

מבנים דיסקרטיים – תרגיל 6

כל סעיף שווה 10 נקודות

שאלה 1

א. יהי $(R, +, \cdot)$ חוג ו- $S \subseteq R$ תת קבוצה של R . הוכיחו כי $(S, +, \cdot)$ הוא חוג אם ורק אם:

a. $S \neq \emptyset$

b. לכל $a, b \in S$ מתקיים $a + b, ab, -a \in S$.

ב. הראו בעזרת סעיף א או בכל דרך אחרת כי הקבוצה $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

עם כפל וחיבור מטריצות היא חוג. הראו גם כי יש לו יחידה והיא שונה ממטריצת היחידה.

שאלה 2

הראו כי כל אחד מהבאים הוא חוג. קבעו האם הוא חילופי והאם יש לו יחידה.

א. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] := \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ עם כפל וחיבור של מספרים ממשיים.

ב. $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.

ג. $(\mathbb{R}_+, \oplus, \otimes)$ כאשר $a \oplus b = \ln(e^a + e^b)$ ו- $a \otimes b = a + b$.

שאלה 3

הראו כי כל אחת מהקבוצות הבאות אינה חוג ביחס לפעולות הנתונות.

א. $(\mathbb{C}, \oplus, \otimes)$ כאשר $z \oplus w = z + w + 1$ ו- $z \otimes w = zw$ לכל $z, w \in \mathbb{C}$.

ב. $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{Z} \right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.

ג. $(\mathbb{N}, \oplus, \otimes)$ כאשר $a \oplus b = \max\{a, b\}$ ו- $a \otimes b = a + b$.

שאלה 4

נגדיר תת קבוצה H של $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ ע"י $H = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$.

א. העזרו בשאלה 1 סעיף א כדי להוכיח ש- H חוג.

ב. הראו כי H חוג עם חילוק (כלומר כל איבר למעט 0 הפיך) ושהוא אינו חילופי.

הערה: החוג H נקרא לעיתים המספרים הקוטרניונים.