מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 9

1. יהי X מ"ט קומפקטי ו- $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה.
<u>הוכיחו</u> שקיימים $x_1, x_2 \in X$ כך
ש- $f(x_1) = \min\{f(x)\} | \, x \in X\}$
ו- $f(x_2) = \max\{f(x)\} | \, x \in X\}$.

2. יהיו X, Y מ"ט לא ריקים. הוכיחו ש- $X \sqcup Y$ מ"ט לא קשיר.

3. יהיו $X_1, \dots, X_n$ מרחבים קומפקטיים זרים.
הוכיחו ש- $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ מרחב קומפקטי.

4. כידוע ספרה $n-1$-מימדית $S^{n-1}(a,r)$ ב- $\mathbb{R}^n$
עם מרכז $a \in \mathbb{R}^n$ ורדיוס $r > 0$ היא
קבוצה $\{x \in \mathbb{R}^n | \, ||x-a|| = r\}$, כאשר $||\cdot||$ נורמה
אוקלידית ב- $\mathbb{R}^n$.
<u>הוכיחו</u> שכל ספרות $n-1$-מימדיות הומאומורפיות.
(רמז. הוכיחו שכל ספרה הומאומורפית לספרה $S^{n-1}(O,1)$
כאשר O – ראשית הצירים.)

5. תהי $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ מערכת משוואות לינאריות
מעל $\mathbb{R}$. הוכיחו שקבוצת הווקטורים $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$
שמהווים פתרונות של המערכת היא קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^n$.

6. יהי $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ עם מקדמים ממשיים, יהי X
מרחב טופולוגי ותהא $f: X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נסמן: $g := P \circ f$. הוכיחו ש- g פונקציה רציפה.