תרגיל בית 5 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

חוקי המספרים הגדולים

תרגיל 1 (קוביה ממימד גבוה היא כמעט השפה של כדור). יהיו $X_1, X_2, \ldots$ ממבתש"ה עם התפלגות $U(-1,1)$. נגדיר $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ כנקודה אקראית בתוך הקוביה ה-n-מימדית. הראו כי לכל $\varepsilon > 0$,

$$P\left((1-\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}} < \left\|X^{(n)}\right\|_2 < (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

תרגיל 2. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ ממבתש"ה. נכתוב $X_1^+ = \max\{X_1, 0\}$, $X_1^- = \max\{-X_1, 0\}$ (כלומר $X_1 = X_1^+ - X_1^-$). נניח כי $\mathbb{E}\left[X_1^+\right] = \infty$ ו-$\mathbb{E}\left[X_1^-\right] < \infty$. הראו כי $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty$.

תרגיל 3. באמצעות החוק החלש של המספרים הגדולים, הוכיחו את משפט הקירוב של ויירשטראס מאנליזה (ההוכחה של Levasseur משנת 1984): אם $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אז ניתן לקרב את f על ידי פולינומים. במפורש, לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום $p(x)$ כך ש-$\|f-p\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.
כדאי להיעזר בהדרכה הבאה:

א. לכל $x \in [0,1]$, יהי $S_n \sim \mathrm{Bin}(n,x)$. הוכיחו כי $B_n(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$ הוא פולינום ב-x ממעלה לכל היותר n (הנקרא גם **פולינום ברנשטיין** של f).

ב. הסיקו מהחוק החלש של המספרים הגדולים כי $B_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ לכל x בנפרד.
זה מראה התכנסות נקודתית, אבל אנחנו רוצים התכנסות בנורמת אינסוף, אז נצטרך קצת להתאמץ יותר.

ג. הראו כי לכל $x \in [0,1]$ ולכל $\delta > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right) \le \frac{1}{4n\delta^2}$ – חסם שאינו תלוי ב-x (באמצעות אי-שוויון צ'בישב).

ד. באמצעות כך ש-f רציפה במידה שווה וחסומה (כי היא רציפה והתחום שלה הוא קטע סגור), הוכיחו את משפט הקירוב של ויירשטראס.

התכנסות חלשה

תרגיל 4. ניקח משתנים מקריים $X_1, X_2, \ldots$ כך ש-$P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 0$. הראו כי $X_n \xrightarrow{\text{d}} 0$, למרות שפונקציות ההתפלגות המצטברות לא מתכנסות בכל נקודה של $\mathbb{R}$. מדוע אין זו סתירה להגדרה?

תרגיל 5. יהי X_n משתנה מקרי בדיד המתפלג אחיד על הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$. הראו כי $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{d}} U[0,1]$.

תרגיל 6. יהיו $X, X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ משתנים מקריים כך ש-$Y_n - X_n \xrightarrow{P} 0$ ו-$X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$. הראו כי $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

תרגיל 7. הוכיחו את השקילות הבאה מלמת Portmanteau: $X_n \xrightarrow{w} X$ אם ורק אם לכל פונקציה רציפה ואי-שלילית $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מתקיים $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[h(X_n)] \geq \mathbb{E}[h(X)]$.
(רמז לכיוון אחד: אם h רציפה ואי-שלילית, $\max\{h, N\}$ היא פונקציה רציפה וחסומה.)

בהצלחה!