מבחן לינארית 1 קיץ תשפא-פתרון

ט"ז אלול תשפ"א, 24.8.2021

מרצים: גיא בלשר, תמר בר-און, אליהו מצרי, אלעד עטייא, ארז שיינר, .
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, נועה כהן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 105 נקודות

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

בהצלחה!

1. (21 נק') נגדיר U,W תתי קבוצות של $\mathbb{R}^3$ באופן הבא:

$$U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\right\}$$
$$W=\left\{\begin{pmatrix}1+t\\s-2\\s+t-1\end{pmatrix}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

(א) הוכיחו כי W הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

נגדיר $t'=t+1$ ונשים לב ש t' יכול לקבל כל ערך ממשי. באותו אופן נגדיר $s'=s-2$ ונקבל ש

$$\begin{aligned}W&=\left\{\begin{pmatrix}1+t\\s-2\\s+t-1\end{pmatrix}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}t'\\s'\\(s'+2)+(t'-1)-1\end{pmatrix}\mid s',t'\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}t'\\s'\\s'+t'\end{pmatrix}\mid s',t'\in\mathbb{R}\right\}\\&=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

ולכן W תת מרחב (כל span של קבוצה היא ת"מ).

(ב) מצאו בסיס ל $U\cap W$.

פתרון:

מהחישובים של סעיף קודם, נקבל ש $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את W והיא גם בת"ל (שני וקטורים, אחד לא כפולה של האחר) ולכן B בסיס ל W ולכן $\dim W=2$.

מצד שני, $U=N((1,1,-1))$ ומכיוון ש $(1,1,-1)$ עם שני משתנים חופשיים אז $\dim U=2$.

בנוסף,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\in N((1,1,-1))=U$$

כי הם פתרונות למערכת $x+y-z=0$ ולכן: $W\subseteq U$ מאותו מימד ולכן הם שווים $W=U$. מכאן ש $W\cap U=W$.

(ג) מצאו וקטור $v\in\mathbb{R}^3$ המקיים כי $v\notin W+U$, או הוכיחו שלא קיים כזה וקטור.

פתרון:

מהחישובים של סעיף קודם, $U=W$ וזהו ת"מ מימד 2. לכן $W+U=W$ מימד 2 ובפרט $W\neq\mathbb{R}^3$ כי $\dim\mathbb{R}^3=3$. לכן קיים $v\in\mathbb{R}^3$ המקיים כי $v\notin W+U$ ובשביל למצוא v קונקרטי כזה, צריך למצוא v שאינו

עונה למשוואה שמאפיינת את U (ששוה לW). למשל

$$v=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

2. (21 נק') תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית ונתונה מטריצה מייצגת שלה

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&1\\a-2&1&a\end{pmatrix}$$

כאשר $a\in\mathbb{R}$ (פרמטר) וגם

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$
$$C=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

שני בסיסים (סדורים) של $\mathbb{R}^3$.

(א) מצאו את כל ערכי a עבורם T הפיכה.

פתרון:

מכיוון ש T הפיכה אמ"מ $[T]_C^B$ הפיכה. השאלה שקולה ל: מצאו את כל ערכי a עבורם $[T]_C^B$ הפיכה. זה שקול לכך ש $\left|[T]_C^B\right|\neq 0$. נפתח לפי שורה ראשונה:

$$\left|[T]_C^B\right|=\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&1\\a-2&1&a\end{pmatrix}\right|=1\cdot\left|\begin{pmatrix}a&1\\1&a\end{pmatrix}\right|=a^2-1=(a+1)(a-1)$$

ולכן T הפיכה אמ"מ $a\neq\pm1$.

(ב) עבור $a=3$, מצאו מפורשות את $T^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

פתרון:

מכיוון עבור $a=3$ אכן T הפיכה (חישובים מסעיף קודם). בנוסף, מתקיים ש $[T^{-1}]_B^C=\left([T]_C^B\right)^{-1}$ (משפט מההרצאה). נחשב את ההופכית $\left([T]_C^B\right)^{-1}$ ע"י האלגורתים למציאת הופכית:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&3&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&3&1&0&1&0\\0&1&3&-1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&3&-1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{8}{3}&-1&-\frac{1}{3}&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{8}&\frac{9}{24}&-\frac{1}{8}\\0&0&1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\end{array}\right)$$

ולכן

$$[T^{-1}]_B^C = \left([T]_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

מכאן

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$
$$T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{24}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
$$T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ומכיוון ש

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נקבל ש

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
$$T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned} T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= xT^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + yT^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zT^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{8} + \frac{7y}{8} - \frac{z}{2} \\ \frac{3x}{4} + \frac{y}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ג) עבור $a=1$, מצאו בסיסים ל $\ker T$ ול $\mathrm{Im}T$.

פתרון:

נשתמש בכך $[\ker T]_B = N([T]_C^B)$ וגם $[\mathrm{Im}T]_C = C([T]_C^B)$ (כאשר $C([T]_C^B)$ זה מרחב העמודות של $[T]_C^B$).
נדרג את המטריצה המייצגת ונמצא בסיסים:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[\ker T]_B = N([T]_C^B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(כאשר מציבים t במשתנה החופשי שהוא המשתנה השלישי) ולכן

$$\ker T = \mathrm{span}\left\{ 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בנוסף

$$[\mathrm{Im}T]_C = C([T]_C^B) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(שתי העמודות במטריצה המקורית מהוות בסיס למרחב העמודות של $[T]_C^B$ כי אחרי דירוג בהם, ורק בהם, יש איבר מוביל). ולכן

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}T &= \mathrm{span}\left\{ 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

3. (21 נק') יהי V מ"ו ויהיו W_1, W_2, W_3 תתי מרחבים שלו. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) אם $W_1+W_2=W_1+W_3$ וגם $W_1\cap W_2=W_1\cap W_3$ אז $W_2=W_3$.

פתרון:

הפרכה: ב $V=\mathbb{R}^2$ נגדיר

$$W_1 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$W_2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$W_3 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ומתקיים

$$W_1+W_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = W_1+W_3$$

כאשר השיוונות באדום נובע מהתכונה ש $\text{span}S_1+\text{span}S_2=\text{span}\left(S_1\cup S_2\right)$ והשיון בכחול נובע מכך שמודבר ב span של שני וקטורים בת"ל (אחד לא כפולה של האחר) במרחב מימד 2 (השלישי חינם). בנוסף, קל לראות כי

$$W_1\cap W_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=W_1\cap W_3$$

כי $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ בת"ל וגם $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ בת"ל ולכן אין וקטור $v\neq 0$ שנמצא בחיתוך ה spanים שלהם.
אבל כמובן ש $W_2\neq W_3$.

(ב) אם $W_1\subseteq W_3$ אז $W_1+(W_2\cap W_3)=(W_1+W_2)\cap W_3$.

פתרון:

הוכחה: נניח $W_1\subseteq W_3$. צ"ל $W_1+(W_2\cap W_3)=(W_1+W_2)\cap W_3$. נעשה זאת בהכלה דו-כיוונית.
($\subseteq$) יהא $w_1+v\in W_1+(W_2\cap W_3)$ כאשר $w_1\in W_1$ ו $v\in W_2\cap W_3$. צ"ל $w_1+v\in(W_1+W_2)\cap W_3$.
כיוון ש $W_1\subseteq W_3$ $w_1\in$ נקבל ש $w_1\in W_3$ וגם $v\in W_2\cap W_3\subseteq W_3$ ולכן

$$w_1+v\in W_3$$

כי W_3 ת"מ. בנוסף, $v\in W_2\cap W_3\subseteq W_2$ ו $w_1\in W_1$ לכן $w_1+v\in W_1+W_2$. סה"כ קיבלנו ש $w_1+v\in W_3$ וגם $w_1+v\in W_1+W_2$ ולכן גם

$$w_1+v\in(W_1+W_2)\cap W_3$$

כנדרש.
($\supseteq$) יהא $v\in(W_1+W_2)\cap W_3$ צ"ל $v\in W_1+(W_2\cap W_3)$. כיוון ש $v\in W_1+W_2$, קיימים $w_1\in W_1, w_2\in W_2$ כך ש

$$v=w_1+w_2$$

ולכן

$$w_2=v-w_1$$

ומכיוון ש $w_1\in W_1\subseteq W_3$ וגם $v\in W_3$ (לפי הנתון ההתחלתי) נקבל ש

$$w_2=v-w_1\in W_3$$

כי W_3 ת"מ. קיבלו $w_2 \in W_2 \cap W_3$ וגם $w_1 \in W_1$ ולכן

$$v = w_1 + w_2 \in W_1 + (W_2 \cap W_3)$$

כנדרש.

(ג) אם $W_2 \cap W_3 = \{0_V\}$ אז $W_1 \cap (W_2 + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$.

פתרון:

הפרכה: ב $V = \mathbb{R}^2$ נגדיר

$$W_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$W_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$W_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ומתקיים

$$W_1 \cap W_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = W_1 \cap W_3$$

כמו מקודם ולכן

$$(W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

ומצד שני,

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_1 \cap \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = W_1 \cap \mathbb{R}^2 = W_1$$

והם שונים ($W_1 \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$).

4. (21 נק') יהי V מ"ו מימד 2 מעל $\mathbb{R}$ ויהא $B = \{v_1, v_2\}$ בסיס ל V. נגדיר בנוסף

$$v_3 = v_1 + v_2$$
$$v_4 = v_1 - v_2$$

שני וקטורים נוספים ב V.

(א) הוכיחו/הפריכו: לכל $v \in V$ קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ כך ש

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$$

ובנוסף:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$$
$$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=0$$

פתרון:

הוכחה. יהא $v \in V$ נסמן $[v]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$. מכיוון ש

$$(v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4) \iff ([v]_B=[\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4]_B)$$

ומתקיים

$$\begin{aligned}[\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4]_B &= \alpha_1[v_1]_B+\alpha_2[v_2]_B+\alpha_3[v_3]_B+\alpha_4[v_4]_B \\ &= \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

נקבל שצריך למצוא $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ כך ש

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

וגם

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

(אלו שני התנאים הנוספים

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$$
$$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=0$$

שבשאלה) ולכן בסה"כ השאלה האם קיים פתרון למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כיוון ש

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right| = 3-1=2$$

ולכן

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

הפיכה ולכל מערכת $Ax=b$ יש פתרון. בפרט למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ב) הוכיחו/הפריכו: לכל $v\in V$ קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ כך ש

$$v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4$$

ובנוסף:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$$
$$2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4=0$$

פתרון:

הפרכה: כמו בסעיף קודם, השאלה שקולה לכך שלמערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תמיד יש פתרון. נדרג ונראה שזה לא המצב:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \beta_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -2\beta_1 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -\beta_1-\beta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2\beta_1-2\beta_2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -\beta_1-\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1-\beta_2 \end{array}\right)$$

ולכן עבור $\beta_1=1,\beta_2=0$ אין פתרון למערכת הנ"ל (שהרי $-\beta_1-\beta_2=-1\neq 0$ ויש שורת סתירה). ולכן

$$v=v_1$$

יקיים $[v]_B=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ יקיים שאין $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ כך ש

$$v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4$$

ובנוסף:

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&=0\\ 2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4&=0 \end{aligned}$$

(ג) נגדיר את הקבוצה

$$W=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\mid \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4=0\right\}$$

הוכיחו/הפריכו: W תת מרחב של $\mathbb{R}^4$.

פתרון:

הוכחה:

$$\begin{aligned} W&=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\mid \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4=0\right\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\mid [\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4]_B=[0]_B\right\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\mid \alpha_1[v_1]_B+\alpha_2[v_2]_B+\alpha_3[v_3]_B+\alpha_4[v_4]_B=0\right\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\mid \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\mid \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\\ &=N\left(\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

ומרחב אפס של מטריצה (בפרט המטריצה $\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$) הוא תת מרחב.

5. (21 נק') הגדרה: שתי העתקות לינאריות S,T יקראו <u>מתחלפות</u> אם $ST=TS$.
באופן דומה, שתי מטריצות A,B יקראו <u>מתחלפות</u> אם $AB=BA$.
יהא V מ"ו מימד $2\leq n$. ותהיינה שתי העתקות לינאריות $S,T:V\to V$ (אופרטורים).

(א) הוכיחו/הפריכו:

אם S,T מתחלפות אזי לכל שני בסיסים B,C של V מתקיים שהמטריצות המייצגות $[T]_B^B,[S]_C^C$ מתחלפות.

פתרון:

הפרכה: נבחר $V=\mathbb{R}^2$ וניקח בסיס $B=\{v_1,v_2\}$ ל V. נגדיר ה"ל T ע"י משפט ההגדרה:

$$\begin{aligned}Tv_1&=v_2\\ Tv_2&=-v_1\end{aligned}$$

ונקבל שמתקיים

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

בנוסף, נגדיר $C=\{v_1+v_2,v_2\}$. טענה: C בסיס. הוכחה: לפי השלישי חינם מספיק להראות ש C בת"ל. זה שקול לכך שהייצוג לפי B בת"ל. זה אכן קורה כי היצוג של וקטורי C הם עמודות המטריצה

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

שהפיכה ובפרט עמודותיה בת"ל. כעת נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned}T(v_1+v_2)&=Tv_1+Tv_2=v_2-v_1=-(v_1+v_2)+2v_2\\ T(v_2)&=-v_1=-(v_1+v_2)+v_2\end{aligned}$$

ולכן

$$[T]_C^C=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}$$

ולכן: נגדיר $S=T$ והם מתחלפת (אותה ה"ל) אבל, עבור B,C ממקודם, נקבל

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-2\end{pmatrix}$$

שהם שונות זו מזו.

(ב) הוכיחו/הפריכו:

אם לכל שני בסיסים B,C של V מתקיים שהמטריצות המייצגות $[T]_B^B,[S]_C^C$ מתחלפות אז S,T מתחלפות.

פתרון:

הוכחה: נבחר B בסיס ל V ואז בפרט עבור $C=B$ נקבל מהנתון (שהמטריצות המייצות מתחלפות) ש

$$[TS]_B^B=[T]_B^B[S]_B^B=[S]_B^B[T]_B^B=[ST]_B^B$$

כאשר האדום נובע מכך ש $[ST]_{B_3}^{B_1}=[S]_{B_3}^{B_2}[T]_{B_2}^{B_1}$. מכיוון שייצוג ה"ל לפי $[]_B^B$ היא חח"ע נקבל ש

$$TS=ST$$

כנדרש.

(ג) הוכיחו:

אם S,T שתיהן העתקות לא הפיכות וגם לכל 4 בסיסים B,C,D,E של V מתקיים שהמטריצות המייצגות $[T]_C^B,[S]_E^D$ מתחלפות אז $T=0$ או $S=0$.

פתרון:

כיוון ש T אינה הפיכה, קיים $v_2\neq 0$ כך ש $Tv_2=0$. כעת נניח בשלילה ש $T\neq 0$ וגם $S\neq 0$ אזי קיים v_1,w_1 כך ש $Tv_1\neq 0$ וגם $Sw_1\neq 0$.

נגדיר את הבסיסים הבאים:

- $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ יהיה השלמה לבסיס של V של הוקטורים $\{v_1,v_2\}$ (הם בת"ל. הוכחה בהמשך) ו $C=\{Tv_1,\hat{v}_2,\dots,\hat{v}_n\}$ השלמה של $\{Tv_1\}$ לבסיס.
- $D=\{w_1,\dots,w_n\}$ השלמה של $\{w_1\}$לבסיס ו $E=\{\hat{w_1},Tw_1,\dots,\hat{w}_n\}$ השלמה של $\{Tw_1\}$ לבסיס ו Tw_1 הוקטור השני. נקבל לפי הגדרה ש

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&0&*&\cdots&*\\0&0&*&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&*&\cdots&*\end{pmatrix},\quad [S]_E^B=\begin{pmatrix}0&*&*&\cdots&*\\1&*&*&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&*&*&\cdots&*\end{pmatrix}$$

ואז

$$\begin{pmatrix}1&0&*&\cdots&*\\0&0&*&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&*&\cdots&*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&*&*&\cdots&*\\1&*&*&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&*&*&\cdots&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&*&*&\cdots&*\\0&*&*&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&*&*&\cdots&*\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&*&*&\cdots&*\\1&*&*&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&*&*&\cdots&*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&*&\cdots&*\\0&0&*&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&*&\cdots&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&*&*&\cdots&*\\1&*&*&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&*&*&\cdots&*\end{pmatrix}$$

בניגוד לנתון שהמטריצות מתחלפות. סתירה.

טענה: $\{v_1,v_2\}$בת"ל. הוכחה: ניקח צירוף לינארי שלהם שמתאפס $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2=0$ ונראה $\alpha_1=\alpha_2=0$.

אכן, נפעיל T על השיוויון ונקבל

$$\color{blue}{\alpha_1Tv_1=}\color{red}{\alpha_1Tv_1+\alpha_2Tv_2=}T\left(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2\right)=T0\color{red}{=0}$$

כאשר האדום נובע מכך ש T ה"ל והכחול נובע מכך ש $Tv_2=0$. כיוון ש $Tv_1\neq 0$ נקבל ש $\alpha_1=0$. מכאן שיש לנו את השיוויון $\alpha_2v_2=0$ ומכיוון ש $v_2\neq 0$ נקבל ש $\alpha_2=0$כנדרש.