# תרגיל 4

1. יהי $X$ מ"מ ו$Y \subseteq X$ תת מרחב. ותהי $A \subseteq Y$. הוכיחו:
$cl_Y(A) = cl_X(A) \cap Y$.

2. הוכיחו: תהי $A$ קבוצה במרחב מטרי. $A$ סגורה אמ"ם $A' \subseteq A$.

3. תהי $S$ קבוצה במרחב מטרי, ויהי $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:
א. $x \in S \setminus S'$.
ב. קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B(x,\epsilon) \cap S = \{x\}$.
ג. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$ כך ש $x_n \to x$, מתקיים ש$\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

4. א. יהי $X$ מרחב מטרי שלם, ו$A \subseteq X$ תת מרחב. הוכיחו שאם $A$ סגורה ב$X$, אז $A$ מרחב מטרי שלם.
ב. הראו שאם $X$ אינו שלם, אז הטענה אינה בהכרח נכונה (כלומר, יתכן ש $A$ סגורה ב$X$, אבל $A$ לא מרחב שלם).
ג. יהי $X$ מרחב מטרי כלשהו, ו$A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם. הוכיחו ש$A$ סגורה ב$X$.
ד. יהי $X$ מרחב מטרי שלם, ו$f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f[X]$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.

5. חשבו את הסגור של הקבוצות הבאות:
א. במרחב המטרי $X$ של אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1, 2..., n\}$, עם המטריקה הבאה $d : X \times X \to [0, \infty)$ ע"י:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}.$$

מצאו את הסגור של הקבוצה $A$= אוסף הסדרות המתאפסות לבסוף.
ב. ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ מצאו את הסגור של הקבוצה $A = 5\mathbb{Z}$.
ג. ב $C[0,1]$ עם מטריקת המקסימום, מצאו את הסגור של הקבוצה $A = \{f : f(\frac{1}{2}) < .5\}$

6. הוכיחו/הפריכו:
א. $A'_1 \cup ... \cup A'_n = (A_1 \cup ... \cup A'_n)$.
ב. $\bigcup A'_i = (\bigcup A_i)'$.