תרגילי בית 3-4:
ע"מ 27: 6.12, 6.20, 6.30 א,ב, 6.34, 6.35, 6.41

<u>**הערה**</u>: עבור מטריצות $A\in F^{nxm}, B\in F^{kxr}$ הסכום הישר ביניהן היא מטריצה (n+k)x(m+r) אשר הבלוקים B,A באלכסונה והיתר אפסים: $A\oplus B=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$, באופן פרטי כשאחת מהן מטריצת האפס אז: $A\oplus 0=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

ע"מ 33 והלאה: 1.1 וחצי **אבל עבור המקרה הכללי יותר** F^{nxm}, **ולא כפי שמופיע עבור הריבועיות**, 1.5, 2.2, 2.7, 2.8, 2.11, 4.3, 4.8, 4.9

6.12 תרגיל. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: AB הפיכה $\Leftrightarrow$ A הפיכה וגם B הפיכה. [רמז: אם AB הפיכה אז יש C כך ש $A(BC)=(AB)C=I$, לכן (מדוע?) A הפיכה. בדומה עבור B.]

פתרון:

$\Leftarrow$:

$$\exists D:(AB)D=I\wedge D(AB)=I\Rightarrow\exists D:A(BD)=I\wedge(DA)B=I\Rightarrow BD=A^{-1}\wedge DA=B^{-1}$$

$\Rightarrow$:

$$\exists C,D:AC=CA=I\wedge BD=DB=I\Rightarrow(AB)(DC)=A(BD)C=AIC=AC=I\Rightarrow DC=(AB)^{-1}$$

6.20 תרגיל!. א. בהתאם לסימונים של התרגיל הקודם, הוכח ש A מאפסת את הפולינום $f(x)=x^2-\mathrm{tr}(A)\cdot x+\Delta$. [בדוק ע"י הצבה]

ב. השתמש ב(א) להוכיח את התרגיל הקודם בדרך אחרת.

ג. יהיו $A,B,C\in\mathbb{F}^{2\times 2}$. הוכח: $(AB-BA)^2C=C(AB-BA)^2$. [רמז: תהי $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$ עם עקבה אפס. הוכח ש A^2 היא סקלרית]

פתרון:

א. ע"י הצבה (מציבים A במקום x) וחישוב ישיר.

ב. נניח תחילה ש $\Delta\neq 0$. על פי סעיף א' מתקיים: $A^2-tr(A)A=-\Delta I$ ומכיוון ש $\Delta\neq 0$ נחלק בה: ונקבל $-\frac{1}{\Delta}\left(A^2-AtrA\right)=I$ $\Leftarrow$ $A\underbrace{\frac{1}{-\Delta}\left(A-trA\right)}_{A^{-1}}=I$ ולכן נקבל:

$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

ג. ידוע כי העקבה מקיימת את שתי התכונות: $\begin{cases} tr(AB)=tr(BA) \\ tr(A+B)=tr(A)+tr(B) \end{cases}$, ולכן $tr(AB)-tr(BA)=0$.

בנוסף קל להוכיח שאם $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ ו $tr(A)=0$ אז A^2 סקלרית. ז"א קיים $\alpha\in\mathbb{R}$ שעבורו $(AB-BA)^2=\alpha I$ ואז $C(\alpha I)=(\alpha I)C$.

6.30 תרגיל. חשב את המטריצה ההופכית עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

א. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ב. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

פתרון:

א. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

6.34 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$. מצא בעזרת A^{-1} את הפתרון הכללי של המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-x_4+x_5 & = & 1 \\ -x_2+x_3+2x_4-x_5 & = & 2 \\ 2x_1+3x_2+8x_3+x_4+2x_5 & = & 3 \end{cases}.$$

פתרון:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ ולכן $A^{-1}=\begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

נרשום את המשוואות בצורה הבאה:

$B=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$. נחשב את $A^{-1}B$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1+s-t \\ 0 & 1 & 2 & 2-2s+t \\ 2 & 3 & 8 & 3-s-2t \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-9s-5t \\ 0 & 1 & 0 & -1+3s \\ 0 & 0 & 1 & 1+3s+t \end{array}\right)$$

$$x_1=-1-9s-5t, x_2=-1+3s, x_3=1+3s+t, x_4=s, x_5=t$$

6.35 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה.

א. הוכח שלכל k טבעי, $(A^{-1})^k=A^{-k}$.

ב. הוכח שלכל k טבעי, $(A^k)^{-1}=A^{-k}$.

ג. הסק שלכל a,b **שלמים** (לאו דוקא חיוביים) מתקיים $(A^a)^b=A^{ab}=(A^b)^a$.

ד. $A^a\cdot A^b=A^{a+b}=A^b\cdot A^a$.

פתרון:

נעשה רק את סעיפים א+ב

א+ב. $A^k\left(A^{-1}\right)^k=A\cdot A....\cdot A\,A^{-1}\cdot A^{-1}....\cdot A^{-1}=I$ ולכן $\left(A^{-1}\right)^K=\left(A^K\right)^{-1}$

קל להראות באינדוקציה ש $\left(A^{-1}\right)^k=A^{-k}$

6.41 תרגיל[1]. תהא A מטריצה ריבועית.

א. נניח שקיים מספר טבעי n כך ש $A^n=I$. הוכח ש A הפיכה.

ב. תהא A מטריצה הפיכה מעל שדה סופי (למשל $\mathbb{Z}_p$) הוכח שקיים n טבעי כך ש $A^n=I$.

ג. מצא מטריצה הפיכה A כך שלכל מספר טבעי n, $A^n\neq I$ (לפי (ב) המטריצה צריכה להיות מעל שדה אינסופי).

פתרון:

א. A ריבועית, $A^n=I$ אזי; $I=A^n=AA^{n-1}=A^{n-1}A$ ולכן $A^{-1}=A^{n-1}$.

ב. יהי שדה סופי עם p איברים, בכל מטריצה ריבועית יש n^2 מקומות ובכל אחד מהם יש p אפשרויות ולכן יש סה"כ $p^{\left(n^2\right)}$ אפשרויות ולכן בקבוצה $\left\{A,A^2,...,A^{\left(p^{\left(n^2\right)}+1\right)}\right\}$ יש לפחות שתי מטריצות שוות.

ז"א קיימים שני איברים $i\neq j$ (נניח בלי הגבלת הכלליות ש $i>j$) המקיימים $A^i=A^j$. נתון ש A הפיכה ולכן גם A^j הפיכה וההופכית שלה היא A^{-j}. נסמן $n:=i-j$ ונקבל $A^n=A^{i-j}=I$.

ג. <u>בשדה אינסופי המאפיין הוא אפס</u> ולכן עבור $A=2I$ נקבל $A^n=2^nI$ מכיוון שהמאפיין הוא אפס לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $2^n=1$.

$1.1\frac{1}{2}$ תרגיל. הוכח ש $\mathbb{F}^n$ וכן F^{nxm} הם מרחבים וקטורים.

פתרון:

F^{nxm}:

$1.\forall a_{ij}, b_{ij} \in F: \quad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m \quad a_{ij}+b_{ij} \in F \Rightarrow$

$\forall A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in F^{nxn} \quad A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \in F^{nxm}$

$2.\forall a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in F: \quad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m \quad (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) \Rightarrow$

$\forall A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij}) \in F^{nxn} \quad (A+B)+C=(a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij})=A+(B+C)=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})$

$3.\forall a_{ij}, b_{ij} \in F: \quad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m \quad a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij} \Rightarrow$

$\forall A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in F^{nxn} \quad A+B=(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})=B+A$

$4.\forall a_{ij} \in F: \quad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m \quad a_{ij}+0=a_{ij} \Rightarrow \forall A=(a_{ij}) \in F^{nxn} \quad A+(0)=(a_{ij}+0)=A$

$5.\forall a_{ij} \in F: \quad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m \quad \exists -a_{ij} \in F: a_{ij}+(-a_{ij})=0 \Rightarrow$

$\forall A=(a_{ij}) \in F^{nxm}, \exists -A=(-a_{ij}) \in F^{nxn} \quad A+(-A)=(a_{ij}+(-a_{ij}))=(0)$

6.

$a.\forall a_{ij}, k \in F: \quad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m \quad k \cdot a_{ij} \in F \Rightarrow \forall A=(a_{ij}) \in F^{nxn} \quad kA=(ka_{ij}) \in F^{nxm}$

$b.\forall a_{ij}, k, h \in F: \quad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m \quad k(h \cdot a_{ij})=(kh)a_{ij} \in F \Rightarrow$

$\forall A=(a_{ij}) \in F^{nxn} \quad k(hA)=(k(ha_{ij}))=((kh)a_{ij})=(kh)A$

$c.\forall a_{ij}, 1 \in F: \quad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m \quad 1 \cdot a_{ij}=a_{ij} \Rightarrow \forall A=(a_{ij}) \in F^{nxn} \quad 1 \cdot A=(1 \cdot a_{ij})=A$

$d1.\forall a_{ij}, b_{ij}, k \in F: \quad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m \quad k(a_{ij}+b_{ij})=ka_{ij}+kb_{ij} \Rightarrow$

$\forall A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in F^{nxn} \quad k(A+B)=(k(a_{ij}+b_{ij}))=(ka_{ij}+kb_{ij})=kA+kB$

$d2.\forall a_{ij}, h, k \in F: \quad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m \quad (h+k)a_{ij}=ha_{ij}+ka_{ij} \Rightarrow$

$\forall A=(a_{ij}) \in F^{nxn} \quad (h+k)A=((h+k)a_{ij})=(ha_{ij}+ka_{ij})=hA+kA$

$F^n = F^{nx1} = F^{nxm} \ : m = 1 \Rightarrow$ פרטי *מקרה*

1.5 **תרגיל**. הוכח שמרחב המכפלה הוא אכן מרחב וקטורי.

מכיוון ש U,V מ"ו, ניתן להוכיח בקלות רבה את כל תכונות המרחב הוקטורי עבור מרחב המכפלה $U \times V$.

2.2 **תרגיל**. עיין בתרגיל 1.4 לעיל. האם ניתן לומר ש:

א. $\mathbb{F}$ תת-מרחב של V?

ב. V כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{H}$ הוא תת-מרחב של V (כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$)?

פתרון:

א. לא, F קבוצת סקלרים ו-V קבוצת וקטורים ולכן F לא מוכלת בהכרח ב-V. לדוגמא F R ו- $V = R^2$.

ב. כן. H מוכלת ב-F ולכן מרחב הוקטורים מעליה מוכל במרחב הוקטורים מעל F. כמו כן, H תת שדה של F ולכן שומרת על הפעולות והאיברים הנייטרלים של F, כתוצאה מכך V שמוגדרת מעל H שומרת על הפעולות והאיבר הנייטרלי של V שמוגדרת מעל F.

2.7 **תרגיל. הקריטריון הקצר ביותר בעולם.** יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ונניח ש $W \subseteq V$ מקיימת: $\emptyset \neq W$ ולכל $u,w \in W$ ו $\alpha \in \mathbb{F}$, $u+\alpha w \in W$. הוכח ש W תת-מרחב של V.

פתרון:

1. $1 \in F \Rightarrow \forall u,v \in W \quad u + 1 \cdot w = u + w \in W$
2. נובע מאסוציאטיביות החיבור ב- V
3. נובע מקומוטטיביות V
6: d2: נובע מדיסטריבוטיביות V
4. ע"ס 2d6 ו-1:

$$-1 \in F \Rightarrow \forall u \in W \subseteq V \quad 0_V = (1 + (-1))u = u + (-1)u \in W$$

a6. ע"ס 1:

$$\forall u \in W \qquad \underbrace{u + ... + u}_{k \text{ פעמים}} = ku \in W$$

5. ע"ס a6:

$$\forall u \in W \qquad u \in V \Rightarrow (-1)u = -u \in W$$

b6. מאוסציאטיביות הכפל V

c6. $u \in V \Rightarrow 1 \cdot u = u \qquad \forall u \in W$

1d6. $u,v \in V \Rightarrow k \cdot (u+v) = ku + kv \qquad \forall u,v \in W$

2.8 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי, ויהיו W,U תת-מרחבים של V כך ש $W \subseteq U$. הוכח ש W תת-מרחב של U.

פתרון:

נתון $W \subseteq U$.

כמו כן W ת"מ של V ולכן: $u+kv \in W \qquad \forall u,v \in W, k \in F$

לבסוף, U,W שומרות על פעולות V כתתי מרחבים שלה ולכן W שומרת על פעולות U.

בסה"כ W ת"מ של U.

2.11 תרגיל. א. יהיו U,V מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. הוכח ש $U\times\{0_V\}$ וכן $\{0_U\}\times V$ תת-מרחבים של $U\times V$.

ב. הוכח שלכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $V=\{(\alpha x,\beta x) : x\in\mathbb{F}\}$ תת-מרחב של $\mathbb{F}\times\mathbb{F}$.

פתרון:

ע"פ הקריטריון שהוכח ב-2.7:

א.

$$\forall u,v \in U, k \in F \qquad u+kv \in U \Rightarrow (u,0),(v,0) \in U \times \{0\}, k \in F \qquad ((u,0)+k(v,0)) = (u+kv,0) \in U \times \{0\}$$

$$\forall u,v \in V, k \in F \qquad u+kv \in V \Rightarrow (0,u),(0,v) \in \{0\} \times V, k \in F \qquad ((0,u)+k(0,v)) = (0,u+kv) \in \{0\} \times V$$

ב.

$$\forall x,y \in F, k \in F \qquad x+ku, y+kv \in F \Rightarrow$$
$$\forall(\alpha x,\beta y),(\alpha u,\beta v) \in V \quad (\alpha x,\beta y)+k(\alpha u,\beta v) = (\alpha x,\beta y)+(k\alpha u,k\beta v) = (\alpha(x+ku),\beta(y+kv)) \in V$$

4.3 תרגיל. הוכח או הפרך:

א. יהיו U,V,W תת-מרחבים של מרחב וקטורי, אזי $U\cap(V+W) = U\cap V + U\cap W$.

ב. יהיו U,V,W תת-מרחבים של מרחב וקטורי, אזי $U\cap(V+W) \neq U\cap V + U\cap W$.

ג. יהיו U,V,W תת-מרחבים של מרחב וקטורי, אזי $U\cap(V+W) \subseteq U\cap V + U\cap W$.

פתרון:

נתבונן במרחב וקטורי $\mathbf{Z}_2^2$ ובתתי מרחבים הבאים:

א.

$$U := \{(0,0),(1,1)\}, V := \{(0,0),(0,1)\}, W := \{(0,0),(1,0)\}$$
$$V+W = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$
$$U \cap (V+W) = U$$
$$\{(0,0)\} = U \cap V + U \cap W \neq U$$

ב,ג דומה מאוד.

או למשל:

א. $U = span\{(1,1)\}, V = span\{(0,1)\}, W = span\{(1,0)\}$. אזי:
$U = U \cap (V+W) \neq U \cap V + U \cap W = \{(0,0)\}$.

ב. אם $U = V = W$ אז מתקיים שוויון.

ג. אותה דוגמא כמו ב-א'.

4.8 תרגיל. מצא $U_i,\ V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ תת-מרחבים, כך ש: **א**. $U_1 + V_1 = \{0\}$. **ב**. $U_2 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$.

א. $U_1, V_1 = \{0\} \subseteq R^n$

ב. $U_2 = Span\{e_2, e_4, ..., e_{2i}\},\ i = 1...\frac{n}{2}$
$V_2 = Span\{e_1, e_3, ..., e_{2i-1}\}$
(כאשר e_k זהו וקטור בסיס סטנדרטי).

דוגמא נוספת - $U_2 = R^n, V_2 = \{0\}$.

__הערה__: עבור מטריצות $A \in F^{nxm}, B \in F^{kxr}$ הסכום הישר ביניהן היא מטריצה (n+k)x(m+r) אשר הבלוקים B,A באלכסונה והיתר אפסים: $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, באופן פרטי כשאחת מהן מטריצת האפס אז: $A \oplus 0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.9 תרגיל. יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$ ו $B\in\mathbb{F}^{k\times r}$. ויהיו:

V_1 - מרחב הפתרונות של $(A\oplus O)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{\mathrm{m}} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}=0$; V_2 - מרחב הפתרונות של $(O\oplus B)\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{\mathrm{r}} \end{pmatrix}=0$;

V_3 - מרחב הפתרונות של $(A\oplus B)\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{\mathrm{r+m}} \end{pmatrix}=0$. הוכח ש $V_3=V_1\oplus V_2$.

$\underline{\underline{+}}$:

$$\forall v=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix}\in V_3 \quad (A\oplus B)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix}=0\wedge\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{0}}=(A\oplus B)\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix}\right)=(A\oplus 0)\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)+\cancel{(A\oplus 0)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix}\right)}+\cancel{(0\oplus B)\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)}+(0\oplus B)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix}\right)=$$

$$(A\oplus 0)\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)+(0\oplus B)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix}\right)=\underline{\underline{\begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B\begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} \end{pmatrix}}}\Rightarrow\begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B\begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\in V_1,\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+r} \end{pmatrix}\in V_2$$

$\underline{\underline{\supseteq}}:$

$$v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \wedge v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} \Rightarrow x_i = y_j = 0, \forall i = 1,,,m, \quad j = 1,...,r \Rightarrow v = 0$$

ובסה"כ סכום ישר.