חשבון אינפיניטסימלי 3 ־ תרגול מס' 2

יובל חצ'טריאן

6 בנובמבר 2017

1 כדורים, תיבות וקבוצות קמורות ב $\mathbb{R}^n$.

הגדרה 1.1 קבוצה X נקראת מרחב מטרי אם קיימת פונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$ שמקיימת לכל $p, q \in X$

1. $d(p,q) \geq 0$ ויש $d(p,q) = 0$ אם ורק אם $p = q$.
2. $d(p,q) = d(q,p)$
3. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ לכל $r \in X$.

הערה 1.2 בהשמך, אם לא נאמר אחרת, אפשר להניח שהמטריקה שאנחנו עובדים איתה היא המטריקה המושרית על ידי הנורמה הסטדנרטית (נורמה 2) על המוגדרת על ידי $d(x,y) = \|x-y\|$.

הגדרה 1.3 קבוצה $B(x,r) \subseteq X$ נקראת כדור פתוח בעל רדיוס r סביב x ומוגדרת על ידי $B(x,r) = \{y | d(x,y) < r\}$. כדור סגור סביב $x \in X$ ברדיוס r מסומן על ידי $\overline{B(x,r)}$ ומוגדר על ידי $\overline{B(x,r)} = \{y | d(x,y) \leq r\}$.

הגדרה 1.4 יהיו $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i \leq b_i$. הקבוצה $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ נקראת תיבה סגורה nמימדית. הקבוצה $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ נקראת תיבה פתוחה.

הגדרה 1.5 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת קמורה אם לכל $a, b \in E$ ולכל $t \in [0,1]$ מתקיים $ta + (1-t)b \in E$.

דוגמא 1.6 לכל $x \in \mathbb{R}^n$ ולכל $0 < r < \infty$ הכדור הפתוח $B(x,r)$ הינו קבוצה קמורה. **הוכחה:** יהיו $y, z \in B(x,r)$. מתקיים $\|x-y\| \leq r$ וגם $\|y-z\| \leq r$. יהי $t \in [0,1]$. מתקיים

$$\begin{aligned}\|tz + (1-t)y - x\| &= \|tz - tx + (1-t)y - (1-t)x\| = t\|z-x\| + (1-t)\|y-x\| \\ &\leq tr + (1-t)r = r\end{aligned}$$

$\blacksquare$

דוגמא 1.7 יהיו $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצות קמורות. אזי

$$W = \{tu + (1-t)v | t \in [0,1], u \in U, v \in V\}$$

היא קבוצה קמורה.

הוכחה: יהי $w_1 = t_1u_1 + s_1v_1$ ו $w_2 = t_2u_2 + s_2v_2$ כאשר $t_1 + s_1 = t_2 + s_2 = 1$ ו $0 \leq t_1, t_2, s_1, s_2 \leq 1$. יהיו $0 \leq t, s \leq 1$ כך ש $t + s = 1$. נתבונן ב $tw_1 + sw_2$. מתקיים

$$tw_1 + sw_2 = t\left(t_1u_1 + s_1v_1\right) + s(t_2u_2 + s_2v_2) = tt_1u_1 + st_2u_2 + ts_1v_1 + ss_2v_2.$$

מתקיים.

$$\begin{aligned} tt_1u_1 + st_2u_2 + ts_1v_2 + ss_2v_2 = &\left(tt_1 + st_2\right)\left(\frac{tt_1}{tt_1 + st_2}u_1 + \frac{st_2}{tt_1 + st_2}u_2\right) \\ &+ \left(ts_1 + ss_2\right)\left(\frac{ts_1}{ts_1 + ss_2}v_1 + \frac{ts_2}{ts_1 + ss_2}v_2\right). \end{aligned}$$

(הערה: במקרה ו $tt_1 + st_2 = 0$ או $ts_1 + ss_2 = 0$ נקבל מקרים מנובנים יחסית שקל לבדוק שהצירוף המבוקש בקבוצה). ברור ש $\frac{tt_1}{tt_1+st_2} + \frac{st_2}{tt_1+st_2} = 1$ ו $\frac{ts_1}{ts_1+ss_2} + \frac{ts_2}{ts_1+ss_2} = 1$ ולכן $u = \frac{tt_1}{tt_1+st_2}u_1 + \frac{st_2}{tt_1+st_2}u_2 \in U$ וגם $v = \frac{ts_1}{ts_1+ss_2}v_1 + \frac{ts_2}{ts_1+ss_2} \in V$. באופן דומה

$$\left(tt_1 + st_2\right) + \left(ts_1 + ss_2\right) = t\left(t_1 + s_1\right) + s\left(t_2 + s_2\right) = t + s = 1$$

ולכן

$$w = \left(tt_1 + st_2\right)u + \left(ts_1 + ss_2\right)v \in W.$$

■

הגדרה 1.8 יהי X מרחב מטרי, $S \subseteq X$. נאמר ש $\emptyset \neq S \subseteq X$ חסומה אם קיים $x \in X$ ו $0 < r$ כך ש $S \subseteq \overline{B\left(x, r\right)}$.

הערה 1.9 עבור $X = \mathbb{R}^n$ התנאי שקול לכך שקיים $R \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in S$ מתקיים $\|a\| \leq R$.

דוגמא 1.10 כל כדור (פתוח או סגור) הוא קבוצה חסומה.

דוגמא 1.11 כל תיבה n מימדית היא קבוצה חסומה.

2 מושגים בסיסיים בטופולוגיה של $\mathbb{R}^n$.

2.1 נקודות הצטברות, גבולות ונק' גבול.

הגדרה 2.1 יהי X מרחב מטרי, $S \subseteq X$. נאמר ש $l \in X$ היא נק' הצטברות של S אם לכל $0 < \epsilon$ קיימת $s \in S$ כך ש $s \in B\left(l, \epsilon\right) \setminus \{0\}$.

ההגדרה הבאה היא הכללה של ההגדרה מאינפי.

הגדרה 2.2 יהי Xמרחב מטרי. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של איברים ב X. נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל $l \in X$ אם לכל $0 < \epsilon$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n$ מתקיים $d\left(l, a_n\right) < 0$. למעשה כאן החלפנו את $| |$ במטריקה כללית.

לעיתים מחליפים את המונח נקודת הצטברות במונח נק' גבול, בעל תכונות דומות.

הגדרה 2.3 יהי X מרחב מטרי, $S \subseteq X$. נאמר ש $l \in X$ היא נק' גבול של S אם קיימת סדרה של איברים ב S, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ שמתכנסת ל l.

הערה 2.4 כל נקודת הצטברות היא נק' גבול אבל לא כל נקודת גבול היא נקודת הצטברות. לגדומה, עבור קבוצה $\{a\}$, a היא נקודת גבול שלה, כי סדרה קבועה $a, a, \ldots$ מתכנסת ל a. מצד שני, aאינה נק' הצבטרות של $\{a\}$, כי לכל $0 < \epsilon$ לא קיים $a \neq x$ כך ש $x \in B\left(a, \epsilon\right)$.

אבחנה 2.5 l היא נקודת הצטברות של הקבוצה S אם ורק אם כל כדור פתוח $B\left(l, r\right)$מכיל אינסוף נק' של s.

הוכחה: נניח ש l היא נקודת הצטרות של S ונניח שקיים כדור פתוח $B\left(l, r\right)$ שמכיל מספר סופי של נק' של S. יהי $S \cap \left(B\left(l, r\right) \setminus \{l\}\right) = \{s_1, \ldots s_n\}$. יהי $m = \min\{s_1, \ldots s_n\}$. אזי $B\left(l, m\right) \setminus \{l\}$ לא מכיל אף נק' של S בסתירה לכך ש l היא נק' הצבטרות של S. ■

הגדרה 2.6 יהי X מרחב מטרי, $A \subseteq X$. נק' $a \in A$ נקראת נקודה מבודדת של A אם A אינה נק' הצטברות של A.

הערה 2.7 נקודת גבול של A יכולה להיות נקודה מבודדת אבל נקודת הצטרות של A לא יכולה להיות נקודהה מבודדת.

2.2 קבוצות פתוחות

הגדרה 2.8 יהי X מרחב מטרי, ו $U \subseteq X$. נאמר ש U קבוצה פתוחה אם לכל $x \in U$ קיים $0 < r$ כך ש $B\left(x, r\right) \subseteq U$.

דוגמא 2.9 כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה: יהי X מרחב מטרי ו $B\left(x, r\right) \subseteq X$ כדור פתוח. יהי $a \in B\left(x, r\right)$. נסמן ב $\epsilon = d\left(a, r\right)$. אזי $B\left(a, \epsilon\right) \subseteq B\left(x, r\right)$ כיוון שאם $b \in B\left(a, \epsilon\right)$ זה אומר ש $d\left(b, a\right) < \epsilon = r - d\left(x, a\right)$ ולכן

$$d\left(x, b\right) \leq d\left(x, a\right) + d\left(b, x\right) < d\left(a, x\right) + r - d\left(a, x\right) = r.$$

■

דוגמא 2.10 כל תיבה פתוחה היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^n$.

הוכחה: תהי $C = \left(a_1, b_1\right) \times \ldots \left(a_n, b_n\right) \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה פתוחה. יהי $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in C$. יהי

$$r = \min\left\{x_1 - a_1, b_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n, x_n - a_n\right\}.$$

אזי $B\left(x, r\right) \subseteq C$. זה נובע נכון מכיוון שאם $y_i \leq a_i$ אזי

$$\left\|\left(x_1, \ldots, x_n\right) - \left(y_1, \ldots, y_n\right)\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - y_j\right)^2} \geq \left|x_i - y_i\right| > x_i - a_i \geq r .$$

באותו אופן מראים שלכל $\left(y_1, \ldots, y_n\right) \in \mathbb{R}^n$ בהכרח מתקיים $y_i < b_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

הגדרה 2.11 יהי X מחרב מטרי ויהי $x \in X$. קבוצה U תקרא סביבה פתוחה של x אם U קבוצה פתוחה ו $x \in U$.

אבחנה 2.12 קבוצה S פתוחה במרחב מטרי X אם ורק אם לכל $x \in S$ קיימת סביבה פתוחה Uשל x, כך ש $U \subseteq N$.

הוכחה: נניח ש U קבוצה פתוחה ב X. אזי לכל $x \in U$ קיים כדור פתוח $B\left(x, r\right) \subseteq U$ וכל כדור פתוח הוא גם סביבה פתוחה. עכשו נניח שלכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה N_x של x כך ש $N_x \subseteq U$. אבל N_x פתוחה ולכן קיים כדור פתוח $B\left(x, r\right) \subseteq N_x \subseteq U$. כך הראנו שלכל $x \in U$ קיים כדור פתוח $B\left(x, r\right) \subseteq U$ שזה גורר ש U פתוחה. ■

דוגמא 2.13 הקבוצה $S = \left\{(x,y)\,|x^2 < y\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קבוצה פתוחה.

הוכחה: יהי $(x,y) \in S$. יהא $|x| < t$ כך $t^2 < y$. (קיים כזה מכיוון ש $x^2 - y < 0$, מצד שני t^2 פונקציה עולה ורציפה בקטע $[0,\infty)$ ולכן מקבל כל ערך בין $x - y^2$ ו 0). נביט בתיבה פתוחה $B = (-t,t) \times \left(t^2, t^2 + y\right)$. לכל $(a,b) \in B$, מתקיים $a^2 < t^2 < b$. כלמר לכל $(x,y) \in S$ קיימת תיבה $x \in B \subseteq S$. ולכן S פתוחה. ■

אבחנה 2.14 קבוצה $X \subseteq U$ היא קבוצה פתוחה אם ורק אם קיימים כדורים פתוחים $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ כך ש $U = \bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i)$.

2.3 שקילות מטריקות ושקילות נורמות

הגדרה 2.15 תהי X קבוצה לא ריקה. המטריקות d_1 ו d_2 על X נקראות שקולות, אם כל קבוצה $X \subseteq U$ פתוחה לפי המטריקה d_1 אם ורק אם היא פתוחה לפי מטריקה d_2.

דוגמא 2.16 המטריקה הדיסקרטית והמטריקה המושרית מהנורמה הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$ אינן שקולות, כי כל קבוצה פתוחה בנורמה הדיסקרטית אבל לא בהכרח פתוחה במטריקה הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$.

דוגמא 2.17 הנורמות $\|\cdot\|_\infty$ ונורמה $\|\cdot\|_2$ משרות מטריקות שקולות, כיוון שכדור פתוח ב $\|\cdot\|$ הוא פשוט תיבה פתוחה וקל לראות שכל כדור פתוח בנורמה 2 מכיל תיבה פתוחה שהיא גם כדור פתוח בנורמה ∞.

הגדרה 2.18 נורמות נקראות שקולות אם הן משרות מטריקות שקולות.

הערה 2.19 כל הנורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות זו לזו. אמנם זה משפט שצריך להוכיח אותו. אבל זה אומר שניתן לעבוד עם כל נורמה שנרצה על $\mathbb{R}^n$ שיותר נוחה לנו מבחינה חישובית.

2.4 קבוצות סגורות

הגדרה 2.20 יהי X מרחב מטרי. $V \subseteq X$ נקרקאת סגורה אם המשלימה שלה קבוצה פתוחה.

למה 2.21 יהי X מרחב מטרי. $V \subseteq X$ היא קבוצה סגורה אם ורק אם V מכילה את כל הנק' הצטברות שלה (או נק' גבול או לכל סדרה של איברי V שמתכנסת X הגבול שלה נמצא ב V).

דוגמא 2.22 כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

הוכחה: יהי $\overline{B(x,r)}$ כדור סגור, ויהי y כך ש $d(x,y) > r$. נסמן $d(x,y) - r = \epsilon$. יהי $z \in B(y,\epsilon)$. מתקיים $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. אבל $d(z,y) < \epsilon$ ולכן

$$
\begin{gathered}
d(x,z) \geq d(x,y) - \epsilon \geq r + \epsilon - \epsilon = r \\
\Downarrow \\
z \neq B(x,r)
\end{gathered}
$$

לכן לכל נק' y של $\overline{B(x,r)}^c$ מכילה כדור פתוח $B(y,\epsilon)^c \subseteq \overline{B(x,r)}^c$ ולכן $\overline{B(x,r)}^c$ פתוחה. ■

דוגמא 2.23 כל קבוצה סופית היא סגורה. דרך לראות את זה, זה לשים לב שלקוצה סופית אין נק' הצטברבות ולכן היא מכילה אותן באופן ריק וזה מתאים למשפט על הקבוצות הסגורות. או לשים לב שסדרה של רכיביה סופיים מתכנסת אם ורק אם היא קבועה מאיזהשהו מקום, וזה אומר שוב שנק' גבול שלה הן בקבוצה. אנחנו נעשה זאת בדרך טיפה יותר מסורבלת על מנת להראות עוד שיטה. תהי $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ קבוצה סופית ויהי $x\in A^c$. יהי $r=\min\{d(x,a)\,|a\in A\}$. המינימום קיים כי הקבוצה סופית וברור שאף נק של Aאינה נמצאת ב $B(x,r)$ לפי ההגדרה של כדור פתוח וr. לכן לכל $x\in A^c$ קיים כדור פתוח $B(x,r)\subseteq A^c$ ולכן A^c פתוחה לפי ההגדרה של קבוצה פתוחה.

דוגמא 2.24 יהי $P: a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$ על מישור ב $\mathbb{R}^n$. הוכיחו ש $\mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה. הוכחה. נראה ש P^c פתוחה.

הוכחה: יהי $x\in P^c$. נניח $|a_1x_1+\dots+a_nx_n-d|=\epsilon$. יהי $r=\frac{\epsilon}{Mn}$ כאשר $M=\max\{a_1,\dots,a_n\}$. יהי

$$C=(x_1-r,x_1+r)\times\dots\times(x_n-r,x_n+r).$$

לכל $(y_1,\dots,y_n)\in C$ מתקיים

$$\begin{aligned}
|a_1y_1+\dots+a_ny_n-d| &= |a_1x_1+a_1(y_1-x)+\dots+a_nx_n+a_n(y_n-x_n)-d| \\
&= |(a_1x_1+\dots a_nx_n-d)+a_1(y_1-x_n)+a_n(x_n-y_n)| \\
&\geq |\epsilon-|a_1(y_1-x_1)+\dots+a_n(y_n-x_n)|| \\
&\geq |\epsilon-|a_1||y_1-x_1|-\dots-|a_n||y_n-x_n|| \\
&\geq |\epsilon-M(|y_1-x_1|+\dots|y_n-x_n|)| \\
&> \left|\epsilon-Mn\frac{\epsilon}{Mn}\right|=0
\end{aligned}$$

זאת אומרת שלכל נק' $y\in P^c$ קיימת סביבה פתוחה שכולה מוכלת ב P^c. לכן P^c פתוחה. ■

הערה 2.25 קבוצה לא חייבת להיות פתוחה או סגורה. כך למשל את הקבוצה $\left\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\}$. הקבוצה אינה סגורה כיוון שאינה מכילה את נק' הצטברות היחידה שלה, 0. מצד שני הקבוצה אינה פתוחה כי היא לא מכילה אף קטע פתוח.

2.5 תכונות של קבוצות פתוחות וסגורות.

משפט 2.26 מתקיים:

1. לכל אוסף של קבוצות פתוחות $\{U_i\}_{i\in I}$, $\cup_{i\in I}U_i$ היא קבוצה פתוחה.
2. לכל אוסף של קבוצות סגרות $\{V_i\}_{i\in I}$, $\cap_{i\in I}V_i$ הוא קבוצה סגורה.
3. לכל אוסף סופי של קבוצות פתוחות $U_1,\dots,U_n$ החיתוך שלהן $\cap_{i=1}^nU_i$ הוא קבוצה פתוחה.
4. לכל אוסף סופי של קבוצות סגורות $V_1,\dots,V_n$ האיחוד הסופי שלהן הוא קבוצה סגורה.

דוגמא 2.27 הראו שכל מרחב אפיני ב $\mathbb{R}^n$ הוא קבוצה סגורה.

פתרון: כל מרחב אפיני ב $\mathbb{R}^n$ ניתן לבטא כאוסף של פתרונות של המערכת

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n&=b_1\\
&\cdots\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n&=b_m
\end{aligned}$$

אבל ראינו שכל על מישור $a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n=b_i$ הוא קבוצה סגורה, ולמעשה המרחב שלנו הוא חיתוך של על־מישורים, ולכן קבוצה סגורה.

הערה 2.28 תכונת הסופיות באיחוד של קבוצות סגורות ובחיתוך של קבוצות סגורות היא הכרחית. ניקח למשל את הקבוצה $\left\{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)|n\in\mathbb{N}\right\}$. זהו אוסף של קבוצות פתוחות אבל

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$$

ו $\{0\}$ אינו קבוצה פתוחה.

2.6 סגור ושפה ופנים

הגדרה 2.29 יהי X מרחב מטרי ו $S\subseteq X$ קבוצה. נסמן על ידי S' את אוסף נק' הגבול של S. הקבוצה $\overline{S}=S\cup S^{'}$ נקראת הסגור של S. סימון נוסף הוא $cl\left(S\right)$. הגדרה שקולה היא

$$\overline{S}=\bigcap_{\substack{U\,is\,closed\\ S\subseteq U}}U$$

כלמר חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את S.

עובדה 2.30 ההגדרות אכן שקולות. ראשית נראה ש $S\cup S'$ הינה קבוצה סגורה. על מנת להוכיח את זה נראה שהיא מכילה את כל הנק' הצטברות שלה. תהי a נק' הצטברות של $S\cup S'$. אזי כל סביבה פתוחה N_a של a מכילה נק' של $s\in S\cup S'$. אבל אם $s\in S'$ יש לה סביבה פתוחה שמוכלת N_s כך ש $N_s\subseteq N_a$ ו N_s מכילה נק' t של S כי s היא נק' הצטרברות של S. זאת אומרת ש $t\in S\cap N_a$ כלמר N_a מכילה נק' של S. אחרת $s\in S$. הראנו למעשה שכל סביבה של a מכילה נק' של S, זאת אומרת ש $a\in S'$ כלמר $S\cup S'$ היא קבוצה סגורה. מצד שני, אם U היא קבוצה סגורה שמכילה את S היא חייבת להכיל גם את כל הנק' הצטברות של S כלמר את S' ולכן $S\cup S'\subseteq U$ לכל קבוצה סגורה U שמכילה את S וגם בעצמה סגורה. הראנו את השוויון הדרוש.

דוגמא 2.31 הכדור הסגור $\overline{B\left(x,r\right)}$ הוא הסגור של $B\left(x,r\right)$.

דוגמא 2.32 התיבה הסגורה $\left[a_1,b_1\right]\times\cdots\times\left[a_n,b_n\right]$ היא הסגור של הקבוצה $\left(a_1,b_1\right)\times\cdots\times\left(a_n,b_n\right)$.

דוגמא 2.33 הסגור של $\mathbb{Q}$ הוא $\mathbb{R}$. זה נובע מכך שלכל מספר ממשי r ולכל $\epsilon>0$ קיים מספר רציונלי $r-\epsilon<q<r+\epsilon$ כך ש $q\neq r$ ולכן r הוא נק הצטברות של הרציונליים.

הגדרה 2.34 יהי X מרחב מטרי, $A\subseteq X$, $a\in X$ נקראת נקודה פמימית של A אם קיים כדור פתוח $B\left(a,r\right)\subseteq A$. אוסף כל הנק' הפנימית של A נקרא פנים ומסומן על ידי A° או $int\left(A\right)$.

אבחנה 2.35 להלן כמה תכונות של $int\left(A\right)$.

1. $int\left(A\right)$ קבוצה פתוחה. **הוכחה:** נשים לב שלכל $a\in int\left(A\right)$, אם $B\left(a,r\right)\subseteq int\left(A\right)$ אזי כל $x\in B\left(a,r\right)$ הוא גם נקודה פנימית של של A ולכן $B\left(a,r\right)\subseteq int\left(A\right)$ ולכן $int\left(A\right)$ פתוחה לפי ההגדרה של קבוצה פתוחה. ■

2. קבוצה A היא פתוחה אם ורק אם $int\left(A\right)$ היא פתוחה.

3. אם $G\subseteq A$ פתוחה, אזי $G\subseteq int\left(A\right)$.

4. $cl\left(A^{c}\right)=\left(int\left(A\right)\right)^{c}$.

שאלה 2.36 האם $int\left(E\right)=int\left(cl\left(E\right)\right)$?

תשובה: לא. ניקח ש $E=\mathbb{Q}$. אזי $int\left(\mathbb{Q}\right)=\emptyset$. מצד שני, $int\left(cl\left(\mathbb{Q}\right)\right)=int\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$.

הגדרה 2.37 השפה של A הינה החיתוך של סגור של A אם הסגור של המשלים שלה. כלומר

$$\partial A=cl\left(A\right)\cap cl\left(A^{c}\right).$$

דוגמא 2.38 השפה של כדור פתוח $B\left(a,r\right)$ היא הספרה ברדיוס r, $S\left(a,r\right)=\left\{x|d\left(x,a\right)=r\right\}$.

שאלה 2.39 האם פנים של שפה הוא בהכרח קבוצה ריקה?

תשובה: לא. ניקח $\mathbb{Q}$. מתקיים $cl\left(\mathbb{Q}\right)=\mathbb{R}$.

2.7 קבוצות פתוחות וסגורות ביחס לקבוצה.

יהי X מרחב מטרי ו $Y\subseteq X$. אזי Y יחד עם המטריקה של d הוא מרחב מטרי בפני עצמו. נשאלת שאלה: מתי תת־קבוצה פתוחה של Y פתוחה ב X או מתי תת־קבוצה סגורה של Y סגרוה ב X.

למה 2.40 תת־קבוצה $U\subseteq Y$ סגורה ביחס ל X אם ורק אם קיימת תת־קבוצה $V\subseteq X$ כך ש $U=V\cap Y$.

דוגמא 2.41 הקטע $\left(a,b\right)$ פתוח ביחס ל $\mathbb{R}\times\left\{0\right\}$ אבל אינו פתוח ביחס ל $\mathbb{R}^{2}$.

מסקנה 2.42 תת־קבוצה פתוחה U ביחס לתת־קבוצה פתוחה $Y\subseteq X$ פתוחה ב X. תת־קבוצה סגורה U ביחס לתת־קבוצה סגורה $Y\subseteq X$ סגורה ביחס ל X.

3 קומפקטיות

הגדרה 3.1 יהי X מרחב מטרי, יהי $U\subseteq X$. האוסף $\left\{V_{i}\right\}_{i\in I}$ נקרא כיסוי פתוח של U אם לכל $i\in I$ הקבוצה V_{i} פתוחה ומתקיים

$$U\subseteq\bigcup_{i\in I}V_{i}.$$

האוסף $\left\{V_{i_{1}},\ldots,V_{i_{n}}\right\}$ נקרא תת־כיסוי סופי של $\left\{V_{i}\right\}_{i\in I}$ אם לכל $i\in I$ ו

$$U\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}V_{i_{k}}$$

הקבוצה תקרא קומפקטית, אם לכל כיסוי פתוח שלה קיים תת־כיסוי סופי.

דוגמא 3.2 כל קבוצה סופית היא קומפקטית.

למה 3.3 אם K קומפקטית ו F סגורה אזי $K\cap F$ סגורה.

הוכחה: יהי $\{V_i\}_{i\in I}$ כיסוי של $K\cap F$. אזי $\{V_{i\in I}\}\cup F^c$ הוא כיסוי פתוח של F ולפי המשפט יש לו תת־כיסוי סופי. $V_{i_1},\ldots,V_{i_n},F^c$(תמיד ניתן להוסיף את F^c לכיסוי). קל לראות שאם

$$K\subseteq V_{i_1}\cup\cdots\cup V_{i_n}\cup F^c.$$

אזי

$$K\cap F\subseteq V_{i_1}\cup\cdots\cup V_{i_n}$$

כלמר מצאנו כיסוי פתוח ל $K\cap F$. ■

משפט 3.4 שלושת התנאים הבאים שקולים עבור $U\subseteq\mathbb{R}^n$.

1. U קומפקטית.
2. U סגורה וחסומה.
3. לכל תת־קבוצה אינסופית של U יש נק' הצטברות ב U.

טענה 3.5 אם $\{K_i\}_{i\in I}$ הוא אוסף של משפחות קומפקטיות ולכל $\{i_1,\ldots,i_n\}\subseteq I$ החיתוך $\cap_{k=1}^n K_{i_k}$ אינו ריק, אזי $\cap_{i\in I}K_i\neq\emptyset$.

הוכחה: נניח בשלילה ש $\cap_{i\in I}K_i=\emptyset$. לכל K_i נסמן $G_i=K_i^c$. אם $\cap_{i=1}^n K_i^c=\emptyset$. נבחר $K\in\{K_i\}_{i\in I}$ שרירותי. על פי ההנחה, $\cap_{i\in I}K_i=\emptyset$ ולכן לכל $x\in K$ קיים i כך ש $x\notin K_i$ או באופן שקול $x\in G_i$. נשים לב, שמהמשפט הקודם נובע ש K_i סגורה לכל $i\in I$ שבאופן שקול אומר ש G_i פתוחה לכל $i\in I$ ולכן $\{G_i\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של K. מכיוון ש K קומפקטית, קיים תת־כיסוי סופי $\{G_{i_1},\ldots,G_{i_n}\}$ של K. מתקיים

$$K\cap\left(\bigcup_{k=1}^n G_{i_k}\right)=K$$

מכאן ש

$$K\cap\left(\bigcap_{k=1}^n K_{i_k}\right)=K\cap\left(\bigcup_{k=1}^n G_{i_k}\right)^c=\emptyset$$

בסתירה להנחה שכל חיתוך סופי של איברי $\{K_i\}$ אינו ריק. ■

נשאלת שאלה, האם קומפקטיות הינה תנאי הכרחי? אולי ניתן להחליף אותה בתנאי חלש יותר?

שאלה 3.6 האם מספיק לדרוש הקבוצות רק סגורות או רק חסומות ולאו דווקא קומפקטיות כמו בטענה הקודמת?

תשובה: לא. על מנת להראות שקבוצות סגורות זה לא מספיק, נביט ב $\{[a,\infty)\}_{a\in\mathbb{R}}$. לכל חיתוך סופי מתקיים

$$\bigcap_{i=1}^n[a_i,\infty)=\left[\max_{1\le i\le n}\{a_i\},\infty\right).$$

הקבוצה אינה ריקה. לעומת זאת ברור ש

$$\bigcap_{a\in\mathbb{R}}[a,\infty)=\emptyset.$$

עבור קבוצות חסומומות לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $A_m=\left\{\frac{1}{n}|m<n\right\}$.שוב, ברור שאם $i_1<i_2<\dots i_n$ אזי

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_{i_k}=A_{i_n}$$

מצד שי, שוב ברור

$$.\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=\emptyset$$

דוגמא 3.7 הקבוצה $(-1,1)$ אינה קומקטית. ניקח למשל את הקבוצה

$$\left\{\left(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

ברור שמתקיים

$$(-1,1)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$$

מצד שני כל תת־קבוצה סופית לא מהווה כיסוי של הקבוצה. יהיו $i_1<\dots<i_n\in\mathbb{N}$. ברור שמתקיים

$$.\bigcup_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{1}{i_k},1-\frac{1}{i_k}\right)=\left(-1+\frac{1}{i_n},1-\frac{1}{i_n}\right)$$

דוגמא 3.8 $\mathbb{R}$ אינה קומקטית. כך למשל הקבוצה $\{(-n,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ הינה כיסוי פתוח של $\mathbb{R}$ אבל אף תת־קבוצה סופית שלה היא לא כיסוי של $\mathbb{R}$.

4 גבולות

4.1 גבולות של סדרה.

חקירת התכנסות של סדרות ב $\mathbb{R}^n$ אינה שונה באופן מהותי מחקירת התכנסות של סדרות ב $\mathbb{R}$ ולכן לא נתמקד בה. נצטט את המשפט שמסכם את הנושא.

משפט 4.1 סדרה $\left\{\left(a_1^{(k)},\dots,a_n^{(k)}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם היא מתכנסת רכיב רכיב. כלמר, לכל $1\le i\le n$ הסדרה $\left\{a_i^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנכסת.

4.2 גבול של פונקציה בנקודה.

הגדרה 4.2 תהיינה קבוצה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ופונקציה$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. תהי $a\in\mathbb{R}^n$ נק' הצטברות של U. נאמר של f יש גבול $b\in\mathbb{R}^m$ בנקודת a אם לכל $0<\epsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל $x\in U$ מתקיים

$$\|x-a\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-b\|<\epsilon$$

ונסמן

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

ההגדרה זהה לגבול בנק' ב $\mathbb{R}$, פשוט החלפנו ערך מוחלט בנורמה.

שוב, חקירת רציפות בנק' עבור פונקציות ל $\mathbb{R}^m$ ניתן לצמצם לחקירת רציפות של פונקציות ל $\mathbb{R}$ בעזרת המשפט הבא.

הגדרה 4.3 תהיינה קבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ופונקציה$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. תהי $a \in \mathbb{R}^n$ נק' הצטברות של U. אזי $\lim_{x\to a} f(x) = b$ אם ורק אם לכל $1 \le i \le n$ מתקיים

$$\lim_{x\to a} f_i(x) = b_i$$

כלמר, יש הגבולות שווים רכיב רכיב.

מבחינה תאורתית חקירת הגבולות של פונקציות בכמה משתנים דומה לחקירה במשתנה אחד, אמנם למעשה יש הבדלים. כך למשל, קיום הגבול לעיתים תלוי במסלול ההתקרבות לנקודה.

משפט 4.4 תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה $f : U \to \mathbb{R}$ ו $a \in \mathbb{R}^n$ נק' הצטרבות של U. אזי $\lim_{x\to a} f(x) = b$ אם ורק אם לכל סדרה $\left\{a^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל a מתקיים

$$.\lim_{k\to\infty} f\left(a^{(k)}\right) = b$$

זהו קריטריון היינה לקיום גבול של פונקציות בכמה משתנים.

כמו, במשתנה אחד, קריטריון היינה שימושי במיוחד כשרוצים לשלול קיום גבול בנקודה.

דוגמא 4.5 האם לפונקציה $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ קיים גבול ב $(0,0)$?

תשובה: לא. ניקח סדרות

$$a^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), b_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

ברור ש

$$.\lim_{n\to\infty} a^{(n)} = \lim_{n\to\infty} b^{(n)} = 0$$

אמנם, מצד שני מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f\left(a^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{2}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

מצד שני, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f\left(b^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

הגבולות שונים ולכן אין גבול.

בנוסף לקריטריון היינה, דרך נפוצה ושימושית להראות קיום או אי קיום של גבולות היא לבדוק מסלולי התקרבות שונים לנקודה. בדוגמה כמו הקודמת, ניתן פעם לקחת את המסלול (x,x) ו$(x,2x)$ולקבל את אותם הגבולות.

עכשו, נראה איך להרות קיום גבול בנקודה.

שיטה ראשונה, היא להשתמש בחסמים.

דוגמא 4.6 חשבו את הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

פתרון: נראה שהגבול הוא 0. על מנת לראות את זה נראה שהגבול של

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=0\leq|y|$$

ראשית, נשים לב שאם $x=0$ אזי

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=0$$

אחרת נשתמש באי־שווין הבא

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2}}\right|=\frac{|xy|}{|x|}=|y|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0\ .$$

כאן פשוט חסמנו את המכנה לממטה מה שחסם את הביטוי שלנו מלמעלה. אמנם, לפני שעושים את זה צריך לנקות בזהירות ־ הביטוי הקטן יותר עלול להיות 0 ולכן טיפלנו במקרה הזה בנפרד.