תרגיל 1

שאלה 1

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב לינארי ונורמי. הוכיחו כי:

$A \subseteq X$ סגורה אם ורק אם לכל סדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ מתקיים התנאי הבא, עבור $a \in X$:

$$\|a - a_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies a \in A$$

שאלה 2

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע סגור.

נגדיר

$$C(I) := \{f \mid f : I \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ f \text{ is continuous}\}\ ;\ \|\cdot\|_{C(I)} = \max_{t\in I} |f(t)|$$

הוכיחו כי:

1. $\left(C(I),\ \|\cdot\|_{C(I)}\right)$ הינו מרחב לינארי ונורמי.
2. ההתכנסות ב $C(I)$ שקולה להתכנסות במידה שווה.
3. תהי

$$A = \{f \mid \exists t :\ |f(t)| > 1\}$$

   הוכיחו כי A פתוחה ב $C(I)$.

4. תהי

$$B = \{f \mid \forall t :\ |f(t)| > 1\}$$

   האם B פתוחה ב $C(I)$?

שאלה 3

תהי X קבוצה. לכל $x, y \in X$ נגדיר:

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

1. הוכיחו כי d הינה מטריקה על X.
2. מהי הטופולוגיה τ_d המושרית ע"י d? מיהם הכדורים הפתוחים ב (X, τ_d)?

שאלה 4

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי.

1. קבוצה $A \subseteq X$ נקראת **קומפקטית** אם לכל כיסוי של A ע"י קבוצות פתוחות קיים תת כיסוי סופי. כלומר, עבור $\{V_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$:

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \quad \Rightarrow \quad \exists i_1,\ldots,i_n:\ A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}.$$

הוכיחו כי אם הטופולוגיה τ מושרית ממטריקה, אזי כל קבוצה קומפקטית היא סגורה וחסומה.

2. אם הקבוצה X הינה קומפקטית ב (X,τ), אזי (X,τ) נקרא **מרחב קומפקטי**.

הוכיחו כי (X,τ) קומפקטי אם ורק אם מתקיים התנאי הבא:

אם $\{F_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות סגורות ב (X,τ) כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מתוכה אינו ריק אזי

$$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset.$$

.

בהנאה :)