

תרגיל בית מספר 7

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדב

1. הוכיחו או הפריכו:

(א) $|\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}_{11}\}| = |\mathbb{Z}_{11}|$

(ב) $|\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}| = |\mathbb{Z}|$

(ג) אם $|A| = |B|$ וגם $f: A \rightarrow B$ חח"ע אזי f על.
 (ד) אם $|A| = |B| = n \in \mathbb{N}$ וגם $f: A \rightarrow B$ חח"ע אזי f על.

2. הוכיחו: קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונאליים אינה בת מניה.

3. עיגול במישור $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ מוגדר להיות הקבוצה $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$

עבור נקודה $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ורדיוס $r \in \mathbb{R}^+$ (כאשר $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$).

הוכיחו: מספר העיגולים הזרים שאפשר לצייר במישור הוא בן מניה.

4. נתונה $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ הפיכה. נגדיר $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$. הוכיחו שהקבוצה $A \times A \times A$ היא בת

מנייה על-ידי הגדרת פונקציה חח"ע ועל לתוך \mathbb{N} .

5. נתבונן ב- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, עבור $i, j \in \mathbb{N}$ נגדיר $A_{ij} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(i) = j\} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(א) הוכיחו: $\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) = \emptyset$

(ב) הוכיחו: $\bigcap_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij} \right) \neq \emptyset$

(ג) הוכיחו שלכל קבוצה $H \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה מתקיים: $\bigcap_{h \in H} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right) \neq \emptyset$

(ד) הסיקו שלא קיימת $H \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה כך ש- $\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) = \bigcap_{h \in H} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right)$

6. הוכיחו: אם A_{ij} קבוצות, עבור $i, j \in \mathbb{N}$: אז $\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right)$

הסבירו מדוע תרגיל זה לא סותר את סעיף ד' בתרגיל 5?

בהצלחה!