משפט (על השיכון והומיאומורפיזם):

נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה וחח"ע. אזי f שיכון טופולוגי

(ז"א $f: X \to f(X)$ הומיאומורפיזם).

הוכחה: מ"ל את המשפט בהנחה ש – f על. ואז צ"ל f הומיאומורפיזם.

תנאים (1) ו – (2) בהגדרת הומיאומורפיזם מתקיימים עפ"י הנתון (ישר).

3) רציפות של ההופכי – $X \xleftarrow{f^{-1}} Y = f(X)$

לפי קריטריון 3 על רציפות, מספיק להראות ש – f פונקציה סגורה. כאן נשתמש במשפט הקודם.

■

הערה: א. במקרה הפרטי, אם בנוסף f על אז נקבל הומיאומורפיזם.

ב. קומפקטיות של X חשובה מאוד. ראינו דוגמאות...

ג. $f(X)$ סגור.

תוצאה: נניח $(X,\tau) \in \text{Comp}$ ו σ טופולוגיה על X עם תכונת T_2 (*Hausdorff*) כך ש $\tau \subseteq \sigma$. אז $\sigma = \tau$.

הגדרה: נניח $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$ אוסף תת קבוצות בקבוצה X.

א) $\boldsymbol{\alpha \in FIP}$ תכונת החיתוך הסופי, אם – $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ לכל $J \subseteq I$ **סופית**.

ב) $\boldsymbol{\alpha \in IP}$ אם $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

(ברור ב $\Leftarrow$ א).

דוגמה: כל סדרה $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ יורדת $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ של קבוצות לא ריקות היא FIP

למשל: $A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\}, n \in \mathbb{N}$

$$\alpha = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in FIP \setminus IP$$

<u>משפט (קריטריון FIP של $Comp$):</u> נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Comp$.

2) $$\begin{cases} FIP \ni \alpha = \{A_i\}_{i\in I} \\ \forall i \in I: \text{סגורה } A_i \end{cases} \Leftarrow IP \ni \alpha$$

<u>הוכחה:</u>

שימו לב ש - $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X אם ורק אם האוסף של המשלימים $\{O_i^c\}_{i\in J}$ (קבוצות סגורות) הוא לא IP.

$$\bigcup O_i = X \leftrightarrow \bigcap O_i^c = \emptyset$$

כללי *de Morgan* והגדרת *Comp*...

■

<u>דוגמה:</u> $\mathbb{R} \notin Comp$ (דרך FIP).

$A_n := [n,\infty), n \in \mathbb{N}$ סגורות ו- $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP \backslash IP$$

<u>דוגמה:</u> $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \notin \mathrm{Comp}$

$A_k = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, k \le n\}$ סגור $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$.

תזכורת: <u>קריטריון *Cantor* לשלמות מאינפי:</u>

התנאים הבאים שקולים:

א) (X,d) מ"מ <u>שלם</u>.

ב) לכל סדרה יורדת $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$

של קבוצות <u>סגורות </u>כך ש – $diam(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מתקיים –

$$\{c\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$

<u>משפט:</u> כל מרחב מטרי (X,d) קומפקטי הוא מ"מ שלם.

<u>הסבר:</u> (דרך קריטריון קנטור + קריטריון *FIP*)

נניח נתונה סדרה יורדת של קבוצות סגורות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$

כך ש $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} diam(A_n)$. אז

$$\alpha = \{A_n\} \in FIP$$

A_n סגור. לכן בגלל הקומפקטיות אכן $\bigcap_{n\in I} A_n \neq \emptyset$.

$$\Downarrow$$

$$\alpha \in IP$$

ואז מקריטריון קנטור נקבל המרחב הוא שלם.

■

<u>**משפט $(Heine - Borel)$:**</u>

נניח $X \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Comp$.

2) X חסום וסגור.

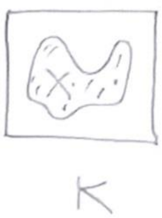
<u>**הוכחה:**</u>

<u>$(1) \Rightarrow (2)$:</u>

<u>חסימות</u> – כל מ"מ קומפקטי הוא חסום (הוכחנו יותר: ח"כ)

<u>סגירות</u> – $\mathbb{R}^n \in T_2$. נפעיל את משפט הסגירות.

<u>$(2) \Rightarrow (1)$:</u>



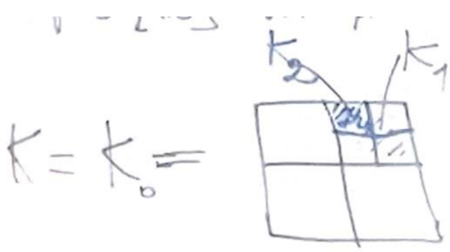
נניח X חסום וסגור. קיימת קובייה $\mathbb{R}^n \supset K$ כך ש – $X \subseteq K$

<u>דרך א':</u> בה"כ $K = [a,b]^n$

אז לפי $Tychonoff$, אכן $K \in Comp$ (אם ידוע ש - $[a,b] \in Comp$).

<u>דרך ב' $(Cantor)$:</u>

נניח בשלילה ש - $Comp \not\ni K$.



ז"א יש כיסוי α פתוח של K ללא תת כיסוי סופי. נחלק תתי קוביות (מספר $= 2^n$) דרך החלוקה של הצלעות. נקרא לתת קובייה – "קובייה בעייתית" אם אין תת כיסוי סופי עבור הכיסוי הנ"ל. אז יש לפחות תת קובייה אחת בעייתית K_1.

באופן דומה נחלק לתתי קוביות ואז יש תת קובייה $K_2 \subset K_1$ כך ש - K_2 בעייתית.

אז נקבל – $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$

סדרה יורדת של קוביות (סגורות לא ריקות).

$$diam(K_i) \to 0$$

$\mathbb{R}^n$ שלם, לכן לפי קריטריון קנטור: יש איבר משותף $\{c\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$

$c \in K$. לכן קיים איבר מסוים של הכיסוי $O_j \in \alpha$ כך ש – $c \in O_j$

בגלל הפתיחות $\exists r > 0: B_r(c) \subset O_j$

לכן – $\exists m \in \mathbb{N}: c \in K_m \subset B_r(c) \subset O_i$

קיבלנו ש K_m מכוסה ע"י איבר אחד O_i של הכיסוי.

לכן K_m לא בעייתית בסתירה לבנייה!

■

<u>הערה:</u> משפט $Heine - Borel$ בד"כ לא נכון אם מחליפים $\mathbb{R}^n$ במרחבים מטריים או נורמיים אחרים.

<u>דוגמה:</u> (כבר דיברנו על זה)

במרחב הילברט l_2 יש תת קבוצה חסומה וסגורה לא קומפקטית.

<u>למשל:</u> $A := \{e_1, e_2, \dots\} \subset l_2$ (דיסקרטי אינסופי לכן לא קומפקטי).

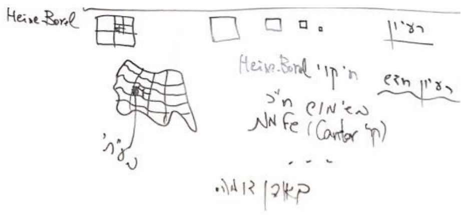
<u>משפט (קומפקטיות במרחב מטרי):</u> נניח (X,d) מ"מ. התנאים הבאים שקולים:

1) $X = \big(X, top(d)\big) \in Comp$.

2) $X \in SComp$ (לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת).

3) $X \in BW$ (תכונת Bolzano-Weierstrass לכל קבוצה <u>אינסופית</u> ב- X יש נקודת הצטברות).

4) (X,d) שלם וחסום כליל.



<u>הוכחה:</u>

<u>$(4) \Leftarrow (1)$:</u>

דומה למשפט $Heine - Borel$.

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח בשלילה שלא, כלומר $X \notin SComp$.

זאת אומרת, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ללא ת"ס מתכנסת ב – X.

נגדיר – $\emptyset \neq A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

ברור $A_1 \supset A_2 \supset \cdots A_n \supset \cdots$ לכן $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP$.

<u>הערה:</u> A_n סגורות. זה נובע מ –

1) <u>במ"מ</u> ידוע ש - $cl(A) = scl(A)$.

2) פרמוטציה של סדרה לא משפיעה על ההתכנסות (או אי התכנסות)

(כאשר אנו משתמשים בהגדרת התכנסות דרך – בכל כדור של הגבול יש <u>כמעט כל האיברים</u>).

כעת – $\begin{cases} X \in Comp \\ FIP \ni \{A_n\} \end{cases} \Rightarrow \{A_n\} \in IP$

זה גורר שקיימת נקודה $c \in \bigcap A_n \neq \emptyset$.

לכן קיימת תת סדרה קבועה $c, c, \dots$ של הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (בסתירה להנחה שאין ת"ס מתכנסת).

<u>$(2) \Leftarrow (3)$:</u>

נניח $A \subseteq X$ <u>אינסופית</u>. צ"ל $A' \neq \emptyset$.

בגלל אינסופיות קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב – A עם איברים <u>שונים</u>.

$X \in SComp \Leftarrow$ קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שמתכנסת ב – X.

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b \wedge a_{n_k} \text{ שונים}$$

$$\Downarrow$$

$$b \in A'$$

$$\Downarrow$$

$$A' \neq \emptyset$$

<u>$(3) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב – X. נוכיח שיש ת"ס מתכנסת.

נגדיר – $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} =: A \supset X$ (תמונה של הסדרה).

אם A <u>סופית</u> אז יש איבר בסדרה שחוזר אינסוף פעם ואז יש תת סדרה קבועה (מתכנסת!).

אם A <u>אינסופית</u> אז לפי הנתון (3): $X \in BW$.

אז קיימת נקודת הצטברות $z \in A'$.

(*) אז קיימת סדרה עם איברים שונים ב – A ששואפת ל – z.

ע"פ אותה הערה על הפרמוטציות...

בה"כ ניתן להניח שיש <u>תת סדרה</u> של $\{x_n\}$ המקיימת את (*).

לכן קיבלנו ת"ס מתכנסת!

<u>(2) ← (4):</u>

- קודם כל נוכיח <u>שלמות</u> של (X, d)

נניח $\{x_n\}$ <u>סדרת קושי</u>. צ"ל שהיא מתכנסת.

תכונה (2) ⇐ יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת ב – X.

תכונה m_3 של מרחבים מטריים ⇐ אם לסדרת קושי יש ת"ס מתכנסת, אז גם הסדרה מתכנסת.

- כעת נוכיח ש - (X, d) ח"כ.

צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ יש תת קבוצה סופית שהיא ε – צפופה (רשת).

נניח בשלילה שקיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שאין ε_0 – רשת. בונים סדרה ללא ת"ס מתכנסת:

ניקח $x_1 \in X$ אז $X \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$ (אחרת $\{x_1\}$ ε_0 – רשת ב - (X, d)).

ניקח $x_2 \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$. אז מתקיים – $B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2) \neq X$

אחרת $\{x_1, x_2\}$ ε_0 – רשת (שימו לב: $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$).

נמשיך כך... נקבל סדרה ... $x_1, x_2, x_3,$.

$$\forall i \neq j : d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$$

אז ברור שאף ת"ס של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא ס"ק .

זה גורר שלסדרה הנ"ל אין ת"ס מתכנסת!

■

משפט טיכונוף (1935) Tychonoff Theorem

נניח $X = \prod_{i \in I} X_i$ מכפלה טופולוגית. אזי X קומפקטי אם ורק אם כל X_i הוא מרחב קומפקטי.

הוכחה:

(כוון אחד)

אם X קומפקטי אז כל X_i היא גם קומפקטי כתמונה רציפה של X לגבי העתקת ההטלה: $p_i : X \to X_i$.

(כוון שני)

נוכיח בשתי דרכים:

דרך א. בעזרת קריטריון קומפקטיות Alexander (דרך תת בסיס).

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות דרך FIP (תכונת החיתוך הסופי).

<u>קריטריון קומפקטיות Alexander</u> **:**

נניח X מרחב טופולוגי ו β תת בסיס (פרא-בסיס) של הטופולוגיה. אזי X קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי $C \subset \beta$ של X (דרך איברים של β) קיים תת כיסוי סופי.

<u>הוכחה של הקריטריון</u>: (נדלג)

כיוון אחד ברור (הגדרה של הקומפקטיות).

כיוון שני: נניח מ"ט X ותת בסיס שלו β מקיימים את התנאי של Alexander.

צ"ל ש X קומפקטי. נניח בשלילה שלא. אז קיים כיסוי פתוח C של X ללא תת כיסוי סופי.

נקרא לכיסוי פתוח "בעייתי" אם אין תת כיסוי סופי.
בה"כ ניתן להניח ש C הוא כיסוי בעייתי *מכסימלי*.
הערה: *מכסימליות* פירוש הדבר – אין גדול ממנו (ולא בהכרח הכי גדול) ז"א כל כיסוי פתוח של X המכיל את C ושונה ממנו הוא לא בעייתי.
<u>הסבר:</u> על מנת להוכיח הקיום של כיסוי כזה נשתמש בלמה של צורן.
שימו לב שאם נתון שרשרת של כיסויים בעייתים אזי האיחוד הוא גם בעייתי.
בגלל המכסימליות של C הוא מקיים את התכונה הבאה:
(*) אם O קבוצה פתוחה שלא שייכת ל C אז $C \cup \{O\}$ לא בעייתי ולכן קיים תת אוסף סופי C_0 של C כך ש $C_0 \cup \{O\}$ מכסה את X.
האוסף $C \cap \beta$ הוא לא מכסה את X
(אחרת תנאי של Alexander גורר ש C לא בעייתי).
לכן קיימת נקודה $z \in X$ כך ש z לא מכוסה ע"י $C \cap \beta$.
קיים $U \in C$ כך ש $z \in U$ (כי C כיסוי).

לפי הגדרת תת בסיס ($\beta^{\cap F}$ הוא בסיס) קיימים מספר סופי של איברים

$S_1,\cdots,S_n \in \beta$ כך ש $z \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subset U$.

אף $S_1,\cdots,S_n$ לא שייך ל C (כי אחרת $C \cap \beta$ מכסה את z).

לכן ע"פ תכונת (*) הנ"ל לכל $1 \le i \le n$ קיים תת אוסף סופי C_i כך ש $C_i \cup \{S_i\}$ מכסה את X .

נסמן: $G_i := \cup\{A : A \in C_i\}$. אז $S_i \cup G_i = X$ ונקבל

$$U \cup (\bigcup_{i=1}^{n} G_i) \supseteq (\bigcap_{i=1}^{n} S_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} G_i) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} (S_i \cup G_i) = X$$

ז"א תת אוסף סופי $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cup \{U\}$ של C מכסה את X . סתירה ! זה מוכיח את הקריטריון.

<u>בעזרתו נוכיח כיוון שני של משפט</u> Tychonoff

בתפקיד של פרא-בסיס β ב $X = \prod_{i \in I} X_i$ ניקח **תיבות אלמנטריות**.

$\alpha := \{\mathrm{p}_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$ פרא-בסיס סטנדרטי. המקורות של קבוצות פתוחות מכל גורם X_i . נניח בשלילה ש X לא קומפקטי. אז לפי קריטריון Alexander קיים תת אוסף C של α כך ש C הוא **כיסוי בעייתי** (ללא תת כיסוי סופי) של X . נציג אותו $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ כאשר כל C_i מורכב מתיבות אלמנטריות שבאות מגורם X_i . לפי ההנחה C_i לא מכיל תת כיסוי סופי של X . אזי $p_i(C_i)$ לא מכיל תת כיסוי סופי של X_i .

אבל X_i קומפקטי ו- $p_i(C_i)$ אוסף של קבוצות **פתוחות**. לכן $p_i(C_i)$ הוא לא כיסוי של X_i קיימת נקודה $x_i \in X_i$ שלא מכוסה ע"י $p_i(C_i)$. אזי הנקודה $x := (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$ לא מכוסה ע"י (כיסוי) C של X . סתירה ! מכאן מש"ל.

☺

<u>**הערה:**</u>

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות FIP (תכונת החיתוך הסופי)

דרך ג. ואולטרה-פילטרים (על-מסנן). *טופולוגיה קבוצתית*, האוניברסיטה הפתוחה (ד. לייבוביץ).

https://en.wikipedia.org/wiki/Tychonoff%27s_theorem

https://en.wikipedia.org/wiki/Compact_space

תוצאות:

- $[0,1]^S \in Comp$ קובית Tychonoff (לכל קבוצה S)
- $[0,1]^{\mathbb{N}} \in Comp$ קובית Hilbert
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots \in Comp$ קובית Cantor

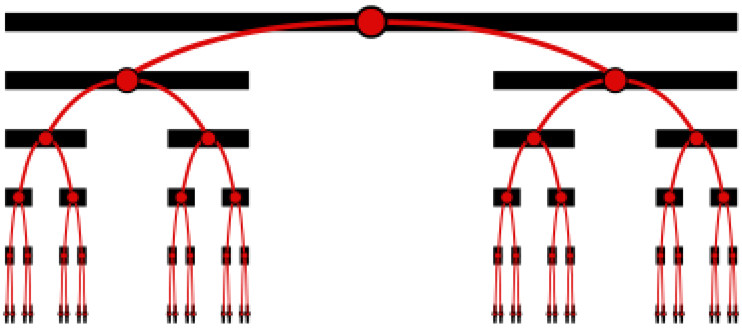
דוגמה (מרחב קנטור)

תזכורת: ידוע שקבוצת קנטור היא $\{c_i \in \{0,2\}\}$ $C := \{c \in [0,1] : c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$.

$C_0 = [0,1],\ C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1})$ $C = \bigcap_n C_n$ חיתוך של קבוצות סגורות

משפט: קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots$.

הוכחה: צ"ל $C \simeq \{0,2\}^{\mathbb{N}}$.



נגדיר פונקציה $f(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ $f : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to C$.

אזי f חח"ע (יחידות ההצגה הנ"ל). f גם פונקציה על (ברור).

$\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ קומפקטי לפי משפט Tychonoff.

לכן בגלל משפט על ההומיאומורפיזם מ"ל f רציפה בכל נקודה
$a = (a_1, a_2, \cdots) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$

מ"ל לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סביבה $O \in N(a)$ כך ש

$$x \in \mathrm{O} \Rightarrow | f(x) - f(a) | < \varepsilon$$

נבחר $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$ ונגדיר תיבה בסיסית

$$O := \{a_1\} \times \{a_2\} \times \cdots \times \{a_{n_0}\} \times \{0,2\} \times \{0,2\} \times \cdots$$

אז ברור $O \in N(a)$ ולכל $x = (a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \cdots) \in O$ מתקיים:

$$| f(x) - f(a) | = | \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} | = | \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} | \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$$

■

<u>תרגיל</u>: הוכיחו ש:

א. $C^2 \simeq C, C^n \simeq C, C^{\mathbb{N}} \simeq C^{\mathbb{Z}} \simeq C$.

ב. C הומוגני.

<u>מידע</u> נוסף על קבוצת קנטור (Cantor set everywhere) :

- כל מרחב קומפקטי מטריזבילי הוא תמונה רציפה של קבוצת קנטור.
- למשל: $(x_i \in \{0,2\})$ $\quad f(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2} \cdot \frac{1}{2^i}$ $\quad f: C \to [0,1]$ (מדוע היא לא חח"ע ?)
- כל מרחב מטרי קומפקטי מטריזבילי בעל מימד אפס ללא נקודות מבודדות הומיאומורפי עם קבוצת קנטור.
- מרחב קנטור $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ חשוב גם באינפורמטיקה, תורת הקודים,
  https://peerj.com/articles/cs-171.pdf
  במערכות דינמיות סמבוליות ...
  "shift homeomorphism $\sigma: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma(x_i) = (x_{i+1})$
  (תבדקו שיש מסלול צפוף לפעולת חבורה ציקלית $G = <\sigma> = \{\sigma^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ על $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$)
- ראו גם: https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

<u>משפט</u>: נניח X מ"ט. התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי והאוסדורפי (ז"א $X \in Comp \cap T_2$).
2. X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קובית Tychonoff $[0,1]^S$.

<u>הוכחה</u>: $2 \Leftarrow 1$

$[0,1]^S \in Comp$ (משפט Tychonoff). תת קבוצה סגורה גם קומפקטית. T_2 תכונה כפלית ותורשתית. לכן $X \in Comp \cap T_2$.

$1 \Leftarrow 2$

נניח $X \in Comp \cap T_2$. מ"ל שקיים שיכון טופולוגי $f: X \to [0,1]^S$ עבור S מסוים.

הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. נשתמש במשפט *Urysohn* $T_4 = T_4^{func}$.

לכל זוג של נקודות שונות $a,b \in X$ נבחרבפונקציה רציפה
$f_{a,b}: X \to [0,1], f(a)=0, f(b)=1$.

אוסף של כל הפונקציות שנבחרו $S := \{f_s = f_{a,b} \mid a \neq b\}$ (ז"א $s=(a,b), a \neq b$)

משרה פונקצית האלכסון $f(x) = (f_s(x))_{s \in S}$ $f: X \to [0,1]^S$.

הפונקציה היא רציפה (הוכחנו ...) "מפרידה נקודות" ז"א היא חח"ע.

לפי משפט השיכון נקבל שהפונקציה היא מגדירה שיכון טופולוגי (על קבוצה סגורה).

☺

<u>הגדרה:</u> נניח α, β כל אחד אוסף תתי קבוצות של קבוצה X. אומרים ש – **β עידון של α** אם מתקיים – $\forall B \in \beta\ \exists A \in \alpha: B \subseteq A$

נסמן: $\beta \prec \alpha$.

<u>דוגמה טריוויאלית:</u> $\beta \subseteq \alpha$ אז $\beta \prec \alpha$.

<u>הגדרה:</u> נניח (X,d) מ"מ, α כיסוי פתוח של X. אומרים ש – α הוא **δ – אחיד**
אם מתקיים $\{B_\delta(x) | x \in X\} \prec \alpha$

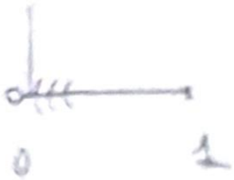
אומרים **כיסוי אחיד** (*uniform covering*) אם הוא δ-אחיד עבור $\delta > 0$ מסוים.

<u>הגדרה</u>: אומרים שהמספר $\delta > 0$ הוא **מספר לבג** $(Lebesgue)$ של כיסוי α אם כל תת קבוצה B ב X בעלת קוטר קטן מ δ מוכל באחד מהאיברים של α.

(ז"א $diam\, B < \delta \Rightarrow \{B\} \prec \alpha$).

<u>הערות:</u>

1) אם $0 < \delta$ מספר לבג של α, אז כל δ_1 כך ש - $0 < \delta_1 < \delta$ גם מספר לבג.



2) עבור $\alpha = \{B_\delta(x) | x \in X\}$, מספר לבג = δ.

3) **<u>דוגמה:</u>** כיסוי פתוח ללא מספר Lebesgue.

$X = (0,1] \notin Comp$

$A_n := \left(\frac{1}{n}, 1\right]$

$\alpha := \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$

כיסוי פתוח של $(0,1]$.

אין מספר לבג עבור α.

אם נניח בשלילה שכן אז קיים $\delta > 0$ מספר לבג ל $- \alpha$,

נגדיר – $A := B_{\frac{2\delta}{5}}(\frac{1}{5}\delta) = (0, \frac{3}{5}\delta)$

אז $diam(A) = \frac{3}{5}\delta < \delta$

אבל A <u>לא מוכל באף איבר של</u> α.

<u>משפט:</u> (מספר Lebesgue)

נניח (X,d) מרחב מטרי קומפקטי. אז לכל כיסוי פתוח α יש מספר לבג.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקים כיסוי פתוח α ללא מספר לבג.

אז לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת תת קבוצה A_n כך ש

$diam(A_n) < \frac{1}{n}$ אבל A_n **<u>לא מוכל באף איבר של</u>** α.

לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר נקודה $a_n \in A_n$.

נתון ש X קומפקטי. הוא מטריזבילי לכן גם $X \in SComp$.

לכן קיימת תת סדרה מתכנסת $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ של הסדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. תהי $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = p$.

α כיסוי. קיים $U \in \alpha$ כך ש $p \in U$ (כי α כיסוי)

קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(p) \subseteq U$ (כי U פתוח)

קיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $diam(A_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad d(p, a_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (התכנסות והבניה)

בגלל m_3 נקבל $A_{n_{k_0}} \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq U$, סתירה!

■

תוצאה: אם מרחב מטרי הוא קומפקטי אז כל כיסוי פתוח שלו אחיד.

הסבר: נניח α כיסוי פתוח. קיים מספר לבג $\delta > 0$. אז $\{B_{\frac{\delta}{3}}(x) : x \in X\} \prec \alpha$.

משפט: נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים $f : X \to Y$ פונקציה רציפה. אם X קומפקטי אז $f : X \to Y$ רציפה במידה שווה.

הוכחה: נניח $\varepsilon > 0$. ש"ל שקיים $\delta > 0$ כך שמתקיים :

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) \le 2\varepsilon$$

נגדיר $\alpha := \{f^{-1}(B_\varepsilon(y) : y \in Y\}$.

אז α כיסוי פתוח של X (רציפות).

קיים מספר לבג $\delta > 0$ עבור α (קומפקטיות של X).

נניח $d(x_1, x_2) < \delta$. אז $diam\{x_1, x_2\} < \delta$. לכן קיים $y \in Y$ כך ש

$$\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(y))$$

אז $\{\mathrm{f}(x_1), \mathrm{f}(x_2)\} \subseteq ff^{-1}(B_\varepsilon(y)) \subseteq B_\varepsilon(y)$.

לכן $\rho(f(x_1), f(x_2)) \le diam(B_\varepsilon(y)) \le 2\varepsilon$.

■

תרגיל: נניח (X, d) מ"מ קומפקטי. הוכיחו שקיימים $x, y \in X$ כך ש –

$$diam(X) = d(x, y)$$

סקיצה: $X \times X \in Comp$ ו $d : X \times X \to [0,\infty)$ רציפה (מדוע)...

תרגיל * (יהיה בתירגול) -- **קומפקטיפיקציה חד-נקודתית** (Alexandroff)

נניח (X,τ) קומפקטי מקומית לא קומפקטי והאוסדורפי. תהי $p \notin X$ ("נקודת האינסוף").

בקבוצה $X^* = X \cup \{p\}$ נגדיר $\tau^* := \tau \cup \{X \setminus K : \ K \ is \ compact\}$

הוכיחו:

1. $(X^*, \tau^*) \in Comp \cap T_2$.
2. פונקצית ההכלה $i : X \to X^*$ מגדירה שיכון טופולוגי צפוף.