

תרגיל בית 1 באלגברה מתקדמת

83-804 סמסטר א' תש"ף

שאלות להגשה

שאלה 1. בכל סעיף, ענו עבור המערכת האלגברית המופיעה בו:
האם היא אגודה?
האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?
האם היא חבורה?
האם הפעולה היא חילופית?

א. (\mathbb{N}, \cdot) , המספרים הטבעיים עם פעולת הכפל הרגילה.

ב. (\mathbb{Z}, \max) , המספרים השלמים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ג. $(\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a * b = a + b - 1$.

ד. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ה. (A, \cdot) , הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ו. $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a * b = a + b + ab$.

שאלה 2. תהינה $(G, *)$ ו- (H, \bullet) חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית $G \times H$ פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

לכל $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$.

א. הוכיחו כי $G \times H$ עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו- H .

ב. הוכיחו או הפריכו: החבורה $G \times H$ אבליית אם ורק אם G ו- H אבליות.

שאלה 3. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבליית אם ורק אם לכל $a, b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2b^2$.

שאלה 4. תהי S אגודה. הוכיחו שאפשר להרחיב אותה למונואיד שאיבריו $M = S \cup \{e\}$ עם איבר חדש $e \notin S$ כשהפעולה היא הרחבה של הפעולה של S באופן כזה ש- e הוא איבר היחידה במבנה החדש. (יש להראות שהפעולה במבנה החדש היא קיבוצית).

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 5. יהי $M_0 = \{e_0\}$ מונואיד האפס שבו יש רק איבר אחד. תארו הפעולה במונואיד המתקבל מחזרה של n פעמים על הבנייה מהשאלה הקודמת. כלומר עבור $i > 0$ נגדיר מונואיד $M_i = M_{i-1} \cup \{e_i\}$ שבו e_i הוא איבר היחידה החדש ואתם מתבקשים לומר כיצד נראה לוח הכפל של M_n . האם הפעולה חילופית?

בהצלחה!