

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: דר' ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos(2x) \sin(x)}{(1 - \sin(x)) \ln(1 + x^2)} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\cos(2x)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \sin(x)}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\ln(1 + x^2)}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x} = -1$$

כיוון ש

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x} = \left\{ \frac{0}{0}, L'Hopital \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^4 - x^4 - 4x^3}{x^2 + 1} \quad \text{ב.}$$

ראשית נשים לב כי ממבט ראשון לא ניתן לקבוע לאן המונה שואף, ולכן אי אפשר להשתמש ישירות בכלל לופיטל.

למקרה שאנחנו לא זוכרים את הבינום של ניוטון נפתח

$$((x+1)^2)^2 = (x^2 + 2x + 1)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^4 - x^4 - 4x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{6 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{n^n} \quad \text{ג.}$$

נחשב את גבול המנה

$$\frac{((n+1)!)^2}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \underbrace{(n+1)}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\rightarrow \frac{1}{e}} = \infty$$

כיוון שגבול המנה גדול מ-1, הסדרה המקורית שואפת לאינסוף.

2.

א. חשבו את $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x} dx$

אמנם ניתן לפתור את האינטגרל לפי האלגוריתם לאינטגרל על פונקציה רציונאלית, אך נבצע כאן טריק קטן.

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3+x} dx = \int \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx - \int \frac{x^2}{x^3+x} dx = \ln|x^3+x| - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x^3+x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_1^{\infty} (\sqrt[x]{e} - 1) dx$.

נבצע השוואה עם $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

$$\frac{\sqrt[x]{e} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

לכן האינטגרלים חברים, וכיוון שהאינטגרל איתו השווינו מתבדר, כך גם התרגיל בשאלה מתבדר.

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x = x$, הוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = e^x - x$$

$$h'(x) = e^x - 1$$

עבור $x \leq 0$ מתקיים כי $h'(x) \leq 0$ ועבור $x \geq 0$ מתקיים כי $h'(x) \geq 0$

לכן לכל $x < 0$ מתקיים כי $h(x) > h(0)$ (הפונקציה יורדת) ולכל $x > 0$ מתקיים כי $h(x) > h(0)$ (הפונקציה עולה).

כעת, $h(0) = 1$ ולכן הערך המינימלי של h הוא 1, והפונקציה אינה מתאפסת ולמשוואה אין כלל פתרון.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $2e^{(x^2)} = x^4$, הוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$t(x) = 2e^{x^2} - x^4$$

$$t'(x) = 4xe^{x^2} - 4x^3 = 4x(e^{x^2} - x^2)$$

נשים לב כי עבור $x = e^x - x$, מתקיים מהסעיף הקודם כי $h(x) \geq 1$

לכן בפרט

$$h(x^2) = e^{(x^2)} - x^2 \geq 1$$

ולכן לכל $x \geq 0$ מתקיים כי $t'(x) \geq 0$ ולכל $x \leq 0$ מתקיים כי $t'(x) \leq 0$

כלומר לכל $x > 0$ מתקיים כי $t(x) > t(0)$ (הפונקציה עולה) ולכל $x < 0$ מתקיים כי $t(x) > t(0)$ (הפונקציה יורדת).

לכן הערך המינימלי של $t(x)$ הוא $t(0) = 2$, ושוב הפונקציה אינה מתאפסת ולכן למשוואה המקורית אין פתרון.

4. תהי פונקציה f הגזירה בכל הממשיים, שיש לה חיתוך יחיד עם כל ישר מהצורה $y = x + b$

א. הוכיחו או הפריכו: f חח"ע (כלומר לכל $x_1 \neq x_2$ מתקיים כי $f(x_1) \neq f(x_2)$).

הפרכה:

ניקח את הפונקציה הקבועה $f(x) = 0$ שבוודאי אינה חח"ע.

לכל $y = x + b$ יש חיתוך יחיד עם $f(x) = 0$ בנקודה $x = -b$

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) \leq 1$.

הפרכה:

ניקח את הישר $f(x) = 2x$ עבורו מתקיים כי $f'(x) = 2 > 1$

לכל b הפתרון היחיד למשוואה $2x = x + b$ הוא $x = b$ ולכן יש חיתוך יחיד כפי שנדרש.

5. תהי סדרה המקיימת $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, וכן $a_1 = 0$.

א. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n = \frac{n-1}{n}$.

נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 1$ אכן $a_1 = \frac{1-1}{1} = 0$ לפי הנתון

ב. חשבו את גבול הסדרה.

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}$$

נשים לב כי

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n} \frac{2}{1+2\frac{k}{2n}}$$

כלומר $a_n = b_{2n}$ כאשר

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{2}{1+2\frac{k}{n}}$$

ולכן אם נחשב את הגבול של הסדרה b_n בוודאי הסדרה המקורית a_n תשאף לאותו הגבול.

אבל b_n זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{1+2x}$ וכיוון שפונקציה זו רציפה בקטע $[0,1]$ לפי המשפט שלמדנו

$$b_n \rightarrow \int_0^1 \frac{2}{1+2x} dx = [\ln|1+2x|]_0^1 = \ln(3)$$

ולכן גם $a_n \rightarrow \ln(3)$

ב. הוכיחו כי $\left| \cos(\sqrt{2}) - \frac{1}{6} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{30}$

נחשב פולינום טיילור של $\cos(x)$ מסדר 4 סביב 0

$$P_4(\cos(x), 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

נציב בו $x = \sqrt{2}$ ונקבל

$$P_4(\sqrt{2}) = 1 - \frac{(\sqrt{2})^2}{2} + \frac{(\sqrt{2})^4}{4!} = \frac{4}{4!} = \frac{1}{6}$$

קיבלנו בדיוק את הקירוב שמופיע בשאלה, ונותר לחסום את השגיאה בלבד.

(בקירוב ע"י טיילור מסדר נמוך יותר מקבלים אפס ולא שישית.)

כעת נחשב את השארית לפי לגראנז'

$$R_4(\cos(x), 0)(\sqrt{2}) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} (\sqrt{2} - 0)^5$$

כיוון שכל הנגזרות הם פלוס או מינוס סינוס או קוסינוס, נקבל כי

$$\left| \cos(\sqrt{2}) - \frac{1}{6} \right| = |R_4| \leq \frac{(\sqrt{2})^5}{5!} = \frac{4\sqrt{2}}{5!} = \frac{\sqrt{2}}{30}$$