

אלגברה לינארית 2 תרגול 4

21 באפריל 2021

תרגילים:

1. תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה משולשית עליונה. מצאו את הפולינום האופייני שלה. פתרון: נקבל שהמטריצה $\lambda I - A$ גם משולשית, ולכן הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון, כלומר:

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - A_{ii})$$

מסקנה: איברי האלכסון הם הערכים העצמיים. הריבוי האלגברי של כל ע"ע, הוא כמות הפעמים שהוא מופיע על האלכסון.

2. תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה, ונתון שיש לה n ע"ע שונים. הוכיחו שהיא לכסינה. פתרון: לכל ע"ע יש לפחות ו"ע אחד (ר"ג הוא לפחות אחד, ולכל היותר הריבוי האלגברי), וכידוע ו"ע של ע"ע שונים הינם בת"ל. כאן, כיון שיש n ע"ע שונים, ולכל אחד ו"ע שבת"ל עם הו"ע של הע"ע האחרים, ביחד יש לנו בסיס המורכב מוקטורים עצמיים, ולכן לכסינה.

3. עבור אילו ערכי $a, b \in \mathbb{R}$ המטריצה הבאה לכסינה:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

פתרון: המטריצה משולשית, ולכן נקבל:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2(\lambda - b)$$

עבור $b \neq 2, 3$: קיבלנו ע"ע: 2 עם ר"א 2, 3 עם ר"א 1, b עם ר"א 1.

	3	2	b
נחשב את הר"ג של 2:	ר"א	1	2
	ר"ג	1	2

$$\dim N(2I - A) = \dim N \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 2 - b \neq 0 \end{pmatrix}$$

יש שני איברי ציר, ולכן המימד הוא 2 .
 בסה"כ: עבור $b \neq 2, 3$ אז לכל a המטריצה לכסינה.
 עבור $b = 2$ נקבל:

	3	2
נחשב ר"ג של 2:	ר"א	1
	ר"ג	1
		$\begin{cases} 3 & a = 0 \\ 2 & a \neq 0 \end{cases}$

$$\dim N(2I - A) = \dim N \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל שעבור $a = 0$ נקבל מימד 3, ולכן לכסינה. עבור $a \neq 0$ נקבל מימד 2 ולכן לא לכסינה.

עבור $b = 3$ נקבל:

	3	2
נחשב ר"ג של 2:	ר"א	2
	ר"ג	2
		$\begin{cases} 1 & a \neq 0 \\ 2 & a = 0 \end{cases}$

$$\dim N(2I - A) = \dim N \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן לכל a יש שני איברי ציר, ולכן ר"ג של 2 הוא 2.

נותר לחשב ר"ג של 3:

$$\dim N(3I - A) = \dim N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור $a \neq 0$ נוכל לדרג לצורה

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן יש שלושה איברים מובילים ור"ג 1, ולכן לא לכסינה. אם $a = 0$ נקבל ר"ג 2 ולכן לכסינה.

4. תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מרטיצה, ונתון $\text{rank}(A) = 1$.

(א) הוכיחו: לכל $x \neq y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ מתקיים: $A - xI$ הפיכה, או $A - yI$ הפיכה. פתרון: נקבל $\dim N(A) = n - 1$ ולכן $\dim N(A - 0I) = n - 1$ ולכן 0 ע"ע עם ר"ג $n - 1$. לכן ר"א של 0 הוא לפחות $n - 1$, וכיון שבסה"כ סכום הריבויים האלגבריים של כל הערכים העצמיים זה לכל היותר n , נקבל שיש לכל היותר ע"ע אחד שונה מאפס. כעת, יהיו $x \neq y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ונניח בשלילה ש- $A - xI$ לא הפיכה וגם $A - yI$ לא הפיכה. העובדה ש- $A - xI$ לא הפיכה אומרת ש- x ע"ע של A כי: יש $v \neq 0$ כך ש- $(A - xI)v = 0$ מה שאומר $Av = xv$, ולכן x ע"ע. באותו אופן בדיוק מהעובדה $A - yI$ לא הפיכה נקבל y ע"ע. וקיבלנו שני ע"ע שונים בנוסף על 0, מה שלא יכול להיות. סתירה.

(ב) האם בהכרח קיים $x \neq 0$ עבורו $A - xI$ לא הפיכה?

פתרון: ראינו ש-0 ע"ע עם ר"ג $n - 1$. האם בהכרח יש ע"ע נוסף? התשובה היא לא, יכול להיות ש-0 הוא ע"ע עם ר"א n ור"ג $n - 1$, ואז אין עוד ע"ע נוסף. למשל:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאן 0 ע"ע עם ר"א 2 (פולינום אופייני של משולשית), ור"ג 1 כי $\dim N(A) = 1$.

5. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \pi & 2 \\ 0 & 2 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & \sqrt{5} & 2 & 0 \\ 2 & -2 & e & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון: כמסקנה משאלות 1,2 נקבל: משאלה 1 איברי האלכסון הם ע"ע, משאלה 2 כיון שיש 4 ע"ע שונים שתיהן לכסינות, ושתיהן דומות למטריצה האלכסונית

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

יחס דמיון הוא יחס שקילות, ולכן אם שתי מטריצות דומות למטריצה D , אז הן דומות אחת לשנייה.

6. סדרת פיבונאצי מקיימת:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$\forall n > 2 : a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

אנחנו רוצים למצוא הצגה מפורשת של האיבר הכללי, בעזרת לכסון.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

וקיבלנו:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}}$$

אם ממשיכים הלאה, רואים שמתקיים:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כל שנותר הוא לחשב את A^n בעזרת לכסון, ולקבל את התוצאה.