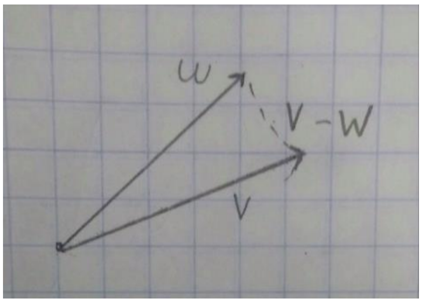
הגדרה

המרחק מ $-v$ ל $-w$, מוגדר ע״י הנוסחה: $d(v,w)=||v-w||$.

המחשה



תכונות

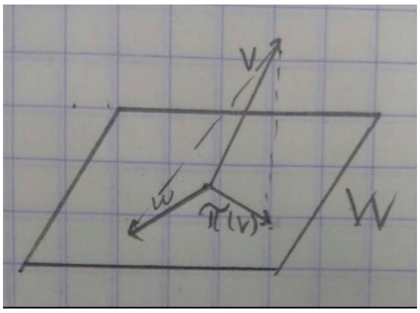
1. $d(v,w)\in\mathbb{R}_{\geq 0}$. $d(v,w)=0 \Leftrightarrow v=w$.
2. $d(v,w)=d(w,v)$.
3. $d(v,u)\leq d(v,w)+d(w,v)$.

תרגיל: הוכיחו!

משפט

ההיטל של ווקטור v על תת מרחב W, הוא הווקטור ב - W, הקרוב ביותר ל - v.

המחשה



במילים אחרות: $d(v,\pi(v))=min\{d(v,w): w\in W\}$.

תזכורת (משפט פיתגורס)

אם $u\perp u'$, אזי $||u+u'||^2=||u||^2+||u'||^2$.

הוכחה

ידוע ש - $v-\pi(v)\in W^{\perp}$.

לכן, לכל $w\in W$: $v-\pi(v)\perp\pi(v)-w$.

לכן, לפי משפט פיתגורס :

$$||v-w||^2=||v-\pi(v)||^2+||\pi(v)-w||^2\geq||v-\pi(v)||^2$$

$$||v-w||\geq||v-\pi(v)||$$

$$d(v,w)\geq d\big(v,\pi(v)\big)$$

שוויון מתקיים אם ורק אם : $w=\pi(v)$.

■

העתקה צמודה ($Adjoint\ Map$)

הגדרה

יהיו V,W מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. נסמן: $dimV=n, dimW=m$.

תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית.

אומרים ש - $T^*:W\to V$ היא **צמודה** ל - T, אם לכל $v\in V$ ולכל $w\in W$, מתקיים שוויון:

$$(1): \boxed{\langle T(v),w\rangle=\langle v,T^*(w)\rangle}$$

<u>נוכיח קיום ויחידות של T^*</u>

1. נבחר ב - V,W בסיסים <u>אורתונורמליים</u> $B=\{v_1,\cdots,v_n\}, B'=\{w_1,\cdots,w_m\}$.
הבסיסים קיימים לפי גראם שמידט.

2. בהנחה ש - T^* קיימת, נוכיח יחידות.

שוויון (1) מתקיים לכל $v\in V, w\in W$, לכן נציב במקום v ווקטור $v_j,\ \ 1\le j\le n$:
לכל $w\in W$:

$$<T(v_j),w>=<v_j,T^*(w)>$$

נוכיח ש - $T^*(w)$ מוגדר באופן חד משמעי.

נחפש את ההצגה של $T^*(w)$ יחסית לבסיס B:

$$T^*(w)=\alpha_1\cdot v_1+\cdots+\alpha_j\cdot v_j+\cdots+\alpha_n\cdot v_n$$

נמצא את כל המקדמים $\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n$:

תזכורת

אם $v\in V$, $\{v_1,\cdots,v_n\}$ בסיס אורתונורמלי, ו - $v=\alpha_1\cdot v_1+\cdots+\alpha_n\cdot v_n$.

אז: $\alpha_j=<v,v_j>$.

ידוע ש - $\alpha_j=<T^*(w),v_j>$, לכן: $\overline{<T(v_j),w>}\overset{(1)}{=}\overline{<v_j,T^*(w)>}=\alpha_j$.

3. כדי להוכיח קיום של T^*, נגדיר, לכל $w\in W$, את $T^*(w)$:

$$T^*(w) = \overline{< T(v_1), w >} \cdot v_1 + \cdots + \overline{< T(v_j), w >} \cdot v_j + \cdots + \overline{< T(v_n), w >} \cdot v_n$$

צריך לבדוק כי :

א. T^* מקיימת את שוויון (1).

ב. T^* העתקה לינארית.

א. שוויון (1) מתקיים ל - $v = v_1, \cdots, v = v_j, \cdots, v = v_n$ (לפי בנייה).

נבדוק עבור v כלשהו : אם $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$, אז :

$$< T(v), w > = < T(\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n), w >$$

$$< T(v), w > = < \alpha_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(v_n), w >$$

$$< T(v), w > = \alpha_1 \cdot < T(v_1), w > + \cdots + \alpha_n \cdot < T(v_n), w >$$

$$< T(v), w > = \alpha_1 \cdot < v_1, T^*(w) > + \cdots + \alpha_n \cdot < v_n, T^*(w) >$$

$$< T(v), w > = < \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n, T^*(w) >$$

$$< T(v), w > = < v, T^*(w) >$$

ב. צריך לבדוק ש - $T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) = \beta_1 \cdot T^*(w_1) + \beta_2 \cdot T^*(w_2)$:

$$< v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) > = < T(v), \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 >$$

$$< v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) > = \overline{\beta_1} \cdot < T(v), w_1 > + \beta_2 \cdot < T(v), w_2 >$$

$$< v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) > = \overline{\beta_1} \cdot < v, T^*(w_1) > + \overline{\beta_2} \cdot < v, T^*(w_1) >$$

$$< v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) > = < v, \overline{\overline{\beta_1}} \cdot T^*(w_1) + \overline{\overline{\beta_2}} \cdot T^*(w_2) >$$

$$< v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) > = < v, \beta_1 \cdot T^*(w_1) + \beta_2 \cdot T^*(w_2)$$

נתבונן בהפרש :

$$< v, T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) > - < v, \beta_1 \cdot T^*(w_1) + \beta_2 \cdot T^*(w_2) > = 0$$

$$< v, \overbrace{T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) - \beta_1 \cdot T^*(w_1) + \beta_2 \cdot T^*(w_2)}^{=u} > = 0$$

$$< v, u > = 0$$

השוויון נכון לכל $v \in V$, לכן בפרט עבור : $v = u$. לכן :

$$< \mathrm{u}, \mathrm{u} > = 0 \iff u = 0$$

כלומר : $T^*(\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) = \beta_1 \cdot T^*(w_1) + \beta_2 \cdot T^*(w_2)$.

■

משפט

תהי $T^*: W \to V$ העתקה הצמודה ל - $T: V \to W$.

יהיו: $B = \{v_1, \cdots, v_n\}, B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ בסיסים אורתונורמליים עבור V, W.

נסמן ב - A, A' את המטריצות המייצגות של T, T^* ביחס לבסיסים B, B'.

אזי: $A' = A^* \ (= \bar{A}^t)$.

תזכורת

אם ב $W -$ קיים בסיס אורתונורמלי B' (מטריצת גראם היא מטריצת היחידה), אז:

$$< u, w > = [u]_{B'}^t \cdot \overline{[w]_{B'}}$$

הוכחה

נשתמש בשוויון (1) עבור: $v = v_j, w = w_i$. נחשב:

$$[T(v_j)]_{B'} = A \cdot [v_j]_B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overbrace{1}^{R_j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_j(A)$$

$$< T(v_j), w_i > = [T(v_i)]_{B'}^t \cdot \overline{[w_\iota]_{B'}} = C_j(A)^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overbrace{1}^{R_i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = R_j(A^t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overbrace{1}^{R_i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (A^t)_{ji}$$

$$< \boldsymbol{T(v_j), w_i} > = R_j(A^t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overbrace{1}^{R_i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{(A^t)_{ji}}$$

באופן דומה :

$$[T^*(w_i)]_B = A' \cdot [w_i]_{B'} = A' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overbrace{1}^{R_i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_i(A')$$

$$< v_j, T^*(w_i) > = \left[v_j\right]_B^t \cdot \overline{C_i(A)}$$

$$< \boldsymbol{v_j}, \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{w_i}) > = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \overbrace{1}^{C_j} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{C_i(A)} = (\overline{\boldsymbol{A}'})_{\boldsymbol{ji}}$$

לכן :

$$A^t = \overline{A'}$$

$$\overline{A^t} = \overline{\overline{A'}}$$

$$\boxed{A^{\wedge\prime} = A^*}$$

■