לינארית 2 מדעי המחשב פתרון מועד ב תשעו

1. בשאלה זאת נסמן את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$ ב $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

(א) נחשב, לפי הגדרה:

$$\begin{aligned} Te_1 &= (1,2,2,-1)^t \\ Te_2 &= (0,2,0,2)^t \\ Te_3 &= (1,2,2,-1)^t \\ Te_4 &= (0,2,0,2)^t \end{aligned}$$

ולכן $A = [T]_E^E = [T]_E$ היא המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

כעת, הפולינום האופיני של A הוא

$$P_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \right| =$$

נחבר את השורות 1+2+3 לשורה הרביעית. פעולה זאת לא משנה את הדטרמיננטה

$$= \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 \end{pmatrix} \right| = (\lambda-4) \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

נחסר את העמודה הרביעית מעמודה הראשונה וכן נעשה אותה מהעמודה השניה ומהעמודה השלישית ונקבל (בנוסף לפיתוח לפי שורה רביעית)

$$= (\lambda-4) \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -2 \\ -2 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda-4) \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \right| =$$

נחסר את העמודה הראשונה מהעמודה השלישית נקבל

$$= (\lambda-4)\left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & -\lambda\\ 0 & \lambda & 0\\ -2 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right| = \lambda(\lambda-4)\left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| =$$

נחבר את שורה 3 לשורה 1 ונגיע למטריצה משולשית (תזכורת: דטר' של מטריצה משולשית היא מכפלה איברי האלכסון]

$$= \lambda(\lambda-4)\left|\begin{pmatrix}\lambda-3 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| = \lambda^2(\lambda-4)(\lambda-3)$$

(ב) מסעיף קודם נקבל 3 ע"ע $\lambda_1=4, \lambda_2=3, \lambda_3=0$. נחשב ו"ע מתאימים:

i. עבור $\lambda_1=4$

$$A-4I=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ -1 & 2 & -1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 4 & -4 & -4\\ 0 & -6 & 4 & 6\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda_1=4}=\left\{\begin{pmatrix}0\\ t\\ 0\\ t\end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{v_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

ii. עבור $\lambda_2=3$

$$A-3I=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & -3 & -2\\ 0 & -4 & 3 & 2\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda_2=3}=\left\{\begin{pmatrix}-1/3t\\ 0\\ -2/3t\\ t\end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{v_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\\ -3\end{pmatrix}\right\}$$

iii. עבור $\lambda_3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda_3=0} = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ -t \\ s \\ t \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כיוון שפ"א של Aמתפרק לגורמים לינארית + לכל ע"ע הר"א=ר"ג נסיק כי Aלכסינה.
נגדיר

$$P = (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

ונקבל

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 3 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = D$$

או באופן שקול $A = PDP^{-1}$

.2

(א) נראה כי T ה"ל : לכל $f, g \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$T(\alpha f + g) = [\alpha f + g]'(0) = [\alpha f' + g'](0) = \alpha f'(0) + g'(0) = \alpha T(f) + T(g)$$

וסיימנו. נחשב מטריצה מייצגת ל T לפי הבסיס הסטנדרטי $S = \{1, x, x^2\}$:

$$[T]_S^S = \left([T(1)]_S, [T(x)]_S, [T(x^2)]_S\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה מדורגת ורואים כי $\dim Im(T) = rank(T) = rank([T]_S^S) = 1$.
כעת, משפט הדרגה אומר כי

$$3 = \dim V = \dim \ker T + \dim ImT$$

ולכן $\dim \ker T = 3 - 1 = 2$.

(ב) הפ"א של T הוא

$$P_T(\lambda)=\left|\lambda I-[T]_S^S\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|=\lambda^3$$

ולכן $m_T(\lambda)=\lambda^i$ עבור $i\in\{1,2,3\}$. נבדוק

i. עבור $i=1$ נקבל כי $[T]_S^S\neq 0$ ולכן אפשרות זאת נפסלת

ii. עבור $i=2$ נקבל כי $\left([T]_S^S\right)^2=0$ ולכן זאת האפשרות הנכונה

כיוון ש $m_T(\lambda)$ אינו מתפרק לגורמים לינארים שונים ממעלה 1 נקבל כי T אינה לכסינה

(ג) הפ"מ $m_T(\lambda)$ חושב בסעיף הקודם והוא שווה ל λ^2

.3

(א) נוכיח כי זוהי מ"פ. לכל $f,g,h\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים

i. לינאריות ברכיב הראשון:

א'.

$$\begin{aligned}\langle f+g,h\rangle &= (f+g)(0)h(0)+(f+g)(2)h(2)+(f+g)(-2)h(-2)=\\ &= \left[f(0)+g(0)\right]h(0)+\left[f(2)+g(2)\right]h(2)+\left[f(-2)+g(-2)\right]h(-2)=\\ &= f(0)h(0)+g(0)h(0)+f(2)h(2)+g(2)h(2)+f(-2)h(-2)+g(-2)h(-2)\\ &= \left[f(0)h(0)+f(2)h(2)+f(-2)h(-2)\right]+\left[g(0)h(0)+g(2)h(2)+g(-2)h(-2)\right]\\ &= \langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle\end{aligned}$$

ב'.

$$\begin{aligned}\langle \alpha f,h\rangle &= (\alpha f)(0)h(0)+(\alpha f)(2)h(2)+(\alpha f)(-2)h(-2)=\\ &= \alpha f(0)h(0)+\alpha f(2)h(2)+\alpha f(-2)h(-2)=\\ &= \alpha\left(f(0)h(0)+f(2)h(2)+f(-2)h(-2)\right)\\ &= \alpha\left\langle f,h\right\rangle\end{aligned}$$

ii. סמטריות:

$$\langle f,h\rangle = f(0)h(0)+f(2)h(2)+f(-2)h(-2) = h(0)f(0)+h(2)f(2)+h(-2)f(-2) = \langle h,f\rangle$$

iii. אי שליליות:

א'.

$$\langle f,f\rangle = f(0)f(0)+f(2)f(2)+f(-2)f(-2) = [f(0)]^2+[f(2)]^2+[f(-2)]^2 \geq 0$$

ב'.

$$\langle f,f\rangle = 0 \iff [f(0)]^2+[f(2)]^2+[f(-2)]^2 = 0 \iff f(0)=f(2)=f(-2)=0$$

כיוון ש f פולינום מדרגה לכל היותר 2 זה מתקיים אמ"מ $f=0$ [לפולינום מדרגה n ששונה מאפס יש לכל היותר n שורשים. אצלנו יש 3 שורשים לפולינום שהוא מדרגה קטנה שווה 2]

(ב) נבצע תהליך גרם שמידט על הבסיס הסטנדרטי $S=\left\{v_1=1, v_2=x, v_3=x^2\right\}$ שבסופו נקבל קבוצה או"ג $W=\{w_1,w_2,w_3\}$ שננרמל -נחשב

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 = x - \frac{0}{3}\cdot 1 = x \\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 - \frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2 = x^2 - \frac{8}{3}\cdot 1 - \frac{0}{8}x = -\frac{8}{3}+x^2 \end{aligned}$$

כעת ננרמל ($\|w_1\|=\sqrt{3}, \|w_2\|=\sqrt{8}, \|w_3\|=\sqrt{\frac{96}{9}}$). שימו לב לחישוב

$$||w_3||^2 = \left(-\frac{8}{3}\right)^2+\left(-\frac{8}{3}+4\right)^2+\left(-\frac{8}{3}+4\right)^2 = \left(-\frac{8}{3}\right)^2+2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64+2\cdot 16}{9} = \frac{96}{9}$$

ונקבל

$$\left\{u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}, u_2=\frac{1}{\sqrt{8}}x, u_{3=}\frac{1}{\sqrt{\frac{96}{9}}}\left(-\frac{8}{3}+x^2\right)\right\}$$

בסיס או"נ.

(ג) נסמן $u=h$ ואת ההיטל ב $\Pi_W(u)$ [שימו לב כי $W=span\left\{u_1\right\}$] ונחשב

$$\Pi_W(u) \quad = \quad \langle u,u_1\rangle u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 7+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3\right)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{11}{9}$$

(ד) לא כי תכונת האי שליליות אינה מתקיימת. למשל $f(x)=x\,(x-2)\,(x+2)\in$ $\mathbb{R}_3[x]$ מקיים כי

$$\langle f,f\rangle=[f(0)]^2+[f(2)]^2+[f(-2)]^2=0$$

אך זהו אינו פולינום האפס.

4. נכון. כי מתקיים ש $det(A),det(A^{-1})\in\mathbb{Z}$ כי כל איברי מטריצות אלו שלמים. בנוסף מתקיים כי $det(A^{-1})=\frac{1}{det(A)}$. נסמן $x=det(A)$. מהנתונים נסיק כי $x,\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$ המספרים היחידים המקיימים זאת הם $x=\pm1$.

5. נכון. מהנתון

$$AA'=-A'A$$

ושימוש בעובדות ש $det(AA')=det(A)det(A')=det(A')det(A)$ וגם ש $det(-A'A)=(-1)^7\,det(A')det(A)$ נקבל כי

$$det(A')det(A)=-det(A')det(A)$$

מה שמכריח $det(A')det(A)=0$. כלומר $det(A')=0$ או $det(A)=0$ כלומר A' אינה הפיכה או ש A אינה הפיכה.

6. לא נכון, למשל $V=\mathbb{R}^2$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$ מימד 2. נגדיר $S=\{e_1,e_2\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי ונגדיר את הפונקציות הבאות בעזרת משפט ההגדרה

$$T_1e_1=e_1\quad,\quad T_1e_2=0$$

$$T_2e_1=e_2\quad,\quad T_2e_2=0$$

$$T_3e_1=0\quad,\quad T_3e_2=e_2$$

נראה כי $T_1,T_2,T_3\in W$ בת"ל בפרט $3\le\dim W$. אכן נניח $\sum_{i=1}^{3}\alpha_iT_i=0$ צ"ל כי $\forall j:\alpha_j=0$.

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_iT_i\right)(e_2)=0(e_2)$$

באגף ימין נקבל 0 ובאגף שמאל נקבל $\alpha_3T_3e_2=\alpha_3e_2$ כלומר קיבלנו

$$\alpha_3e_2=0$$

כיוון ש $e_2\neq0$ (כי הוא איבר בבסיס ל V) נקבל כי $\alpha_3=0$. נשארנו עם $\sum_{i=1}^{2}\alpha_iT_i=0$

$$\left(\sum_{i=1}^{2}\alpha_iT_i\right)(e_1)=0(e_1)$$

באגף ימין נקבל 0 ובאגף שמאל נקבל $\alpha_1 T_1 e_1 + \alpha_2 T_2 e_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ כלומר קיבלנו

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$$

כיוון ש e_1, e_2 בסיס נקבל שגם

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

7. לא נכון. למשל למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

יש 2 ע"ע ששניהם שווים 1.

8. נכון. הוכחה: יהא $v \in V_\lambda \cap V_\mu$ צ"ל כי $v = 0$. אכן, מהנתונים נקבל כי

$$(Av = \lambda v) \wedge (Av = \mu v)$$

נחסר בין 2 המשוואות ונקבל כי

$$0 = \lambda v - \mu v = (\lambda - \mu) v$$

כיוון ש $\lambda \neq \mu$ נקבל כי $\lambda - \mu \neq 0$ ולכן $v = 0$ כנדרש.

9. לא נכון. למשל

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי

$$A = P^{-1} A' P = P A' P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לשתיהם יש ע"ע יחיד שהוא 0 עם וקטור עצמי בודד אבל:
ל A' הוקטור העצמי המתאים הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואילו
ל A הוקטור העצמי המתאים הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. נכון. נתון כי $A^k = 0$ וגם $A^{k-1} \neq 0$ עבור $k \in \mathbb{N}$. למטריצה זאת יש ע"ע יחיד 0 עם פ"מ $m_A(x) = x^k$. כיוון ש A לכסינה אזי הפ"מ מתפרק לגורמים לינארים שונים מדרגה 1 ולכן $k = 1$. מה שאומר ש $A = A^k = 0$.

11. נכון. נתון כי קיימות D אלכסונית ו P הפיכה כך ש

$$P^{-1} A P = D$$

במעבר פשוט מקבלים כי

$$A = PDP^{-1}$$

ולכן

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

ובמעבר פשוט

$$P^{-1}A^2P = D^2$$

כיון ש D אלכסונית גם D^2 כזאת. מכאן ש A^2 לכסינה.

12. לא נכון. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

לכסינה אבל הפולינום האופיני הוא $p_A(x) = x^2$ ואילו הפולינום המינימאלי הוא $m_A(x) = x$

13. לא נכון. למשל הפ"מ של

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שווה ל x^2 אבל אין להם אותה צורת זורדן (A, A' כבר בצורת זורדן והם אינם שוות)

14. נכון מעל הממשיים ולא מעל המרוכבים. למה? כי בכל ממ"פ מתקיים

$$||v+u||^2 = \langle v+u, v+u\rangle = ||v||^2 + ||u||^2 + \langle v,u\rangle + \langle u,v\rangle$$

לפי הנתון כי $||v+u||^2 = ||v||^2 + ||u||^2$ נקבל כי $\langle v,u\rangle + \langle u,v\rangle = 0$. בשימוש בהגדרת מכפלה פנימית נמשיך לכך ש $2Re(\langle v,u\rangle) = \langle v,u\rangle + \overline{\langle v,u\rangle} = 0$. בחילוק ב 2 נקבל כי

$$Re(\langle v,u\rangle) = 0$$

כעת, אם זהו ממ"פ מעל הממשים נקבל כי $\langle v,u\rangle = Re(\langle v,u\rangle) = 0$ ואז u, v מאונכים.
אך אם זהו ממ"פ מעל המרוכבים
ניתן לקחת את הוקטורים $v = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (בממ"פ $\mathbb{C}^2$) שאינם מאונכים זה לזה אך מתקיים

$$||v+u||^2 = 2 = ||v||^2 + ||u||^2$$

15. לא נכון. למשל $V=\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית מתקיים כי $u=e_1$ אורתוגונאלי ל $v=e_2$ וגם $v=e_2$ אורתוגונאלי ל $w=e_1$ אך u אינו אורתוגונאלי ל w (כאשר $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$)