

מערך תרגיל קורס 89-133 סמסטר ב' תשע"ה בחשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

מאי 2015, גרסה 0.8

מבוא

נתחיל עם כמה דגשים:

- דף הקורס נמצא באתר www.math-wiki.com.
- שאלות בנוגע לחומר הלימודי מומלץ לשאול בדף השיחה באתר של הקורס.
- נכון לעכשיו יש הגשת תרגילים, עם בדיקה חלקית.
- נשמח לכל הערה על מסמך זה.

1 אינטגרל מסוים לפי רימן

הגדרה 1.1. יהי $[a, b]$ קטע סגור. נקרא ל- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ חלוקה של הקטע $[a, b]$. נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ לכל $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

הגדרה 1.2. תהא f פונקציה מוגדרת בקטע $[a, b]$ ותהא $T : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ חלוקה של הקטע. בכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ נבחר נקודה α_i ונבנה את סכום רימן עבור החלוקה T , הפונקציה f והנקודות $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ לפי

$$\sigma_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta x_i$$

הגדרה 1.3. פרמטר החלוקה של T מוגדר להיות $\lambda(T) = \max(\Delta x_i)$. נאמר כי סדרה של חלוקות $\{T_n\}$ היא נורמלית אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(T_n) = 0$.

הגדרה 1.4. נאמר שקיים הגבול $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(T) = I$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ המקיימת: לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה $\lambda(T) < \delta$ ולכל בחירה של $\{\alpha_i\}$ מתקיים $|\sigma_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - I| < \epsilon$.

נהוג לסמן גבול זה $\int_a^b f(x) dx$. הוא נקרא האינטגרל (המסוים) של רימן (Riemann). במקרה זה נאמר כי f אינטגרבלית רימן בקטע $[a, b]$. באופן לא פורמלי, מטרת האינטגרל היא לחשב את השטח שכלוא בין עקומה לציר ה- x .

משפט 1.5. פונקציה רציפה או מונוטונית בקטע $[a, b]$ אינטגרבלית שם.

משפט 1.6. אם פונקציה f חסומה בקטע $[a, b]$ ויש לה שם קבוצה סופית (או ליתר דיוק בת מניה) של נקודות אי רציפות, אזי f אינטגרבלית בקטע $[a, b]$. (להדגיש כי תנאי הכרחי לאינטגרבליות רימן היא חסימות הפונקציה.)

משפט 1.7. אם F פונקציה קדומה של פונקציה רציפה f בקטע $[a, b]$ אזי $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

תרגיל 1.8. חשבו את האינטגרל $\int_0^5 (5-x) dx$.

פתרון. דרך אחת היא בעזרת "משולש" בגרף הפונקציה. הדרך הכללית היא לחשב עם חלוקה נורמלית את

$$\int_0^5 (5-x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (5 - \alpha_k) \Delta x_k$$

לפי המשפט הנ"ל, הפונקציה $f(x) = 5 - x$ אינטגרבלית בקטע $[0, 5]$, מפני שהיא רציפה שם. אפשר לבחור כל סדרה של חלוקות $\{T_n\}$. בפרט, נבחר חלוקה שווה

$$\Delta x = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$$

עם נקודת קצה ימנית $\alpha_k = 0 + k \cdot \frac{5}{n} = \frac{5k}{n}$, ונחשב:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(5 - \frac{5k}{n}\right) \frac{5}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{25}{n} - \frac{25k}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{25}{n} \cdot n - \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(25 - \frac{25}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right) = 25 - \frac{25}{2} = \frac{25}{2} \end{aligned}$$

תרגיל 1.9. חשבו את האינטגרל $\int_0^3 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx$.

פתרון. לפי המשפט הנ"ל, הפונקציה $f(x) = 4 - \frac{x^2}{4}$ אינטגרבלית בקטע $[0, 3]$ כי היא רציפה שם. נבחר חלוקה שווה של $[0, 3]$:

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

עם נקודת קצה שמאלית $\alpha_k = 0 + (k-1) \cdot \frac{3}{n} = \frac{3(k-1)}{n}$, ונחשב:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(4 - \frac{1}{4} \left(\frac{3(k-1)}{n}\right)^2\right) \frac{3}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{12}{n} - \frac{27}{4n^3} (k-1)^2\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12}{n} \cdot n - \frac{27}{4n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12}{n} \cdot n - \frac{27}{4n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{54}{4n^3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{27}{4n^3} \cdot n\right) \\ &= 12 - \frac{27 \cdot 2}{4 \cdot 6} = 12 - \frac{9}{4} = \frac{39}{4} \end{aligned}$$

הערה. נשים לב כי ניתן להוכיח באינדוקציה כי

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

הגדרה 1.10. תהא A קבוצה. הפונקציה המציינת (או הפונקציה האופיינית) $\chi_A : A \rightarrow$

$\{0, 1\}$ של A מוגדרת לפי

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

דוגמה 1.11. הפונקציה $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) + 2x \cdot \chi_{(1,2]}(x)$ רציפה למקוטעין ב $[0, 2]$ ולכן

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 1 \cdot dx + \int_1^2 2x dx \\ &= 1 + x^2 \Big|_1^2 = 1 + [2^2 - 1^2] = 4 \end{aligned}$$

תרגיל 1.12. הוכיחו כי פונקציית דיריכלה (Dirichlet) בקטע $[0, 1]$ המוגדרת לפי

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

אינה אינטגראבלית. (נעיר כי לפעמים הפונקציה מוגדרת הפוך, כפונקציה המציינת של \mathbb{Q} , אך אין זה משנה לתרגיל זה.)

פתרון. $D(x)$ אינה אינטגראבלית כי עבור $\epsilon = 0.5$ לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה הקטן מ-0.5 נוכל לבחור את $\{\alpha_i\}$ להיות מספרים אי-רציונליים ואז

$$\sigma_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1\Delta x_i = 1 - 0 = 1$$

ביתר פירוט: נבחר חלוקה שווה של הקטע $[0, 1]$ וברור כי $\Delta x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. בבחירה $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$ תמיד אפשר לבחור נקודה רציונלית או נקודה אי-רציונלית, ולכן סכום רימן יכול לקבל כל ערך בין 0 ל-1. למשל אם נחבר רק נקודות רציונליות נקבל כי

$$\sum_{i=1}^n D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0\Delta x_i = 0$$

ולכן סכומי הרימן השונים במקרה זה לא מתכנסים לאותו הגבול.

תרגיל 1.13. קבעו האם הפונקציה המוגדרת לפי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$.

פתרון. הפונקציה לא אינטגרבילית, כי $\lim_{n \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, כלומר כי $f(x)$ אינה חסומה ב- $[0, 1]$.

תרגיל 1.14. קבעו האם הפונקציה המוגדרת לפי

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[-1, 1]$.

פתרון. הפונקציה כן אינטגרבילית, כי $|f(x)| \leq 1$ לכל $x \in [-1, 1]$. כלומר $f(x)$ חסומה בקטע ויש לה נקודת אי רציפות אחת ב- $x = 0$.

תרגיל 1.15. הוכיחו או הפריכו: אם פונקציה $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$, אז f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

פתרון. נפריך בעזרת הדוגמה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = 2\chi_{\mathbb{Q}}(x) - 1$$

ברור כי $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$, כי היא קבועה שם. לעומת זאת הפונקציה f לא אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$ מנימוקים דומים לכך שפונקציית דיריכלה לא אינטגרבילית. ביתר פירוט, אם בחלוקה הבחירה $\{\alpha_i\}$ נבחר רק נקודות רציונליות נקבל שסכום רימן חיובי 1, ואם נבחר רק נקודות אי-רציונליות נקבל שסכום רימן שלילי -1.

תרגיל 1.16. השתמשו באינטגרל מסויים על מנת לחשב את הגבול

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{16}{n^2} - \frac{16 \cdot 1^2}{n^4}} + \sqrt{\frac{16}{n^2} - \frac{16 \cdot 2^2}{n^4}} + \cdots + \sqrt{\frac{16}{n^2} - \frac{16 \cdot n^2}{n^4}} \right)$$

פתרון. נחשב

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left(\sqrt{4 - \frac{4 \cdot 1^2}{n^2}} + \sqrt{4 - \frac{4 \cdot 2^2}{n^2}} + \cdots + \sqrt{4 - \frac{4 \cdot n^2}{n^2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - \frac{4 \cdot k^2}{n^2}} = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} = \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \pi \end{aligned}$$

כאשר בשלבים האחרונים השתמשנו בכך שאנו יודעים מהו השטח של רבע עיגול $x^2 + y^2 \leq 4$ ושחיבנו את האינטגרל בקטע $[0, 2]$ עם חלוקה שווה $\Delta x = \frac{2}{n}$ ובחירה $\alpha_k = \frac{2k}{n}$ שהיא הקצה הימני של הקטע $\left[\frac{2(k-1)}{n}, \frac{2k}{n} \right]$.

תרגיל 1.17. תהייה f ו- g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי גם הפונקציה $f + g$ אינטגרבילית שם ומתקיים

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

הוכחה. תהי $T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ חלוקה כלשהי של הקטע $[a, b]$. נחשב

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f + g)(\alpha_k) \Delta x_k &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(\alpha_k) \Delta x_k + g(\alpha_k) \Delta x_k) \\ &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(\alpha_k) \Delta x_k \right) \\ &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \Delta x_k + \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(\alpha_k) \Delta x_k \\ &= \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \end{aligned}$$

והשיויון האחרון מתקיים כי הגבולות קיימים, שהרי לפי הנתון f ו- g פונקציות אינטגרביליות,

□

ולכן $f + g$ אינטגרבילית, כדרוש.

2 סכומי רימן, סכומי דרבו והמשפט היסודי

משפט 2.1 (תנאי רימן לאינטגרביליות). הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $f(x)$ חסומה בקטע $[a, b]$.

2. נסמן $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ עבור $1 \leq k \leq n$. מתקיים

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \right) \Delta x_k = 0$$

תזכורת כמה משפחות של פונקציות אינטגרביליות:

- פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$.
- פונקציות מונוטוניות בקטע $[a, b]$.
- פונקציות חסומות ובעלות מספר סופי של נקודות אי־רציפות בקטע $[a, b]$.
- פונקציות חסומות ובעלות קבוצה בת מנייה של נקודות אי־רציפות בקטע $[a, b]$.

שאלה 2.2 (ממבחן תשע"ד). הוכיחו כי אם f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$, אזי גם הפונקציה $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$. רמז: ניתן להשתמש בעובדה הנובעת מאי שיוויון המשולש:

$$\sup_{x \in I} |f(x)| - \inf_{x \in I} |f(x)| \leq \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$$

(הערות: השאלה נכונה גם באופן כללי עבור $[a, b]$. כמו כן אפשר להסיק כי לא רק ש- $|f|$ אינטגרבילית אלא גם שמתקיים $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$. "הצד השני" של אי שיוויון המשולש באופן כללי הוא $||x| - |y|| \leq |x - y|$.)

פתרון. נוכיח כי $|f|$ מקיימת את שני התנאים של תנאי רימן לאינטגרביליות. ראשית, נתון כי f אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$ ולכן חסומה שם. כלומר קיים קבוע $M \in \mathbb{R}$ כך ש- $|f| \leq M$, ולכן גם $|f|$ חסומה בקטע $[0, 1]$. שנית, אם T חלוקה כלשהי של הקטע $[0, 1]$, לפי הרמז נשים לב כי

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in I_k} |f(x)| - \inf_{x \in I_k} |f(x)| \right) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \right) \Delta x_k \xrightarrow{\lambda(T) \rightarrow 0} 0$$

הסכום הימני שואף לאפס לפי הנתון ש- f אינטגרבילית, ולכן מתקיים

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in I_k} |f(x)| - \inf_{x \in I_k} |f(x)| \right) \Delta x_k = 0$$

שהוא התנאי השני הדרוש. לכן $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$.

2.1 אינטגרבליות לפי דארבו

הגדרה 2.3. תהא $f(x)$ פונקציה חסומה בקטע $[a, b]$ ותהא $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ חלוקה של הקטע. נסמן $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$ וכן $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$. הסכום $\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ נקרא הסכום התחתון של דרבו (Darboux). הסכום $\bar{S}(T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ נקרא הסכום העליון של דרבו.

שימו לב כי סכומי דרבו העליון והתחתון כבר לא תלויים בבחירת $\{\alpha_k\}$ כמו בסכום רימן.

הגדרה 2.4. תהא T חלוקה של הקטע $[a, b]$. נקרא לחלוקה T' של הקטע $[a, b]$ העדנה של T (או עידון של T) אם היא מכילה את כל נקודות החלוקה של T , ואולי עוד נקודות.

משפט 2.5 (תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו). תהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ ותהי $\{T_n\}$ סדרה של חלוקות של $[a, b]$ כך שלכל $1 \leq k \leq n$ החלוקה T_k היא העדנה של החלוקה T_{k-1} . אזי

$$\underline{S}(T_0) \leq \underline{S}(T_1) \leq \dots \leq \underline{S}(T_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{S}(T_n) \leq \bar{S}(T_{n-1}) \leq \dots \leq \bar{S}(T_0)$$

כלומר סדרת סכומי דרבו התחתונים היא מונוטונית עולה, וסדרת סכומי דרבו העליונים היא מונוטונית יורדת, ושתייהן מתכנסות לאינטגרל המסוים של $f(x)$ בקטע $[a, b]$.
 גרסה קצרה יותר של משפט זה: תהא T חלוקה של הקטע $[a, b]$, ותהא T' העדנה שלה. אז מתקיים $\bar{S}(T) \geq \bar{S}(T')$ וגם $\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T')$.

משפט 2.6. פונקציה $f(x)$ היא אינטגראבילית בקטע $[a, b]$ אם (ורק אם) לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $|\bar{S}(T) - \underline{S}(T)| < \varepsilon$.

תרגיל 2.7. הוכיחו כי

$$\sqrt{1-0.25^2} + \sqrt{1-0.5^2} + \sqrt{1-0.75^2} \leq \pi \leq 1 + \sqrt{1-0.25^2} + \sqrt{1-0.5^2} + \sqrt{1-0.75^2}$$

הוכחה. נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ בקטע $[0, 1]$. זו פונקציה רציפה בקטע הנ"ל, ולכן אינטגרבילית בו. נבחר חלוקה $T: 0 < 0.25 < 0.5 < 0.75 < 1$. בחלוקה זו $\Delta x = \frac{1}{4}$ לכל I_k .

$f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע $[0, 1]$ ולכן סכום דרבו התחתון הוא

$$\underline{S}(T) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{1-0.25^2} + \sqrt{1-0.5^2} + \sqrt{1-0.75^2} + \sqrt{1-1^2} \right)$$

כי הערך המינימלי של הפונקציה בכל תת-קטע מתקבל בקצה הימני שלו. באופן דומה, סכום דרבו העליון הוא

$$\bar{S}(T) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{1-0^2} + \sqrt{1-0.25^2} + \sqrt{1-0.5^2} + \sqrt{1-0.75^2} \right)$$

כי הערך המקסימלי של הפונקציה בכל תת-קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו. כמו כן ידוע לנו כי השטח של רבע מעגל היחידה הוא $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. לפי תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו מתקיים

$$\underline{S}(T) \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \leq \bar{S}(T)$$

ולכן

$$\frac{1}{4} \left(\sqrt{1-0.25^2} + \sqrt{1-0.5^2} + \sqrt{1-0.75^2} \right) \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1-0.25^2} + \sqrt{1-0.5^2} + \sqrt{1-0.75^2} \right)$$

□ ונכפול ב-4 כדי לקבל את אי השיויון המבוקש.

תרגיל 2.8 (ממבחן תשע"ג). תהא $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה ממש בקטע $[0, 1]$. סדרו את הערכים הבאים מהקטן ביותר לגדול ביותר:

1. $f(0)$

2. $f(1)$

3. $\frac{1}{3}(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}))$

4. $\frac{1}{3}(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(1))$

5. $\frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300})$

6. $\frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$

7. $\int_0^1 f(x)dx$

פתרון. נגדיר שלוש חלוקות $T_0 : 0 < 1$, העידון שלה $T_1 : 0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ והעידון שלה $T_2 = 0 < \frac{1}{300} < \frac{2}{300} < \dots < \frac{299}{300} < 1$ אזי מתקיים

$$\underline{S}(T_0) \leq \underline{S}(T_1) \leq \underline{S}(T_2) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \bar{S}(T_2) \leq \bar{S}(T_1) \leq \bar{S}(T_0)$$

וכיוון ש- f מונוטונית מתקיים:

$$\underline{S}(T_0) = f(0)$$

$$\bar{S}(T_0) = f(1)$$

$$\underline{S}(T_1) = \frac{1}{3}(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}))$$

$$\bar{S}(T_1) = \frac{1}{3}(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(1))$$

$$\underline{S}(T_2) = \frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300})$$

$$\bar{S}(T_2) = \frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$$

הגדרה 2.9. פונקציה $F(x)$ תקרא פונקציה קדומה (antiderivative) של פונקציה $f(x)$ בקבוצה A אם מתקיים לכל $x \in A$ כי $F'(x) = f(x)$.

משפט 2.10. תהא $f(x)$ פונקציה. אם $F(x), G(x)$ שתי פונקציות קדומות שלה בקבוצה A , אזי מתקיים שם $F(x) = G(x) + c$ עבור c קבוע.

משפט 2.11 (המשפט היסודי של החדו"א, נוסחת ניוטון-לייבניץ). אם $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, ו- $F(x)$ פונקציה קדומה של f בקטע $[a, b]$, אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(הערה: בגלל המשפט לעיל לא משנה באיזו פונקציה קדומה בוחרים. יש גרסה גם עבור f אינטגרבילית.)

רשימה (לא ממצה) של פונקציות קדומות:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} \tan x dx = \frac{1}{\cos x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \tan x dx = -\frac{1}{\sin x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

הערה 2.12. אם $F'(x) = f(x)$, אזי ניתן לחשב בקלות את ההסטה הלינארית $f(ax+b)$, כי מתקיים $(\frac{1}{a}F(ax+b))' = f(ax+b)$. כלומר אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, אזי $\frac{1}{a}F(ax+b)$ היא פונקציה קדומה של $f(ax+b)$.

תרגיל 2.13. השתמשו באינטגרל המסוים על מנת לחשב את הגבול

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right)$$

פתרון. נחשב כי

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ רציפה בקטע $[0, 1]$ ולכן אינטגרבילית בו. לכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

משפט 2.14. אם f ו- g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$ ולכל $x \in [a, b]$ מתקיים $f(x) \geq g(x)$, אז $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

תרגיל 2.15 (ממבחן תשע"ג). הוכיחו כי אם $0 < a < b$, אזי

$$\int_a^b \ln x dx \leq \frac{b^2 - a^2}{2}$$

הוכחה. לכל $x \in [a, b]$ מתקיים כי $\ln x \leq x$. לכן לפי המשפט האחרון,

$$\int_a^b \ln x dx \leq \int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

□

כדרוש.

תרגיל 2.16 (ממבחן). הוכיחו כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2$.

פתרון. נשתמש במשפט לפיו אם $f \leq g$ בקטע $[a, b]$, אז $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ (אם קיימים).

נמצא מינימום ומקסימום של הפונקציה $f(x) = e^{x^2-x}$. הנגזרת היא $f'(x) = 2x - 1$ ולכן יש נקודה חשודה ב- $x = 0.5$. הנגזרת השנייה היא $f''(x) = 2x$.

בה הוא $f(0.5) = e^{-0.25}$. ולכן ב- $x = 0.5$ יש נקודת מינימום ($f''(0.5) > 0$) שהערך
 נקודת המקסימום מתקבלת באחד הקצוות: $\max\{f(0), f(2)\} = f(2) = e^2$. לכן

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} = \int_0^2 e^{-0.25} dx \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq \int_0^2 e^2 dx = 2e^2$$

3 שיטות אינטגרציה

3.1 שיטת ההצבה

לפי כלל השרשרת (נגזרת של הרכבת פונקציות) מתקיים

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

ולכן

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int (F(g(x)))'dx = F(g(x)) + c$$

1. השלמה לריבוע

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1\frac{1}{4}} &= \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1\frac{1}{4}} = \left[t = x + \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dx \right] \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan(t) + c = \arctan\left(x + \frac{1}{2}\right) + c \end{aligned}$$

2.

$$\int xe^{x^2} dx = [t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx] = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

3.

$$\begin{aligned} \int \tan(x)dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)dx] \\ &= \int \frac{1}{t}(-dt) = -\ln|t| + c = -\ln|\cos(x)| + c \end{aligned}$$

.4

$$\begin{aligned} \int x^3(3x^2 - 1)^{17} dx &= [t = 3x^2 - 1 \Rightarrow dt = 6x dx] = \int \left(\frac{t+1}{3}\right) t^{17} \frac{dt}{6} \\ &= \frac{1}{18} \int (t^{18} + t^{17}) dt = \frac{1}{18} \left(\frac{t^{19}}{19} + \frac{t^{18}}{18} \right) + c = \dots \end{aligned}$$

.5 עבור $a > 0$,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx = \left[t = \frac{x}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a} dx \right] \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} a dt = \frac{a}{a} \arcsin(t) + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \end{aligned}$$

.6

$$\begin{aligned} \int \sin^{42}(x) \cos(x) dx &= [t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x) dx] \\ &= \int t^{42} dt = \frac{t^{43}}{43} + c = \frac{\sin^{43}(x)}{43} + c \end{aligned}$$

3.2 אינטגרציה בחלקים

מחוקי נגזרת של מכפלה מתקיים $(f \cdot g)' = f'g + g'f$ ולכן

$$\begin{aligned} \int g'(x)f(x) dx &= \int [f(x)g(x)]' dx - \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \end{aligned}$$

.1

$$\begin{aligned} \int x \ln(x) dx &= [g'(x) = x, f(x) = \ln(x)] \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + c \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}\int x \arctan(x) dx &= [u' = x, v = \arctan(x)] = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} (x - \arctan(x)) + c\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}F(x) &= \int e^x \cos(x) dx = [g'(x) = \cos(x), f(x) = e^x] = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx \\ &= [u'(x) = \sin(x), v(x) = e^x] = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) - \int -e^x \cos(x) dx) \\ &= e^x (\sin(x) + \cos(x)) - F(x)\end{aligned}$$

ומכאן נקבל $2F(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x))$ ולכן

$$F(x) = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2}$$

.4 נחשב באופן רקורסיבי את $I_m(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^m} dx$ תחילה

$$\begin{aligned}I_m(x) &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^m} dx = \left[g' = 1, f = \frac{1}{(1+x^2)^m} \right] \\ &= x \frac{1}{(1+x^2)^m} - \int \frac{-x(2mx)}{(1+x^2)^{m+1}} dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(1+x^2)^{m+1}} dx = \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m(I_m - I_{m+1})\end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c \quad \text{ולכן} \quad I_{m+1} = \frac{x}{2m(1+x^2)^m} + \frac{(2m-1)}{2m} I_m$$

דוגמה 3.1. לעיתים נדרש ליותר משיטת אינטגרציה אחת. למשל:

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}} dx &= \left[t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right] = \int 2te^t dt = [g' = e^t, f = 2t] \\ &= 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + c = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c\end{aligned}$$

3.3 מבוא לאינטגרציה של פונקציות רציונליות

3.2 הגדרה. פונקציה (ממשית) $R(x)$ תקרא רציונלית אם היא מהצורה $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ כאשר $Q(x), P(x)$ הם פולינומים.

3.3 תרגיל. חשבו את $I = \int \frac{x}{x^2-4x+8} dx$

פתרון. בדרך כלל, אם מעלת המונה היא n ומעלת המכנה היא $n+1$, ננסה לבדוק שימוש ב- \ln . הרי $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$. במקרה שלנו $f(x) = x^2 - 4x + 8$ וכן $f'(x) = 2x - 4$. ננסה "להתאים" את המונה:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 4 + 4}{x^2 - 4x + 8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 8} dx + \int \frac{2}{x^2 - 4x + 8} dx$$

כאשר במכנה יש פולינום אי-פריק ממעלה 2 נכוון ל- \arctan :

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 8| + 2 \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 8| + \arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + c\end{aligned}$$

כאשר במכנה יש פולינום פריק (וידוע לנו הפירוק) ניתן להשתמש בשיטה של "פירוק לשברים" על מנת להוריד את דרגת המכנה. למשל נחפש A, B כך שמתקיים $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$. בהמשך נראה כיצד למצוא פונקציה קדומה של כל פונקציה רציונלית.

דוגמה 3.4. נחשב $I = \int \frac{dx}{x^2-4}$. קל לראות כי המכנה פריק ונחפש A, B כך ש-

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + 2A - 2B}{(x-2)(x+2)}$$

ובעזרת השוואת מקדמים נקבל כי $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$. לכן

$$I = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$$

3.4 הצבות טריגונומטריות

1. במקרה של פונקציה עם $\sin(x)$, $\cos(x)$ שאחד מהם בחזקה אי-זוגית נבצע הצבה $t = \sin(x)$ או $t = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(x)}{\sqrt{2 - \cos^2(x)}} dx &= [t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x) dx] \\ &= \int \frac{-dt}{\sqrt{2 - t^2}} = -\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c = -\arcsin\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}\right) + c \end{aligned}$$

2. אם שניהם מופיעים עם חזקות זוגיות, ניתן לפעמים לפשט את הביטוי בעזרת זהויות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) \cos^4(x) dx &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos(2x))(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x) - \cos(2x) - 2\cos^2(2x) - \cos^3(2x)) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos(2x) - \cos^2(2x) - \cos^3(2x)) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left(1 + \cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2} - \cos(2x) \left(\frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) \right) dx \end{aligned}$$

ואפשר להמשיך לבד לפי הנוסחה $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$.

3. שימוש בזהות $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$. נניח $a > 0$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= [x = a \sin(t) \Rightarrow dx = a \cos(t) dt] \\ &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} a \cos(t) dt = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt =_* \\ &= a^2 \int \cos^2(t) dt = a^2 \int \frac{1}{2} (\cos(2t) + 1) dt = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sin(2t)}{2} + t \right) + c \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sin(2 \arcsin(\frac{x}{a}))}{2} + \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right) + c \end{aligned}$$

*: הנחנו כי $\cos(t) \geq 0$ כי $t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. אפשר לפשט את הביטוי האחרון אם משתמשים בזהות $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$.

4. טיפול בפונקציות רציונליות עם שורשיסכול להעשות בעזרת פונקציות טריגונומטריות:

- אם מופיע הביטוי $\sqrt{a^2 - x^2}$ נציב $x = a \sin(t)$ או $x = a \cos(t)$
- אם מופיע הביטוי $\sqrt{x^2 - a^2}$ נציב $x = \frac{a}{\sin(t)}$ או $x = \frac{a}{\cos(t)}$
- אם מופיע הביטוי $\sqrt{a^2 + x^2}$ נציב $x = a \tan(t)$

דוגמה 3.5. נחשב

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} &= \left[x = \frac{1}{\cos(t)}, dx = \frac{\sin(t) dt}{\cos^2(t)} \right] = \int \frac{\frac{\sin(t) dt}{\cos^2(t)}}{\frac{1}{\cos^2(t)} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)} - 1}} \\ &= \int \frac{\sin(t) dt}{\sqrt{\frac{1 - \cos^2(t)}{\cos^2(t)}}} = \int \frac{\sin(t) dt}{\sqrt{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}} = \int \sqrt{\cos^2(t)} dt = \int \cos(t) dt \\ &= \sin(t) + c = \sqrt{1 - \cos^2(t)} + c = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + c = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + c \end{aligned}$$

*: הנחנו ש- $\sin(t) \geq 0$ כי $t = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \in [0, \pi]$
 **: הנחנו ש- $\cos(t) > 0$. אם היינו מניחים ש- $\cos(t) < 0$ היינו מקבלים

$$-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + c = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}} + c = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש- $\sqrt{x^2} = -x$ כי $x = \frac{1}{\cos(t)} < 0$.

3.5 המשך אינטגרציה של פונקציות רציונליות

עובדה 3.6. יש אלגוריתם לחישוב פונקציה קדומה כל פונקציה רציונלית.

אלגוריתם 3.7. תהא $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ פונקציה רציונלית במשתנה אחד. חישוב $\int R(x)dx$:

1. בעזרת חילוק פולינומים ניתן להניח כי $\deg(Q) < \deg(P)$.

2. את הפולינום הממשי $P(x)$ ניתן להציג כמכפלה של גורמים אי-פריקים מהצורה $x - \alpha$ ו- $x^2 + bx + c$.

3. אם נסמן

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^m (x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}$$

אז ניתן להציג את $R(x)$ בצורה

$$R(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k'_i=1}^{k_i} \frac{A_{i,k'_i}}{(x - \alpha_i)^{k'_i}} + \sum_{j=1}^m \sum_{l'_j=1}^{l_j} \frac{B_{j,l'_j}x + C_{j,l'_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{l'_j}}$$

4. בצורה זאת אנו מגיעים לשברים יסודיים שהאינטגרל שלהם ידוע.

רשימת שברים יסודיים:

1. $\int \frac{1}{x+\alpha} dx = \ln|x + \alpha|$

2. עבור $k > 1$ $\int \frac{1}{(x+\alpha)^k} dx = \frac{1}{(1-k)(x+\alpha)^{k-1}}$

3. עבור $b^2 - 4c < 0$ $\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx = \ln|x^2 + bx + c|$

4. עבור $b^2 - 4c < 0$, $k > 1$ $\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k} dx = \frac{1}{(1-k)(x^2+bx+c)^{k-1}}$

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^m} dx = \frac{1}{a^{2m}} \int \frac{1}{(1+(\frac{x}{a})^2)^m} dx = \frac{1}{a^{2m}} \int \frac{1}{(1+(t)^2)^m} a dt = \frac{1}{a^{2m-1}} I_m(t) = .5$$

שכבר פתרנו. עבור I_m שבו $\frac{1}{a^{2m-1}} I_m(\frac{x}{a})$

6. $\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^m} dx = \int \frac{1}{((x+\frac{b}{2})^2+(\frac{-b}{4}+c)^m)} dx$ שכבר פתרנו. ע"י החלפת משתנים מגיעים לצורה

תרגיל 3.8. חשבו את $I = \int \frac{x^4}{1-x^3} dx$

פתרון. נפתור לפי האלגוריתם. נשים לב כי $I = \int (-x + \frac{x}{1-x^3}) dx$ ונמשיך עם החלק השני. נפרק את המכנה:

$$\int \frac{x}{1-x^3} dx = \int \frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)} dx$$

ונציג את האינטגרנד לפי האמור בסעיף השלישי של האלגוריתם:

$$\frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2}$$

נמצא "מחדש" את המכנה המשותף ונקבל: $x = A(1+x+x^2) + (Bx+c)(1-x)$
 בשיטה ישירה, אפשר לפתוח את הסוגריים, להשוות מקדמים ולמצוא את A, B
 בשיטה אחרת אפשר להציב ערכים בפולינום, שהרי כיוון שהשיויון נכון לפולינום,
 הוא גם נכון עבור הצבות בפולינום (פולינום מדרגה n אפשר למצוא בעזרת $n+1$
 הצבות). נציב $x = 1$ ונקבל $1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$. נציב $x = 0$ ונקבל $0 = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$
 $2 = \frac{7}{3} - (2B - \frac{1}{3}) \Rightarrow B = \frac{1}{3}$ ונקבל $x = 2$ נציב $x = 2$ ונקבל $2 = \frac{7}{3} - (2B - \frac{1}{3})$
 נמשיך לחשב:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2+x+1} dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln|1-x| + \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{6} \int \frac{-3}{x^2+x+1} dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln|1-x| + \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2} dx \end{aligned}$$

צעד סיום הוא

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + (\sqrt{\frac{3}{4}})^2} dx &= \left[t = x + \frac{1}{2} \right] = \int \frac{1}{t^2 + (\sqrt{\frac{3}{4}})^2} dt = \frac{4}{3} \int \frac{1}{(\sqrt{\frac{4}{3}}t)^2 + 1} dt \\ &= \left[u = \sqrt{\frac{4}{3}}t \right] = \sqrt{\frac{4}{3}} \arctan u + c \end{aligned}$$

בסך הכל קיבלנו כי

$$I = -\frac{x^2}{2} + -\frac{1}{3} \ln|1-x| + \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \arctan \sqrt{\frac{4}{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right)$$

תרגיל 3.9. חשבו את $I = \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$

פתרון. נפתור לפי האלגוריתם. תחילה נחלק:

$$\begin{array}{r} x \\ \hline x^4 - x^3 - x - 1 \quad | \quad x^3 - x^2 \\ \hline x^3 - x^2 \\ \hline -x - 1 \end{array}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned} I &= \int \left(x - \frac{x+1}{x^3-x^2} \right) dx = \int x dx - \int \frac{-2x(x-1) - (x-1) + 2x^2}{x^2(x-1)} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{A_{1,1}}{x} dx + \int \frac{A_{1,2}}{x^2} dx + \int \frac{A_{2,1}}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{2}{x-1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1| + c \end{aligned}$$

תרגיל 3.10. חשבו את $I = \int \frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2} dx$

פתרון. נרצה להציג

$$\frac{27}{(x^2 + 2)^2(x + 1)^2} = \frac{A_1}{(x + 1)} + \frac{A_2}{(x + 1)^2} + \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + 2)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + 2)^2}$$

נכפיל במכנה משותף:

$$27 = A_1(x+1)(x^2+2)^2 + A_2(x^2+2)^2 + (B_1x+C_1)(x^2+2)(x+1)^2 + (B_2x+C_2)(x+1)^2$$

נציב $x = -1$ ונקבל $27 = 9A_2$, כלומר $A_2 = 3$. נשווה מקדמים:

L	R	
$4A_1 + 4A_2 + 2C_1 + C_2$	27	x^0
	0	x^1
	0	x^2
	0	x^3
	0	x^3
$A_1 + A_2 + C_1 + 2B_1$	0	x^4
$A_1 + B_1$	0	x^5

נוסיף עוד משוואות ע"י הצבה. אם $x = 1$, אז

$$27 = 18A_1 + 9A_2 + 12B_1 + 12C_1 + 4B_2 + 4C_2$$

ואם $x = -2$, אז

$$27 = -36A_1 + 36A_2 + -12B_1 + 6C_1 - 2B_2 + C_2$$

לבסוף נקבל מערכת משוואות

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 4 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -36 & -12 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -81 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נפתור אותה:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 18 & 12 & 4 & 12 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 15 \\ -36 & -12 & -2 & 6 & 1 & -81 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -6 & 4 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 24 & -2 & 6 & 1 & -81 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 4 & 18 & 4 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -18 & 6 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

ולכן קיבלנו כי $A_1 = 4, B_1 = -4, B_2 = -6, C_1 = 1, C_2 = -3$. נחזור:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{4}{(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{-4x+1}{(x^2+2)} + \frac{-6x-3}{(x^2+2)^2} \right) dx \\ &= 4 \ln|x+1| - 3 \frac{1}{x+1} - 2 \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2} dx - 3 \int \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx - 3 \int \frac{1}{(x^2+2)^2} dx \\ &= 4 \ln|x+1| - 3 \frac{1}{x+1} - 2 \ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} I_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 3 \frac{1}{x^2+2} - 3 \frac{1}{2^{3/2}} I_2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c \end{aligned}$$

ולפי נוסחאות הרקורסיה מרשימת האינטגרלים היסודיים $I_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ וכן

$$I_2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{2(1+\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2} I_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{aligned} I &= 4 \ln|x+1| - 3 \frac{1}{x+1} - 2 \ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \dots \\ &\quad 3 \frac{1}{x^2+2} + -3 \frac{1}{2^{3/2}} \frac{x}{2(1+\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c \end{aligned}$$

3.6 הצבה אוניברסלית

ההצבה האוניברסלית היא $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ והיא מאפשרת להביע את $\sin(x)$ ו- $\cos(x)$ כפונקציה רציונלית של t ולחשב פונקציות קדומות עבור פונקציות רציונליות של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \frac{1}{2} (1+t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \cos(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(x) &= 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

היכן ש- t מוגדר, כלומר $x \neq \pi + 2\pi n$ עבור $n \in \mathbb{Z}$. לדוגמה:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin(x) + \cos(x)} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \ln |1+t| + c = \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + c \end{aligned}$$

3.7 הצבת אוילר (לטיפול בשורשים)

שיטה אחרת לטיפול בשורשים היא הצבת אוילר, שבה ההצבה שונה אם הפולינום פריק או לא. שיטה זו טובה למציאת $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.

3.11. נניח כי פולינום (ממעלה 2) פריק מעל הממשיים והוא מן הצורה $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ ו- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$ ואז

$$\begin{aligned} a(x - \alpha)(x - \beta) &= ax^2 + bx + c = t^2(x - \alpha)^2 \\ a(x - \beta) &= t^2(x - \alpha) \\ x(a - t^2) &= a\beta - \alpha t^2 \end{aligned}$$

נקבל $x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}$ ונשים לב כי השורש נעלם.

3.12. דוגמה. נחשב את $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$. הפולינום בשורש פריק ולכן נציב $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = t(x + 4)$ מכאן

$$\begin{aligned} (x + 4)(x - 1) &= x^2 + 3x - 4 = t^2(x + 4)^2 \\ x - 1 &= t^2(x + 4) \\ x(1 - t^2) &= 1 + 4t^2 \end{aligned}$$

ולכן

$$x = \frac{1 + 4t^2}{1 - t^2} \Rightarrow dx = \frac{8t(1 - t^2) + 2t(1 + 4t^2)}{(1 - t^2)^2} dt = \frac{10t}{(1 - t^2)^2} dt$$

ונחשב

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} &= \int \frac{1}{t\left(\frac{1+4t^2}{1-t^2} + 4\right)} \frac{10t}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{1}{t\left(\frac{5}{1-t^2}\right)} \frac{10t}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \int \frac{1}{5t} \frac{10t}{(1-t^2)} dt = 2 \int \frac{1}{1-t^2} dt = 2 \int \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \ln|1+t| - \ln|1-t| + c = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c \\ &= \left[t = \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} \right] = \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}} \right| + c = \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}} \right| + c \end{aligned}$$

טענה 3.13. אם הפולינום $ax^2 + bx + c$ אי-פריק, ישנן שתי אפשרויות:

- אם $a > 0$ נציב $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} + t$ ונקבל $x = \frac{c-t^2}{\pm 2t\sqrt{a-b}}$ שימו לב
- אם $c > 0$ נציב $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$ ונקבל $x = \frac{\pm 2t\sqrt{c-b}}{a-t^2}$ שבכל מקרה צריך $a > 0$ כדי שהשורש יהיה מוגדר, אך לפעמים הצבה זו מובילה לחישוב יותר פשוט.

כאשר לא משנה בחירת הסימן \pm בהצבה.

דוגמה 3.14. נחשב את $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-7x+6}}$. ניעזר בהצבת אוילר: $\sqrt{x^2-7x+6} = x+t$ נחלץ את x ונקבל

$$\begin{aligned} x &= \frac{6-t^2}{2t+7} \Rightarrow \sqrt{x^2-7x+6} = \frac{6-t^2}{2t+7} + t = \frac{6+7t+t^2}{2t+7} \\ dx &= \frac{-2t(2t+7) - 2(6-t^2)}{(2t+7)^2} dt = \frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2} dt \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\frac{6-t^2}{2t+7} \cdot \frac{6+7t+t^2}{2t+7}} \frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2} dt = \int \frac{-2}{6-t^2} dt \\
&= -\frac{2}{6} \int \frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)^2} dt = \left[u = \frac{t}{\sqrt{6}} \right] = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) \sqrt{6} du \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + c = -\frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| \frac{1+\frac{t}{\sqrt{6}}}{1-\frac{t}{\sqrt{6}}} \right| + c \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t} \right| + c = -\frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{6}+\sqrt{x^2-7x+6}-x}{\sqrt{6}-\sqrt{x^2-7x+6}+x} \right| + c
\end{aligned}$$

הערה 3.15. אם $a, c < 0$ אז על ידי החלפת משתנים

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-(-ax^2-bx-c)} = \sqrt{-\left[\left(\sqrt{-ax} - \frac{b}{2\sqrt{-a}} \right)^2 + \left(-\frac{b^2}{-4a} - c \right) \right]}$$

כיוון ש- $b^2 - 4ac < 0$ נקבל כי $-\frac{b^2}{-4a} + c < 0$. כלומר הביטוי $\left(-\frac{b^2}{-4a} - c \right)$ חיובי ולכן $\left(\sqrt{-ax} - \frac{b}{2\sqrt{-a}} \right)^2 + \left(-\frac{b^2}{-4a} - c \right)$ חיובי ולכן הביטוי תחת השורש שלילי, ואז השורש כלל לא מוגדר!

3.8 שיטת המכנה המשותף המינימלי

בהנתן ביטוי שבו מופיעים כמשתנים רק $x, \frac{ax+b}{cx+d}$ עם חזקות רציונליות, נסמן את החזקות של הביטויים ב- $\frac{m_i}{n_i}$ ונציב $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ כאשר $n = \text{lcm}\{n_i\}$ (הכפולה המשותפת המינימלית של המכנים).

דוגמה 3.16. נחשב את $\int \frac{x+(x+4)^{1/2}}{(x+4)+(x+4)^{2/3}} dx$. נציב

$$t^6 = \frac{x+4}{0x+1} = x+4 \Rightarrow 6t^5 dt = dx$$

כי $6 = \text{lcm}\{1, 2, 3\}$ אז

$$\begin{aligned} \int \frac{x + (x+4)^{1/2}}{(x+4) + (x+4)^{2/3}} dx &= \int \frac{t^6 - 4 + t^3}{t^6 + t^4} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t(t^6 + t^3 - 4)}{t^2 + 1} dt \\ &= 6 \int \left(t^5 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{5t}{t^2 + 1} + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= 6 \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t - \frac{5}{2} \ln |t^2 + 1| + \arctan(t) \right) + c \end{aligned}$$

נעזרו בחילוק ארוך של פולינומים) ונשארת רק ההצבה חזרה ל- x .

3.9 פונקציות היפרבוליות

הגדרה 3.17. נגדיר את הסינוס ההיפרבולי והקוסינוס ההיפרבולי

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

שמקיימות זהויות דומות מאוד לאלו של פונקציות טריגונומטריות:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \bullet$$

$$\cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh(2x)}{2} \quad \bullet$$

$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \quad \bullet$$

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \quad \bullet$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \quad \bullet$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x) \quad \bullet$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \quad \bullet$$

דוגמה 3.18. חשבו את $I = \int x^2 \sqrt{4 + x^2} dx$

פתרון. בעזרת הצבה נחשב

$$\begin{aligned}
I &= [x = 2 \sinh(t), dx = 2 \cosh(t)dt] = \\
&= 2^2 \int \sinh^2(t) \sqrt{4(1 + \sinh^2(t))} 2 \cosh(t) dt \\
&= 2^4 \int \sinh^2(t) \cosh^2(t) dt = 2^2 \int (2 \sinh(t) \cosh(t))^2 dt \\
&= 4 \int \sinh^2(2t) dt = 4 \int \frac{\cosh(4t) - 1}{2} dt = 2 \left(\frac{\sinh(4t)}{4} - t \right) + c \\
&= 2 \left(\frac{\sinh \left(4 \sinh^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right)}{4} - \sinh^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + c
\end{aligned}$$

3.10 נגזרת של פונקציה המוגדרת באמצעות אינטגרל

4 יסודות לאינטגרל מסויים

4.1 חישוב שטח

4.2 חישוב נפח גוף סיבוב

4.3 חישוב אורך עקומה

5 אינטגרלים מוכללים

5.1 אינטגרלים על קטע אינסופי

5.2 אינטגרלים על קטע סופי של פונקציות לא חסומות

5.3 תנאים לקיום אינטגרלים בקטע אינסופי

משפט 5.1 (מבחן האינטגרל להתכנסות טורים חיוביים). תהי $f(x)$ פונקציה חיובית מונוטונית יורדת ורציפה בקטע $[a, \infty)$. אזי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אם ורק אם הטור החיובי $\sum_{k=0}^\infty f(a+k)$ מתכנס (כלומר האינטגרל והטור מתכנסים ומתבדרים יחד).

תרגיל 5.2. הוכח כי האינטגרל $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln(x)} dx$ מתבדר.

פתרון. האינטגרל מתכנס אם הטור $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln(k)}$ מתכנס אם"ם (ממבחן העיבוי) הטור $\sum_{k=2}^\infty \frac{2^k}{2^k \ln(2^k)} = \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{\ln(2) \cdot k}$ מתכנס, אבל ידוע שהטור האחרון מתבדר.

תרגיל 5.3. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$ מתכנס.

פתרון. בעזרת מבחן האינטגרל מספיק להראות כי האינטגרל $I = \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)(\ln(x+1))^2}$ מתכנס. בעזרת הצבה נקבל

$$I = \left[t = \ln(x+1), dt = \frac{dx}{x+1} \right] = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{dt}{t^2}$$

והאינטגרל מתכנס.

תרגיל 5.4. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{\arctan n}{1+n^2}$ מתכנס.

פתרון. בעזרת מבחן האינטגרל נראה כי האינטגרל $I = \int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ מתכנס. בעזרת הצבה נקבל

$$I = \left[t = \arctan x, dt = \frac{dx}{1+x^2} \right] = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t dt = \dots = \frac{3}{32} \pi^2$$

האינטגרל מתכנס, ולכן גם הטור. שימו לב שיש לוודא שמתקיימים תנאי מבחן האינטגרל. כלומר, שהפונקציה $\frac{\arctan x}{1+x^2}$ מונוטונית יורדת לכל $x \geq 1$. אפשר לראות זאת לפי כך שהנגזרת שלה שלילית לכל $x \geq 1$.

5.3.1 הערות

הערה 5.5. ניתן לנסח גרסאות של משפט ההשוואה ומשפט המנה (מבחן ההשוואה הגבולי) גם עבור אינטגרלים על קטע סופי של פונקציות לא חסומות.

הערה 5.6. יהי $a > 0$. האינטגרל $\int_a^\infty \frac{dx}{x^r}$ מתכנס אם $r > 1$, ואחרת ($r \leq 1$) הוא מתבדר. אינטגרל זה הוא מאוד שימושי בבדיקה של התכנסות אינטגרלים בקטע אינסופי.

הערה 5.7. יהי $b > 0$. האינטגרל $\int_0^b \frac{dx}{x^r}$ מתכנס אם $0 < r < 1$, אם $r \geq 1$ הוא מתבדר, ואם $r \leq 0$ הפונקציה אינטגרבלית לפי רימן. אינטגרל זה הוא מאוד שימושי בבדיקה של התכנסות אינטגרלים של פונקציות לא חסומות בקטע סופי. שימו לב שהערכים של r בהם האינטגרל מתכנס או מתבדר הפוכים מן המקרה של אינטגרל בקטע אינסופי.

תרגיל 5.8. קבעו האם האינטגרל $I = \int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x} - 1} dx$ מתכנס או מתבדר. פתרון. נשתמש במבחן המנה, ונשווה עם $\int_0^2 \frac{dx}{x^{\frac{2}{5}}}$. נחשב:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x} - 1}}{\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{\sqrt[5]{x^3}} \cdot \frac{\sin x}{e^{\sin x} - 1} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x} \cdot x^{\frac{2}{5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{\sqrt[5]{x^3}} \cdot \frac{\sin x}{e^{\sin x} - 1} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x}{x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

האינטגרל $\int_0^2 \frac{dx}{x^{\frac{2}{5}}}$ מתכנס ($r = \frac{2}{5} < 1$) ולכן האינטגרל I מתכנס.

תרגיל 5.9. קבעו האם האינטגרל $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}} dx$ מתכנס או מתבדר. פתרון. נשתמש במבחן המנה, ונשווה עם $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$. נחשב:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[3]{2-x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{2-x} \sqrt[3]{(2+x)(4+x^2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{(2+x)(4+x^2)}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{32}} \end{aligned}$$

האינטגרל $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$ מתכנס ולכן האינטגרל I מתכנס.

6 סדרות וטורי פונקציות

הגדרה 6.1. תהי סדרה של פונקציות (כלומר לכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ מתאימים את הפונקציה $f_n(x)$) המוגדרות בתחום $B \subseteq \mathbb{R}$. יהי $x_0 \in B$ אזי $\{f_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ היא סדרה של נקודות. אם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ נסמנו $f(x_0)$ ונאמר שסדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית ב- x_0 .

הגדרה 6.2. תהי A קבוצת כל הנקודות שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת בהם. הקבוצה A נקראת תחום ההתכנסות של הסדרה. לכל $x \in A$ נסמן $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. הפונקציה $f(x)$ (אם קיימת) נקראת פונקציית הגבול של סדרת הפונקציות.

דוגמה 6.3. נקבע התכנסות של $f_n(x) = x^n$ בקטע $[-1, 1]$. אז לפי הגדרה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \text{undefined} & x = -1 \end{cases}$$

הגדרה 6.4. תהי סדרה של פונקציות המוגדרות בתחום $B \subseteq \mathbb{R}$. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים (ס"ח) $\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ שלה להיות $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. את פונקציית הגבול נסמן $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

דוגמה 6.5. מסדרת הסכומים החלקיים של $f_n(x) = x^n$ בקטע $[-1, 1]$ נקבל כי

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ \infty & x = 1 \\ \text{undefined} & x = -1 \end{cases}$$

6.1 התכנסות במידה שווה

הגדרה 6.6. תהי סדרה של פונקציות עם תחום התכנסות A ופונקציית גבול $f(x)$. נאמר שההתכנסות היא במידה שווה (במ"ש) אם

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

הסבר להגדרה: סביב פונקציית הגבול $f(x)$ ניקח "פס- ε ", כלומר המרווח בין $f(x) + \varepsilon$ לבין $f(x) - \varepsilon$. הסדרה $\{f_n(x)\}$ תתכנס במ"ש ל- $f(x)$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שממנו והלאה כל פונקציה $f_n(x)$ תהיה מוכלת כולה (בתחום A) בתוך אותו "פס- ε ".

דוגמה 6.7. סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ בכל הישר מתכנסת לפונקציה $f(x) = 0$. נטען כי ההתכנסות היא במ"ש.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. נבחר $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ואז לכל $n > n_0$ ולכל x ממשי מתקיים

$$\frac{1}{x^2+n} - 0 < \frac{1}{x^2+n_0} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

□

דוגמה 6.8. סדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ בקטע $[0, 1]$ מתכנסת ל- $f(x) = 0$, אבל ההתכנסות אינה במ"ש. למשל, עבור $\varepsilon = \frac{1}{4}$ לכל n נוכל לקחת $x = 2^{-\frac{1}{n}}$ ונקבל $f_n(x) = \frac{1}{4} \not< \varepsilon$

הגדרה 6.9. תהי $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרה של פונקציות עם תחום התכנסות A ופונקציית גבול $f(x)$. הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ נקרא טור פונקציות.

צורת רישום 6.10. בהינתן טור פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, ההפרש $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ נקרא השארית של הטור.

הגדרה 6.11 (התכנסות במ"ש לטורים). תהי $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרה של פונקציות עם תחום התכנסות A , סס"ח $\{S_n(x)\}$ ופונקציית הגבול של סס"ח היא $S(x)$. נאמר שההתכנסות היא במ"ש אם

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, x \in A : |r_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

משפט 6.12 (מבחן ה- M של ויירשטראס). אם קיימת סדרת מספרים $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ כך שמתקיים $|f_k(x)| \leq a_k$ (לכל $x \in A$) וגם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במ"ש בתחום A .

דוגמה 6.13. הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^n(x)}{n^2}$ מתכנס במ"ש בקטע $[-1, 32]$ כי מתקיים שם $\left| \frac{\sin^n(x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ וטור המספרים $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ מתכנס.

משפט 6.14. קריטריון קושי להתכנסות במ"ש של טור פונקציות (נקרא גם קריטריון $\lim - \sup$) אומר שסדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ עם תחום התכנסות A ופונקציה גבול $f(x)$ מתכנסת במ"ש אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |r_n(x)| = 0$$

תרגיל 6.15. קבעו האם סדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ n^2 (\frac{2}{n} - x) & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

מתכנסת במ"ש.

פתרון. ברור שפונקציה הגבול היא $f(x) = 0$. ההתכנסות אינה במ"ש כי

$$\sup_{x \in [0,1]} |r_n(x)| \geq \sup_{x \in [0,1]} \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = n \rightarrow \infty$$

תרגיל 6.16. האם סדרת הפונקציות $f_k(x) = \frac{kx}{1+x^2k^2}$ מתכנסת במ"ש בקטע $[0, 1]$?

פתרון. נתחיל עם התכנסות: יהי x בקטע, אזי $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kx}{1+x^2k^2} = 0$. נותן לבדוק האם ההתכנסות במ"ש. נבדוק את $\sup_{x \in [0,1]} \frac{kx}{1+x^2k^2}$ ע"י גזירה שלה והשוואה ל-0:

$$f'_k(x) = \frac{k(1+x^2k^2) - 2xk^2 \cdot kx}{(1+x^2k^2)^2} = 0$$

ומכאן ש $k^3 x^2 = k$ ולכן $x = \frac{1}{k}$. נבדוק האם זו נקודת מינימום או מקסימום

$$f_k(0) = 0, f_k(1) = \frac{k}{1+k^2} < \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{k}\right)$$

ולכן זו נקודת מקסימום שערכה $\frac{1}{2}$. $f_k(\frac{1}{k}) = \frac{1}{2}$. כעת,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0$$

ולכן ההתכנסות אינה במ"ש.

תרגיל 6.17. האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{n}$ מתכנס במ"ש בקטע $[-1, 3]$?

פתרון. מבחן ה- M נכשל פה כי $\left| \frac{(-1)^n x^2}{n} \right| \leq \frac{9}{n}$ שאינו טור מתכנס, אבל כיוון שזה טור מחליף סימן אנו יודעים לפי לייבניץ כי הטור מתכנס לכל x בתחום.

כעת נסמן את פונקציית הגבול ב- $S(x)$ ואז (כיוון שממשפט לייבניץ גם מתקיים

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq |a_{n+1}|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |r_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^2}{n+1} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n+1} = 0$$

כלומר ההתכנסות במ"ש.

משפט 6.18. תהי סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ של פונקציות רציפות המתכנסות בקטע $[a, b]$, המתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)$. אזי גם $f(x)$ רציפה.

הערה 6.19. ניתן להחליף את תנאי הרציפות בקטע $[a, b]$ באינטגרביליות רימן בקטע, ואז פונקציית הגבול גם היא אינטגרבילית רימן. לפי המשפט, אם הפונקציה $f(x)$ אינה רציפה בתחום ההתכנסות A , אזי בהכרח הסדרה $\{f_n(x)\}$ אינה מתכנסת במ"ש.

הערה 6.20. שימו לב ששילת המשפט אינה נכונה. תתכן סדרת פונקציות שאינה מתכנסת במ"ש, אך מתכנסת לפונקציית גבול רציפה. למשל הסדרה $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ בקטע $[0, 1]$ אינה מתכנסת במ"ש, למרות שפונקציית הגבול $f(x) = 0$ רציפה.

הערה 6.21. עבור $\{f_n = x + \frac{1}{n}\}$ מתכנסת במ"ש ל- x שאינה חסומה! (השלם...)

דוגמה 6.22. סדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n$ בקטע $[0, 1]$ אינה מתכנסת במ"ש ל-

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}, \text{ כי } f(x) \text{ אינה רציפה.}$$

דוגמה 6.23. הפונקציה $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^k(x)}{k^2}$ רציפה, כי $S_k(x)$ מתכנסת במ"ש אליה לפי מבחן ה- M של ויירשטראס.

משפט 6.24 (מבחן דיריכלה). אם בקטע I מתקיימים התנאים

$$1. \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \quad \text{חסומה באופן אחיד. כלומר } |S_n(x)| < M \quad \text{לכל } n \text{ טבעי לכל } x \in I$$

2. סדרה $\{b_n(x)\}$ מונוטונית (עולה או יורדת) מתכנסת במ"ש ל-0.

אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ מתכנס במ"ש.

דוגמה 6.25. הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{x+k}}$ מתכנס במ"ש בקטע $[1, 100]$ כי $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 2$ לכל n ולכל x , וכמו כן $b_k(x) = \frac{1}{\sqrt{x+k}}$ סדרה מונוטונית מתכנסת במ"ש ל-0.

דוגמה 6.26. הטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{x+k}}$ מתכנס בקטע $[1, 100]$ כי מתקיימים תנאי מבחן דיריכלה: הסדרה $b_k(x) = \frac{1}{\sqrt{x+k}}$ מונוטונית מתכנסת במ"ש ל-0.

קעת נראה כי לכל x מתקיים כי $\sum_{k=1}^n \sin(kx)$ חסומה לכל n . עבור $x = 2\pi l$ כאשר $l \in \mathbb{Z}$ הסכום הוא 0. עבור x אחר נקבל

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \sin(kx) \right| &= \left| \operatorname{Imag} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) \right| = \left| \operatorname{Imag} \left(\frac{e^{ix(n+1)} - 1}{e^{ix} - 1} \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{e^{ix(n+1)} - 1}{e^{ix} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{ix} - 1|} \end{aligned}$$

שימו לב כי $|e^{ix} - 1|$ הינה פונקציה קבועה (בתחום ההתכנסות) שאינה תלויה ב- n .

משפט 6.27. תהי סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ של פונקציות רציפות המתכנסות בקטע $[a, b]$, המתכנסת לפונקציה רציפה $f(x)$. אם $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ (או $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$) לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [a, b]$ אז ההתכנסות היא במ"ש.

דוגמה 6.28. סדרת הפונקציות $f_n(x) = |x|^n$ בקטע $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ מתכנסת במ"ש ל- $f(x) = 0$.

מסקנה 6.29. תהי סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ של פונקציות רציפות אי-שליליות שס"ח שלהם מתכנסת בקטע $[a, b]$ לפונקציה $S(x)$ רציפה, אזי ההתכנסות במ"ש.

6.2 אינטגרציה איבר-איבר

משפט 6.30. תהי סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ של פונקציות רציפות וס"ח שלה $\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת במ"ש בקטע $[a, b]$ לפונקציה $S(x)$. אזי

1. $S(x)$ אינטגרובילית בקטע $[a, b]$.

2. מתקיים

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x) dx \right)$$

(כלומר $\int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx$, שזו החלפת סדר הסכום והאינטגרל).

תרגיל 6.31. חשבו את $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 3^k}$.

פתרון. נסתכל בטור $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ולהציב $x = \frac{1}{3}$. נבטא את האיבר הכללי בטור באמצעות אינטגרל מסוים:

$$\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1} dt$$

(שהוא פונקציה של x). בנוסף הטור $\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} = \frac{1}{1-t}$ מתכנס לכל $|t| < 1$, והוא מתכנס במ"ש בכל קטע $[-c, c]$ כאשר $0 < c < 1$ (לפי מבחן ה- M של וירשטראס).

לכן ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר ולקבל

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = S(x)$$

ומפני ש-

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln |1-t| \Big|_0^x = -\ln |1-x|$$

נקבל כי הפתרון לתרגיל הוא

$$S(1/3) = -\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

6.3 גזירה איבר-איבר

משפט 6.32. תהי סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ של פונקציות גזירות ברציפות. אם

1. הטור $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס (נקודתית) בקטע $[a, b]$.

2. טור הנגזרות $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $[a, b]$.

אז $S(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a, b]$ וגם גזיר, ומתקיים

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

(כלומר $S'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x)$, נגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות).

תרגיל 6.33. מצאו תחום התכנסות ותחום רציפות של $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$, ומצאו

את הנגזרת שלה (אם קיימת).

פתרון. עבור $x > 0$ זהו טור חיובי. כיוון ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)}{\frac{x}{n^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(y)}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1+y^2} = 1$$

(המעבר נכון בגלל שיש התכנסות בצד ימין של המשוואה), נוכל להשוואת אותו עם

$$\text{הטור } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{n^2} = x \cdot \frac{\pi^2}{6} \text{ שמתכנס.}$$

עבור $x < 0$ זהו טור שלילי שניתן להשוואת שוב עם $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$. לכן תחום ההתכנסות

הוא כל הישר הממשי.

כעת נבדוק רציפות. עבור $x_0 > 0$, כיוון ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{x_0}{n^2}\right)}{\frac{x_0}{n^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(y)}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1+y^2} = 1$$

עבור n מספיק גדול יתקיים כי $\arctan\left(\frac{x_0}{n^2}\right) < 2\frac{x_0}{n^2}$.

מפני שהפונקציה $\arctan(x)$ פונקציה עולה אזי נקבל כי לכל $0 \leq x \leq x_0$ יתקיים

$$\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \leq \arctan\left(\frac{x_0}{n^2}\right) < 2\frac{x_0}{n^2}$$

מפני שהפונקציה $\arctan(x)$ פונקציה אי-זוגית, נקבל כי לכל $|x| \leq x_0$ יתקיים

$$\left|\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right| < 2\frac{x_0}{n^2} : |x| \leq x_0$$

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} 2\frac{x_0}{n^2}$$

ולכן ההתכנסות במ"ש בקטע $[-x_0, x_0]$ לפי מבחן ה- M של ויירשטראס (תחילת הטור לא תשנה). כיוון שלכל n הפונקציה $\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$ רציפה, נקבל כי פונקצית הגבול בקטע $[-x_0, x_0]$ רציפה. הואיל וכל x ממשי נמצא באיזה שהוא קטע $[-x_0, x_0]$, אז הרציפות היא בכל הממשיים.

כעת נבדוק גזירות. נרצה להשתמש בגזירה איבר-איבר: לכל n מתקיים

$$\left(\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right)' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^4}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2 + \frac{x^2}{n^2}} \leq \frac{1}{n^2}$$

ולכן טור הנגזרות מתכנס במ"ש (שוב, לפי מבחן ה- M של ויירשטראס). לפי משפט

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{x^2}{n^2}}$$

7 השלמה: פונקציות של שני משתנים

7.1 הגדרה. פונקציה $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת רציפה בנקודה (x_0, y_0) אם

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

7.2 תרגיל. בדקו רציפות של הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^4 + y^2 = 0 \end{cases}$$

בתחום הגדרתה.

פתרון. לכל $(x, y) \neq (0, 0)$ הפונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות, שבו המכנה אינו אפס. עבור הנקודה $(0, 0)$ נבדוק שני מסלולים שונים

$$\lim_{x=0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0$$

אבל

$$\lim_{y=x^2, x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

כלומר הגבול לנקודה $(0, 0)$ לא קיים, ולכן הפונקציה f לא רציפה בה.

תרגיל 7.3. בדקו רציפות של הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

בתחום הגדרתה.

פתרון. לכל $(x, y) \neq (0, 0)$ הפונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות, שבו המכנה אינו אפס. עבור הנקודה $(0, 0)$ נראה

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

כי מתקיים

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

כאשר אי השוויון הימני נכון כי $(x - y)^2 \geq 0$, לכן $x^2 + y^2 \geq 2xy$. כלומר הגבול לנקודה $(0, 0)$ קיים ושווה לערך הפונקציה בנקודה, ולכן הפונקציה f רציפה בה.

תרגיל 7.4. העזרו בשיטת כופלי לגראנז' מצאו על האליפסה הנתונה על ידי המשוואה $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$ נקודה הרחוקה ביותר מהראשית ונקודה הקרובה ביותר לראשית.

פתרון. פונקציית המרחק של הנקודה (x, y) מהראשית היא $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. פונקציה זאת תקבל מינ' או מקס' אם"ם הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2$ תקבל ערך מינימלי או מקסימלי. נוסיף משתנה מדומה λ (שנקרא כופל לגראנז') כדי לבנות את הלגראנז'יאן:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda (x^2 + 2xy + 3y^2 - 9)$$

$$L_x = 2x + \lambda (2x + 2y) = 0$$

$$L_y = 2y + \lambda (2x + 6y) = 0$$

$$L_\lambda = x^2 + 2xy + 3y^2 - 9 = 0$$

מהמשוואה של L_x נקבל $\lambda = \frac{-x}{x+y}$ כאשר $x \neq y$. מהמשוואה של L_y נקבל

$$y - \frac{x}{x+y} (x + 3y) = 0$$

$$xy + y^2 - x^2 - 3xy = 0$$

$$y^2 = x^2 + 2xy$$

ומהמשוואה של L_λ נקבל

$$x^2 + 2xy = 9 - 3y^2$$

$$y^2 - 9 + 3y^2 = 0$$

$$y^2 = \frac{9}{4}$$

$$y = \pm \frac{3}{2}$$

ולכן בהצבה $y = \frac{3}{2}$ במשוואה של L_λ נקבל

$$\begin{aligned}x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{9}{4} - 9 &= 0 & / \cdot 4 \\4x^2 + 12x - 9 &= 0 \\x_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 36}}{4} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

כלומר יש נקודות חשודות $\left(\frac{-3 \pm 3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right)$. בהצבה $y = -\frac{3}{2}$ נקבל

$$\begin{aligned}x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{9}{4} - 9 &= 0 & / \cdot 4 \\4x^2 - 12x - 9 &= 0 \\x_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 36}}{4} = \frac{3 \pm 3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

כלומר יש נקודות חשודות $\left(\frac{3 \pm 3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

נציב בפונקציה את הנקודות הנ"ל כדי לקבל את התשובה כי הפונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית ולכן מקבלת ערכי מינימום ומקסימום בקבוצה זו. לכן התשובה היא

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= f\left(\frac{-3 - 3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\&= \frac{9 + 18\sqrt{2} + 18 + 9}{4} = \frac{36 + 18\sqrt{2}}{4} = \frac{18 + 9\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

שהיא נקודת מקסימום כי עבור הנקודות האחרות נקבל מינימום:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3 - 3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= f\left(\frac{-3 + 3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3 - 3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\&= \frac{9 - 18\sqrt{2} + 18 + 9}{4} = \frac{36 - 18\sqrt{2}}{4} = \frac{18 - 9\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

תרגיל 7.5 (ממבחן). מצאו את ערכי המינימום והמקסימום של הפונקציה $f(x, y) = xy$ בתחום $\frac{x^2}{4} + 4y^2 \leq 1$.

פתרון. הפונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית (עבורנו זו קבוצה סגורה וחסומה) ולכן מינימום ומקסימום מתקבלים. לכן מספיק להשוות את ערכי הפונקציה בנקודות החשודות בתוך התחום על השפה.

$$f_x = y = 0$$

$$f_y = x = 0$$

$$(0, 0) \in \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leq 1 \right\}$$

נמצא נקודות חשודות על השפה

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda \left(\frac{x^2}{4} + 4y^2 - 1 \right)$$

$$L_x = y + \lambda \left(\frac{2x}{4} \right) = 0$$

$$L_y = x + \lambda (8y) = 0$$

$$L_\lambda = \frac{x^2}{4} + 4y^2 - 1 = 0$$

מהמשוואה של L_x נקבל $\lambda = -\frac{2y}{x}$ עבור $x \neq 0$ ומהמשוואה של L_y נקבל

$$x - \frac{2y}{x} \cdot 8y = 0$$

$$x^2 - 16y^2 = 0$$

$$x^2 = 16y^2$$

ונציב במשוואה של L_λ :

$$4y^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

$$y^2 = \frac{1}{8}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{8}}$$

ולכן $x = \pm\sqrt{2}$. הנקודות החשודות הן $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{8}})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{1}{8}})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{8}})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{1}{8}})$. הערכים בנקודות האלו הם

$$f(0, 0) = 0$$

$$f\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{8}}\right) = f\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \max$$

$$f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{8}}\right) = f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \min$$

תרגיל 7.6 (ממבחן). תהי הפונקציה $f(x, y) = xy + \frac{x}{2}$ בתחום סגור D המוגבל ע"י הישרים $x = 0$, $y = 0$, $y = 4 - x$. האם יש ל- f מקסימום בתחום זה? אם כן, מצאו אותו.

פתרון. הפונקציה $f(x, y)$ רציפה בקבוצה קומפקטית ולכן מקבלת בקבוצה זו מינימום ומקסימום. נמצא את הנקודות החשודות בתחום

$$f_x = y + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$f_y = x = 0$$

ונשים לב כי $(0, -\frac{1}{2}) \notin D$. נמצא נקודות חשודות על השפה

$$y = 0 \Rightarrow f(x, 0) = \frac{x}{2}$$

$$f_x = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0, y) = 0$$

$$y = 4 - x \Rightarrow f(x, 4 - x) = x(4 - x) + \frac{x}{2} = \frac{9x}{2} - x^2$$

$$f_x = \frac{9}{2} - 2x = 0$$

$$x = \frac{9}{4} \Rightarrow y = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

כלומר צריך לבחון את $(0, y)$ עבור $0 \leq y \leq 4$, ואת קודקודי המשולש $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 0)$. נקבל

$$f(0, 0) = f(0, 4) = 0$$

$$f(4, 0) = 2$$

$$f\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{4}\right) = \frac{63}{16} + \frac{9}{8} = \frac{63 + 18}{16} = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16} \Rightarrow \max$$

והמינימום מתקבל עבור $(0, y)$ לכל $0 \leq y \leq 4$.

תרגיל 7.7. מצאו את נקודות קיצון מקומי של הפונקציה $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

פתרון. הנגזרות החלקיות הן

$$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0$$

$$f_y = 6xy - 36 = 0$$

ונקבל זוג משוואות

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$2xy = 12$$

ומסכום והפרש שלהן נוכל לחשב

$$(x + y)^2 = 25 \Rightarrow x + y = 5 \vee x + y = -5$$

$$(x - y)^2 = 1 \Rightarrow x - y = 1 \vee x - y = -1$$

נקבל ארבע נקודות עבור ארבע האפשרויות

$$x + y = 5 \wedge x - y = 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow (3, 2)$$

$$x + y = -5 \wedge x - y = 1 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow (-2, -3)$$

$$x + y = 5 \wedge x - y = -1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow (2, 3)$$

$$x + y = -5 \wedge x - y = -1 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow (-3, -2)$$

ההסיאן של מערכת המשוואות יזהה אלו נקודות חשודות הן מינימום (ההסיאן חיובית לחלוטין), אלו הן מקסימום (ההסיאן חיובית לחלוטין) ואלו הן אוסף (ערכים עצמיים שוני סימן):

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

המינורים הראשיים שלה הם $\Delta_1 = 6x$, $\Delta_2 = 36(x^2 - y^2)$. נציב ונקבל

$$\Delta_1(3, 2) = 18 > 0$$

$$\Delta_2(3, 2) = 36(9 - 4) > 0 \Rightarrow \min$$

$$\Delta_1(-2, -3) = -12 < 0$$

$$\Delta_2(-2, -3) = 36(4 - 9) < 0 \Rightarrow \text{saddle}$$

$$\Delta_1(2, 3) = 12 > 0$$

$$\Delta_2(2, 3) = 36(4 - 9) < 0 \Rightarrow \text{saddle}$$

$$\Delta_1(-3, -2) = -18 < 0$$

$$\Delta_2(-3, -2) = 36(9 - 4) > 0 \Rightarrow \max$$

וערך הקיצון במינימום הוא

$$\begin{aligned} f(3, 2) &= 3^3 + 3 \cdot 3 \cdot 2^2 - 39 \cdot 3 - 36 \cdot 2 + 26 \\ &= 27 + 36 - 117 - 72 + 26 = 89 - 189 = -100 \end{aligned}$$

ובמקסימום

$$\begin{aligned} f(-3, -2) &= -3^3 + 3 \cdot (-3) \cdot (-2)^2 - 39 \cdot (-3) - 36 \cdot (-2) + 26 \\ &= -27 - 36 + 117 + 72 + 26 = -63 + 189 + 26 = 152 \end{aligned}$$

מקורות

[1] אתר הקורס, www.math-wiki.com.