

## בוּחַן בַּחֲשׁוֹן אֵינְפִינִיטִיִּסִימָלִי 1

יש לענות על כל השאלות. הקפידו לנמק היטב את תשובותיכם. משך הבוחן שעתיים. ניתן להשתמש במחשבון פשוט (אם כי אין באמת צורך).

1. (25 נק') נתונה הקבוצה הבאה:

$$A = \left\{ m + \frac{1}{n} \mid m \in \{1, 2, 3\}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

האם לקבוצה יש חסם עליון (sup)? אם כן, מצאו אותו.  
האם לקבוצה יש מקסימום? אם כן, מצאו אותו.  
האם לקבוצה יש חסם תחתון (inf)? אם כן, מצאו אותו.  
האם לקבוצה יש מינימום? אם כן, מצאו אותו.  
הוכיחו תשובותיכם.

2. (25 נק') נתונה סדרה על ידי כלל נסיגה

$$a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}, \quad a_1 = 2$$

קבעו האם הסדרה מתכנסת. אם כן, חשבו את גבולה.

3. (25 נק') תהי  $a_n$  סדרה. הוכיחו כי

$$\overline{\lim} a_n = -\underline{\lim}(-a_n)$$

( כלומר:  $\limsup a_n = -\liminf(-a_n)$  )

4. (25 נק') קבעו האם הטורים החיוביים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2} \quad (\text{ב})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n + n^2 + 5} \quad (\text{ג})$$