

## תרגיל בית 3 מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשע"ח

**הוראות** זכרו למלא ולהגיש את הדו"ח.

**שאלה 1.** יהי  $F$  שדה, ויהי  $R$  חוג. הוכיחו שאם  $\varphi: F \rightarrow R$  אפימורפיזם של חוגים, אז גם  $R$  שדה.

**שאלה 2.** יהי  $R$  חוג, ויהיו  $I, J, K \triangleleft R$  אידאלים.

א. הוכיחו  $(I \cap J)(I \cap J) \subseteq IJ \subseteq (I \cap J)$ .

ב. הוכיחו  $I(J + K) = IJ + IK$ .

**שאלה 3.** יהי  $R$  חוג, ויהי  $I \triangleleft R$  אידאל. ראינו כי  $M_n(I) \triangleleft M_n(R)$  (לא בטוחים למה זה נכון? הוכיחו זאת!). הוכיחו

$$M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$$

**שאלה 4.** יהי  $\mathbb{H}$  חוג הקוטרניונים של המילטון.

א. הוכיחו כי  $\mathbb{H}$  אינו איזומורפי לחוג  $M_2(\mathbb{R})$ . שימו לב שזה מפתיע, כי שניהם חוגים פשוטים ושהם איזומורפיים כמרחבים וקטוריים מעל  $\mathbb{R}$  (שניהם מממד 4).

ב. רשות: הוכיחו שהחוג

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

איזומורפי לחוג  $M_2(\mathbb{R})$ . רמז: הראו שהחוגים האלו צמודים כתת-חוגים של  $M_2(\mathbb{C})$ . בדרך אחרת, למי שמכיר, מצאו מערכת של יחידות מטריצה ובנו את האיזומורפיזם ביניהם בעזרתה.

**שאלה 5.** יהי  $R$  חוג. איבר  $e \in R$  יקרא אידמפוטנט אם  $e^2 = e$ . אידמפוטנט  $e \in R$  הוא לא טריוויאלי אם  $e \neq 0_R, 1_R$ . בתרגיל הזה נמצא דרך לזהות שחוג  $R$  הוא מכפלה ישרה של חוגים.

א. יהיו  $S, S'$  חוגים. הוכיחו שאם  $R \cong S \times S'$ , אז קיים ב- $R$  אידמפוטנט מרכזי לא טריוויאלי.

ב. אידמפוטנטים  $e, f \in R$  נקראים אידמפוטנטים אורתוגונליים אם  $ef = fe = 0$ . הוכיחו שאם  $e \in R$  אידמפוטנט, אז גם  $1 - e$  אידמפוטנט. הוכיחו כי  $e$  ו- $1 - e$  הם אורתוגונליים.

ג. הוכיחו שאם  $e \in R$  הוא אידמפוטנט מרכזי לא טריוויאלי, אז קיים איזומורפיזם של חוגים  $\varphi: R \rightarrow Re \times R(1 - e)$ . רמז: זה סעיף קצת ארוך, אבל בעיקר טכני. כתבו במפורש לכל  $x \in R$  מהו  $\varphi(x)$  ובדקו שאכן מדובר באיזומורפיזם של חוגים.

בשתי השאלות הבאות, שיש להן סגנון דומה, נשתמש בסימון  $I \leq_l R$  כדי לומר ש- $I$  הוא אידאל שמאלי של  $R$ . כלומר  $RI \subseteq I$ .

**שאלה 6.** יהי  $R$  חוג בלי יחידה, ויהי  $I \leq_l R$  אידאל שמאלי. נסמן  $I^+ = \{x \in R \mid xR \subseteq I\}$ .

א. הוכיחו  $I^+ \triangleleft R$  אידאל דו-צדדי.

ב. הוכיחו שאם  $I \triangleleft R$ , אז  $I \subseteq I^+$ .

ג. הוכיחו שאם  $R$  חוג (עם יחידה), אז  $I^{++} = I^+$ .

**שאלה 7.** יהי  $R$  חוג, ותהי  $A \subseteq R$  תת-קבוצה. נגדיר את המאפס השמאלי של  $A$  להיות

$$\text{Ann}_l(A) = \{x \in R \mid \forall a \in A, xa = 0\}$$

א. הוכיחו כי  $\text{Ann}_l(A) \leq_l R$  אידאל שמאלי.

ב. הוכיחו שאם  $A \leq_l R$ , אז  $\text{Ann}_l(A) \triangleleft R$ .

ג. נניח  $A, B \subseteq R$  תת-קבוצות המכילות את 0. הוכיחו

$$\text{Ann}_l(A + B) = \text{Ann}_l(A) \cap \text{Ann}_l(B)$$

בהצלחה!