תרגיל בית 8 – טופולוגיה

שאלה 1

נתבונן בשלושה תת-מרחבים של $\mathbb{R}^2$:

$$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$$
$$Y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2=1\right\}$$
$$Z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1\right\}$$

ראינו בכיתה ש-Z אינו הומיאומורפי ל-X. האם Y הומיאומורפי ל-X או ל-Z?
הוכיחו את תשובתכם!

שאלה 2

תהי X קבוצה לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית. האם המרחב $\left(X,\tau_{cofinite}\right)$ קשיר? (רמז: תלוי בעוצמה של X).

שאלה 3

<u>תזכורת</u> – הישר של סורגנפריי. נסמן ב-$\mathbb{R}_\ell$ את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הבאה T:

$O\in T$ אמ"מ O היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ (כולל איחוד ריק).

א. הוכיחו כי מרכיבי הקשירות של $\mathbb{R}_\ell$ הם הנקודונים.

כלומר, הראו שאם A הוא תת-מרחב בעל יותר מנקודה אחת, אזי הוא אינו קשיר.

ב. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$. כלומר, קבעו אילו פונקציות הן רציפות והוכיחו גם שהפונקציות שלא נכנסו לרשימה שלכם – הן אינן רציפות.

שאלה 4

הוכיחו כי $\mathbb{R}$ אינו הומאומורפי ל-$\mathbb{R}^n$ עבור $n>1$.

שאלה 5

תרגיל (ממבחן)

יהי $A\subseteq\mathbb{R}$. הראו שאם A צפוף ב- $\mathbb{R}$ וכן $A\neq\mathbb{R}$ אז A איננו קשיר.

שאלה 6

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ויהי $A\subseteq X$ תת-מרחב קשיר. הוכיחו שלכל תת-מרחב $B\subseteq X$, אם $A\subseteq B\subseteq cl(A)$ אזי B קשיר.

שאלה 7

יהי X מ"ט ויהיו $A,B\subseteq X$. נתון כי A קשיר, B סגוחה (סגורה ופתוחה) וכן $A\bigcap B\neq\varnothing$. הוכיחו כי $A\subseteq B$.

שאלה 8

יהי X מ"ט ותהיינה $A,B\subseteq X$ תת-קבוצות סגורות. נניח כי התת-מרחבים $A\cup B$ ו- $A\cap B$ קשירים. הוכיחו ש- A ו- B קשירים.

<u>הדרכה</u>: מ"ל ש- A - קשיר שכן ההוכחה ש- B קשיר סימטרית. הניחו בשלילה ש- $A=U\cup V$ כאשר U,V סגורות...

בהצלחה!