

תרגיל 3

להגשה עד 7.12.16

שאלה 1

לכל אוסף קיבעו האם האוסף הוא אלגברה, והאם הוא σ -אלגברה.

1. $X = \{1, 2, 3, 4\}$, ו- $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

2. $X = [0, 1]$, ו- $\mathcal{S} = \{\emptyset\} \cup \{A : [1, \frac{1}{2}] \subseteq A\}$

3. $X = [0, 1]$, ו- $\mathcal{S} = \{A : \{0, 1\} \subseteq A \text{ or } \{0, 1\} \cap A = \emptyset\}$

4. $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, ו- $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{S} : \text{אם לכל } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A \text{ מתקיים: } (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X : y_1 = x_1\} \subseteq A$

שאלה 2

1. הראו שכל קבוצה פתוחה ב- \mathbb{R} היא איחוד בן מניה של קבוצות סגורות (תכונה זו נקראת F_σ).

2. הראו שכל קבוצה סגורה ב- \mathbb{R} היא חיתוך בן מניה של קבוצות סגורות (תכונה זו נקראת G_δ).

שאלה 3

יהי (X, \mathcal{S}) מרחב מדיד ונניח כי μ הינה פונקציית קבוצות חיובית ואדיטיבית סופית כך ש- $\mu(\emptyset) = 0$ ולכל סדרת קבוצות עולה $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתקיים:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

הראו כי μ הינה מידה.

שאלה 4

יהי (\mathbb{X}, \mathbb{A}) מרחב מדיד.

1. ותהי $a \in \mathbb{X}$. נגדיר: $\delta_a: \mathbb{A} \rightarrow [0, \infty]$ על ידי:

$$\delta_a(E) := \begin{cases} 1 & a \in E \\ 0 & a \notin E \end{cases}$$

הוכיחו כי δ_a היא מידה חיובית מעל \mathbb{A} .

2. תהי $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת מידות חיוביות מעל \mathbb{A} , $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת מספרים ב- $[0, \infty]$. לכל $E \in \mathbb{A}$ נגדיר:

$$\mu(E) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(E)$$

הוכיחו כי μ מידה חיובית מעל \mathbb{A} .

שאלה 5

תהי $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת פונקציות רציפות על הקטע $[0, 1]$. הוכיחו כי הקבוצה:

$$A := \{x : f_n(x) \rightarrow 0\}$$

הינה בורלית (כלומר, שייכת ל- σ אלגברת בורל $\mathbb{B}([0, 1])$).

שאלה 6

יהי (X, \mathcal{S}, μ) מ"ח. ותהי $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת קבוצות מדידות \mathcal{S} , עבורה מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. תהי F קבוצת כל האברים ב- X השייכים לאינסוף קבוצות בסדרה. הוכיחו כי $\mu(F) = 0$.

בהנאה!