

הקשר בין אינטגרלים לא אמיתיים לטורים

מוסכמה

כל הפונקציות הנידונות אינטגרביליות בכל הקטעים $[a, b]$.

תזכורת

אם:

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

קיים, אז לכל $a < c$ מתקיים:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$$

מסקנה (התכנסות אינטגרל לא אמיתי תלויה רק בזנב)

תהי $a \in \mathbb{R}$. תהי f אינטגרבילית בכל קטע $[a, b]$ לכל $a < b$.

התכונות הבאות שקולות:

1. האינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

קיים (במובן הצר).

2. קיים $a \leq c$ כך שהאינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

קיים (במובן הצר).

3. לכל $a \leq c$, האינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

קיים (במובן הצר).

הוכחה

$$\boxed{3 \Leftarrow 1}$$

עפ"י התזכורת.

$$\boxed{2 \Leftarrow 3}$$

מידי.

1 ← 2

אותה הוכחה כמו בתזכורת.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right)$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

■

תזכורת (מבחן השוואה)אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך $0 < c \leq f(x) \leq c \cdot g(x)$ אז:

$$\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx = \infty$$

תזכורתעבור $0 \leq f(x)$ האינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

קיים במובן הרחב (מספר אי שלילי או אינסוף).

מסקנה (מבחן השוואה הגבולי)יהיו $0 < f(x), g(x)$ כך ש:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow c$$

עבור $0 < c < \infty$.

אזי:

$$\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

הוכחה

נקבע $0 < \varepsilon < c$ כך ש: $0 < c - \varepsilon$.

קיים N כך שלכל $a \leq N \leq x$ מתקיים:

$$0 < c - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c + \varepsilon$$

לכן:

$$(1) \quad 0 < f(x) < (c + \varepsilon) \cdot g(x)$$

$$(2) \quad 0 < g(x) < \left(\frac{1}{c - \varepsilon}\right) \cdot f(x)$$

עפ"י מבחן ההשוואה:

1. אם:

$$\int_N^\infty g(x)dx < \infty$$

אז:

$$\int_N^\infty f(x)dx < \infty$$

2. אם:

$$\int_N^\infty f(x)dx < \infty$$

אז:

$$\int_N^\infty g(x)dx < \infty$$

כיוון שקיום אינטגרל לא אמיתי תלוי רק בזנב, המבחן הוכח.

■

דוגמה

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

לפונקציה e^{-x^2} אין קדומה אלמנטרית, לכן הנוסחה היסודית לא תעזור כאן.
נשווה ל- e^{-x} .

כיוון שהתכנסות אינטגרל לא אמיתי תלויה רק בזנב, נוכל להתבונן רק בתחום $x \geq 1$, ושם:

$$x \leq x^2 \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

נחשב:

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^{\infty} = 0 + \frac{1}{e} < \infty$$

לכן, גם:

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx < \infty$$

לכן, גם:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx < \infty$$

■

עובדה

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

הגדרה

האינטגרל הלא אמיתי:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

מתכנס בהחלט אם האינטגרל הלא אמיתי:

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

מתכנס (במובן הצר).

אם האינטגרל הלא אמיתי:

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

מתכנס אך לא מתכנס בהחלט, נאמר שהוא **מתכנס בתנאי**.

למה

אינטגרל מתכנס בהחלט, מתכנס.

הוכחה

נוכיח שמתקיים הקריטריון של קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי.

יהי $\varepsilon > 0$.

קיים N כך שלכל $N \leq b_1 < b_2$ מתקיים:

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$$

עפ"י אי שוויון המשולש האינטגרלי:

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \right|$$

לכן:

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

לכן, גם $f(x)$ מתקיימת את קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי, לכן גם:

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

מתכנס.

■

דוגמה

נוכיח כי:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

מתכנס.

נראה התכנסות בהחלט:

$$|\sin(x)| \leq 1$$

לכן:

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| dx = \int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty$$

עפ"י מבחן השוואה סיימנו.

■

דוגמה

אם לבסוף:

$$|f(x)| \leq \frac{c}{x^\alpha} \quad ; \quad 0 < c, \alpha > 1$$

אז:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

מתכנס (בהחלט).

אם לבסוף:

$$\frac{c}{x^\alpha} \leq f(x) \quad ; \quad 0 < c, \alpha \leq 1$$

אז:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \infty$$

נימוק: השוואה ל:

$$\frac{1}{x^\alpha}$$

$$\alpha \neq 1: \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & 1 < \alpha \\ \infty, & \alpha > 1 \end{cases}$$

נכתב על ידי יהונתן רגב

$$\alpha = 1 : \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\log(x)]_1^{\infty} = \infty$$

■

מבחן זיריכלה

יהיו:

1. רציפה ב- $[a, \infty)$ וקיים קבוע $c \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < c$$

לכל $a < b$.2. גזירה ברציפות ב- $[a, \infty)$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, והאינטגרל:

$$\int_a^b g'(x) dx$$

מתכנס בהחלט.

אזי:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

מתכנס.

הוכחה

תהי:

$$v(x) := \int_a^x f(t) dt$$

אז:

$$dv = f dx \quad , \quad v'(x) = f(x)$$

תהי:

$$u(x) := g(x)$$

אז:

$$du = dg \quad , \quad u'(x) = g'(x)$$

משום ש- u, v גזירות ברציפות, עפ"י אינטגרציה בחלקים:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = [g(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot g'(x) dx$$

$$\xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0 \quad \overset{\leq c}{\underbrace{g(b)} \cdot \underbrace{v(b)} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0}$$

$$|v(x) \cdot g'(x)| \leq c \cdot |g'(x)|$$

נתון:

$$\int_a^\infty |g'(x)| dx < \infty$$

עפ"י מבחן ההשוואה, גם:

$$\int_a^\infty |v(x) \cdot g'(x)| dx < \infty$$

כלומר:

$$\int_a^b v(x) \cdot g'(x) dx$$

מתכנס בהחלט, ובפרט מתכנס.

לכן, הגבול:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

קיים.

■

מסקנה

$$g(x) := \frac{1}{x^\alpha}$$

כדי ש: $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, דרוש: $0 < \alpha$.

$$g'(x) = -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

$0 < \alpha$, לכן הנגזרת רציפה עבור $0 < a$.

דרוש:

נכתב על ידי יהונתן רגב

$$\int_a^\infty g'(x) dx$$

קיים, כלומר: $0 < \alpha$.מסקנה: אם $0 < \alpha < 1$ – f מקיימת את (1), אז:

$$\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$$

קיים.

דוגמהנגדיר מחדש את $\frac{\sin(x)}{x}$ ב-0 להיות 1.

האם האינטגרל:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

מתכנס?

$$\left| \int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx \right| = |1 - \cos(b)| \leq 2$$

עפ"י מבחן דיריכלה והמסקנה הנ"ל, נקבל שהאינטגרל:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

קיים.

התכנסות אינטגרל לא אמיתי תלויה רק בזנב, לכן גם האינטגרל:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

קיים.

עובדה

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

דוגמה

האינטגרל:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

אינו מתכנס בהחלט.

ניעזר במבחן השוואה.

$$\sin^2(x) = |\sin^2(x)| \stackrel{|\sin(x)| \leq 1}{\leq} |\sin(x)|$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin^2(x)}{x} \leq \frac{|\sin(x)|}{x}$$

נחשב:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^{\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{x} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_1^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$$

נחשב:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\log(x)]_1^{\infty} = \infty$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx \stackrel{t=2x}{=} \int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

האינטגרל:

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

מתכנס כפי שהאינטגרל:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

מתכנס, שכן:

נכתב על ידי יהונתן רגב

$$\left| \int_a^b \cos(t) dt \right| \leq 2$$

ונפעיל את מבחן דיריכלה ואת המסקנה הקודמת.

לכן:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx = \infty$$

עפ"י מבחן ההשוואה:

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \infty$$

■

לקריאה עצמית

1. משפט: תהי $0 \leq f(x)$ יורדת ב- $[a, \infty)$ ואינטגרביילית בכל קטע $[a, b]$ עבור $a < b$.

אזי:

האינטגרל:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

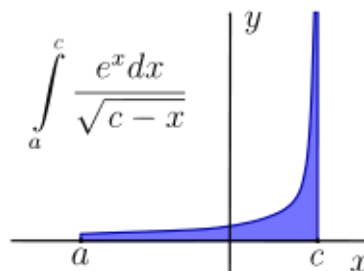
והטור:

$$\sum_{n=[a]+1}^{\infty} f(n)$$

מתכנסים ומתבדרים יחד.

2. אינטגרלים לא אמיתיים מסוג שני

המחשה



■