מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

תרגיל בית מספר 7

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. הוכיחו או הפריכו:

א) $\left|\left\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}_{11}\right\}\right| = \left|\mathbb{Z}_{11}\right|$.

ב) $\left|\left\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\right\}\right| = \left|\mathbb{Z}\right|$.

ג) אם $|A|=|B|$ וגם $f: A \to B$ חח"ע אזי f על.

ד) אם $|A|=|B|=n \in \mathbb{N}$ וגם $f: A \to B$ חח"ע אזי f על.

2. הוכיחו: קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונאליים אינה בת מניה.

3. עיגול במישור $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ מוגדר להיות הקבוצה $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\middle|\; (x-a)^2+(y-b)^2 \le r^2\right\}$

עבור נקודה $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ורדיוס $r\in\mathbb{R}^+$ (כאשר $\mathbb{R}^+=\left\{x\in\mathbb{R} : x>0\right\}$).

הוכיחו: מספר העיגולים הזרים שאפשר לצייר במישור הוא בן מנייה.

4. נגדיר $A=\mathbb{N}\cup\{0\}$. הוכיחו שהקבוצה $A\times A\times A$ היא בת מנייה על-ידי הגדרת פונקציה חח"ע ועל לתוך $\mathbb{N}$.

רמז: השתמשו בפונקצית הזיווג של קנטור.

5. נתבונן ב- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, עבור $i, j \in \mathbb{N}$ נגדיר $A_{ij}=\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(i)=j\right\}\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

א) הוכיחו: $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{ij}\right)=\varnothing$.

ב) הוכיחו: $\bigcap_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ij}\right)\neq\varnothing$.

ג) הוכיחו שלכל קבוצה $H\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה מתקיים: $\bigcap_{h\in H}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih(i)}\right)\neq\varnothing$.

ד) הסיקו שלא קיימת $H\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה כך ש- $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{ij}\right)=\bigcap_{h\in H}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih(i)}\right)$.

6. הוכיחו: אם A_{ij} קבוצות, עבור $i, j\in\mathbb{N}$, אז: $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{ij}\right)=\bigcap_{h\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih(i)}\right)$.

הסבירו מדוע תרגיל זה לא סותר את סעיף ד' בתרגיל 5?

בהצלחה!