי ההתכנסות במ"ש.

6.2 אינטגרציה איבר-איבר

משפט 6.29. תהי סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ של פונקציות רציפות וסס"ח שלה $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת במ"ש בקטע $[a,b]$ לפונקציה $S(x)$. אזי

1. $S(x)$ אינטגראבילית בקטע $[a,b]$.
2. מתקיים

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_k(x)dx\right)$$

(כלומר $\int_a^b S(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx$, שזו החלפת סדר הסכום והאינטגרל.)

תרגיל 6.30. חשבו את $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 3^k}$.

פתרון. נסתכל בטור $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ ולהציב $x=\frac{1}{3}$. נבטא את האיבר הכללי בטור באמצעות אינטגרל מסוים:

$$\frac{x^k}{k}=\int_0^x t^{k-1}dt$$

(שהוא פונקציה של x!). בנוסף הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t^{k-1}=\frac{1}{1-t}$ מתכנס לכל $|t|<1$, והוא מתכנס במ"ש בכל קטע $[-c,c]$ כאשר $0<c<1$ (לפי מבחן ה-M של ויירשטראס).

לכן ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר ולקבל

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x t^{k-1}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=S(x)$$

ומפני ש-

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln|1-t||_0^x = -\ln|1-x|$$

נקבל כי הפתרון לתרגיל הוא

$$S(1/3) = -\ln(\frac{2}{3}) = \ln(\frac{3}{2})$$

6.3 גזירה איבר-איבר

משפט 6.31. תהי סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ של פונקציות גזירות ברציפות. אם

1. הטור $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס (נקודתית) בקטע $[a,b]$.
2. טור הנגזרות $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$.

אז $S(x)$ מתכנס במ"ש ב-$[a,b]$ וגם גזיר, ומתקיים

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

(כלומר $S'(x) = \lim_{n\to\infty} S'_n(x)$, נגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות).

תרגיל 6.32. מצאו תחום התכנסות ותחום רציפות של $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \arctan(\frac{x}{n^2})$, ומצאו את הנגזרת שלה (אם קיימת).

פתרון. עבור $x > 0$ זהו טור חיובי. כיוון ש-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(\frac{x}{n^2})}{\frac{x}{n^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\arctan(y)}{y} = (\frac{0}{0}) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{1+y^2} = 1$$

(המעבר נכון בגלל שיש התכנסות בצד ימין של המשוואה), נוכל להשוואת אותו עם הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x}{n^2} = x \cdot \frac{\pi^2}{6}$ שמתכנס.

עבור $x < 0$ זהו טור שלילי שניתן להשוואת שוב עם $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$. לכן תחום ההתכנסות הוא כל הישר הממשי.

כעת נבדוק רציפות. עבור $x_0 > 0$, כיוון ש-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(\frac{x_0}{n^2})}{\frac{x_0}{n^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\arctan(y)}{y} = (\frac{0}{0}) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{1+y^2} = 1$$

עבור n מספיק גדול יתקיים כי $\arctan(\frac{x_0}{n^2}) < 2\frac{x_0}{n^2}$.

מפני שהפונקציה $\arctan(x)$ פונקציה עולה אזי נקבל כי לכל $0 \le x \le x_0$ יתקיים $\arctan(\frac{x}{n^2}) \le \arctan(\frac{x_0}{n^2}) < 2\frac{x_0}{n^2}$.

מפני שהפונקציה $\arctan(x)$ פונקציה אי־זוגית, נקבל כי לכל $|x| \le x_0$ יתקיים $\left|\arctan(\frac{x}{n^2})\right| < 2\frac{x_0}{n^2}$ ולכן בזנב הטור מתקיים לכל $|x| \le x_0$:

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} \arctan(\frac{x}{n^2})\right| \le \sum_{n=m}^{\infty} 2\frac{x_0}{n^2}$$

ולכן ההתכנסות במ"ש בקטע $[-x_0, x_0]$ לפי מבחן ה-M של ויירשטראס (תחילת הטור לא תשנה). כיוון שלכל n הפונקציה $\arctan(\frac{x}{n^2})$ רציפה, נקבל כי פונקציית הגבול בקטע $[-x_0, x_0]$ רציפה. הואיל וכל x ממשי נמצא באיזה שהוא קטע $[-x_0, x_0]$, אז הרציפות היא בכל הממשיים.

כעת נבדוק גזירות. נרצה להשתמש בגזירה איבר-איבר: לכל n מתקיים

$$\Big(\arctan(\frac{x}{n^2})\Big)' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^4}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}} \le \frac{1}{n^2}$$

ולכן טור הנגזרות מתכנס במ"ש (שוב, לפי מבחן ה-M של ויירשטראס). לפי משפט גזירה איבר-איבר מתקיים $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}}$.

מקורות

[1] אתר הקורס, www.math-wiki.com.