

מבחן בדידה קיץ תשפא-פתרון

כ"ב אלול תשפ"א, 30.8.2021

מרצים: עדי בן צבי, תמר בר-און, אריאל ויצמן, אלעד עטיי, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, גיא ברגר, עוזי חרוש, עידו פלדמן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (20 נק') תהינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

$$(א) A \setminus (B \setminus A) = A \setminus (C \setminus A)$$

פתרון:

הוכחה: נשים לב ש $(B \setminus A) \subseteq A^c$ כי כל איבר ב $B \setminus A$ הוא איבר שלא ב A ולכן $A \subseteq (B \setminus A)^c$ ולכן

$$A = A \cap A \subseteq A \cap (B \setminus A)^c \subseteq A$$

ולכן מכיוון ש $A = A \cap (B \setminus A)^c$ ומכיוון ש $A \cap (B \setminus A)^c = A \setminus (B \setminus A)$ קיבלנו בשה"כ $A = A \setminus (B \setminus A)$. אותו הוכחה מראה ש $A = A \setminus (C \setminus A)$ ולכן שהם שוות אחת לשניה (ושוות ל A).

$$(ב) P(A \setminus P(B)) \neq P(A) \setminus (P(B) \cup P(P(B)))$$

פתרון:

הוכחה: קבוצה ריקה שייכת בכל קבוצת חזקה ולכן: $\emptyset \in P(A \setminus P(B))$. מצד שני $\emptyset \notin P(A) \setminus (P(B) \cup P(P(B)))$ ולכן הם לא שווים (נימוק מפורט: $\emptyset \in P(A)$ וגם $\emptyset \in P(B)$ ולכן $\emptyset \in P(B) \cup P(P(B))$ וגם $\emptyset \in P(A) \setminus (P(B) \cup P(P(B)))$ ולכן $\emptyset \notin P(A) \setminus (P(B) \cup P(P(B)))$).

$$(ג) אם $A \subseteq B$ וגם $A \setminus C \neq \emptyset$ אזי $B \setminus C \neq \emptyset$.$$

פתרון:

הוכחה: נניח $A \subseteq B$ וגם $A \setminus C \neq \emptyset$ וצ"ל $B \setminus C \neq \emptyset$. נב"ש ש $B \setminus C = \emptyset$ לכן $B \subseteq C$ (אם $B \not\subseteq C$ אז יש $x \in B$ וגם $x \notin C$ ולכן $x \in B \setminus C$). בצירוף ההנחה הראשונה ש $A \subseteq B$ נקבל $A \subseteq C$ (הכלה היא טרנזיטיבית) ולכן $A \setminus C = \emptyset$ בסתירה להנחה הנוספת $A \setminus C \neq \emptyset$.

$$(ד) P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

פתרון:

הוכחה: לכל X מתקיים: $X \in P(A \cap B)$ אם"מ $X \subseteq A \cap B$ אם"מ $X \subseteq B$ וגם $X \subseteq A$ אם"מ $X \in P(B)$ וגם $X \in P(A) \cap P(B)$ אם"מ $X \in P(A)$ וגם $X \in P(B)$.

2. (21 נק') נגדיר יחס S על קבוצת הממשיים \mathbb{R} כך: לכל $a, b \in \mathbb{R}$

$$aSb \iff [(a = b) \vee (b - a > 1)]$$

(א) הוכיחו כי S יחס סדר חלקי על \mathbb{R} .

פתרון:

- רפלקסיביות: לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $a = a$ ולכן aSa .
- אנטי סימטריות: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש aSb וגם bSa . נב"ש ש $a \neq b$ אז נקבל מהנתונים כי $b - a > 1$ וגם $a - b > 1$ כלומר $b > a + 1$ וגם $b > a + 1$ סתירה.
- טרנזיטיביות: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש aSb וגם bSc וצ"ל aSc . אם $a = b$ או $b = c$ סיימו. אחרת, לפי הנתונים נקבל ש $c - b > 1$ וגם $b - a > 1$ ולכן

$$c - a = (c - b) + (b - a) > 1 + 1 > 1$$

ולכן aSc כנדרש.

(ב) מצאו את כל האיברים המינימאליים בקבוצת הטבעיים \mathbb{N} (שמוכלת ב \mathbb{R}), לפי היחס S (הניחו כי $0 \notin \mathbb{N}$).

פתרון:

טענה: 1, 2 הם מינימאליים והם היחידים.

הוכחה: אם $xS1$ ו $x \neq 1$ אז $1 - x > 1$ כלומר $0 > x$ אבל x טבעי. סתירה. באופן דומה, אם $xS2$ ו $x \neq 2$ אז $2 - x > 1$ כלומר $1 > x$ אבל x טבעי. סתירה. לכן 1, 2 מינימאליים.

נניח כעת x מינימלי ונראה ש $x \in \{1, 2\}$. נב"ש ש $x \leq 3$ אזי $1Sx$ כי $3 - 1 = 2 > 1$ ולכן $x - 1 \geq 3 - 1 = 2 > 1$ ולכן x אינו מינימאלי. סתירה.

(ג) האם לקבוצה

$$(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

יש חסם עליון (sup) ? אם כן, מצאו אותו. אחרת, הוכיחו שלא קיים.

פתרון:

טענה: לא קיים $\sup(0, 1)$

הוכחה: ראשית, נציין ש 2 חסם מלעיל של $(0, 1)$ כיוון שלכל $0 < x < 1$ מתקיים $2 - x > 2 - 1 = 1$ ולכן $xS2$.
שנית, נציין שגם 2.5 חסם מלעיל של $(0, 1)$ כיוון שלכל $0 < x < 1$ מתקיים $2.5 - x > 2.5 - 1 = 1.5 > 1$ ולכן $xS2.5$.

כעת, נב"ש שקיים $\sup(0, 1)$, נסמנו M . אזי M חסם מלעיל הקטן ביותר ובפרט $MS2$.

- אם $M = 2$ נקבל סתירה שהרי $(2, 2.5) \notin S$ (וגם 2.5 הוא חסם מלעיל).
- אם $M \neq 2$ אז מתקיים $2 - M > 1$ ולכן $1 > M$ ועבור $\max\{M, 0\} < x < 1$ (קיים כזה כי $1 > M$) מתקיים כי $x \in (0, 1)$ ומתקיים ש $M - x \leq M - M = 0$ ולכן $(x, M) \notin S$ בסתירה לכך ש M חסם מלעיל של $(0, 1)$.

3. (21 נק') תהא $B \neq \emptyset$ קבוצה לא ריקה ונסמן $X = B^B$ את קבוצת כל הפונקציות מ B ל B . נגדיר יחס \sim על X כך:
לכל $f, g \in X$ מתקיים: $f \sim g$ אם ורק אם קיימת $h \in X$ הפיכה כך ש $f \circ h = h \circ g$.

(א) הוכיחו כי \sim יחס שקילות על X .

פתרון:

- רפלקסיביות: לכל $f \in X$ מתקיים ש $f \sim f$ שהרי עבור פונקצית הזהות I מתקיים $f \circ I = f = I \circ f$.
- סימטריות: יהיו $f, g \in X$ כך ש $f \sim g$ וצ"ל $f \sim g$. מהנתון קיימת $h \in X$ הפיכה כך ש $f \circ h = h \circ g$ ולכן גם h^{-1} (קיימת) והפיכה ואם נרכיב אותה בשני הצדדים של השוויון

$$h^{-1} \circ f = h^{-1} \circ (f \circ h) \circ h^{-1} = h^{-1} \circ (h \circ g) \circ h^{-1} = g \circ h^{-1}$$

כאשר השוויונות באדום נובעים מכך שהרכבת פונקציות היא קיבוצית ו h^{-1} הרכבה עם h (בשני הכיוונים) היא הזהות. מכאן ש

$$g \circ h^{-1} = h^{-1} \circ f$$

ולכן $f \sim g$.

- טרנזיטיביות: יהיו $f_1, f_2, f_3 \in X$ כך ש $f_1 \sim f_2$ וגם $f_2 \sim f_3$. צ"ל $f_1 \sim f_3$. לפי הנתונים, קיימות h_1, h_2 הפיכות כך ש

$$f_1 \circ h_1 = h_1 \circ f_2$$

וגם

$$f_2 \circ h_2 = h_2 \circ f_3$$

ולכן

$$f_1 = h_1 \circ f_2 \circ h_1^{-1}$$

וגם

$$f_2 = h_2 \circ f_3 \circ h_2^{-1}$$

וביחד

$$f_1 = h_1 \circ h_2 \circ f_3 \circ h_2^{-1} \circ h_1^{-1} = (h_1 \circ h_2) \circ f_3 \circ (h_1 \circ h_2)^{-1}$$

ולכן

$$f_1 \circ (h_1 \circ h_2) = (h_1 \circ h_2) \circ f_3$$

ומכיוון ש $(h_1 \circ h_2)$ הפיכה (כהרכבה של הפיכות) נקבל $f_1 \sim f_3$ כמבוקש.

(ב) עבור פונקציה זהות $I \in X$ מצאו את מחלקת השקילות $[I]_{\sim}$.

פתרון:

טענה: $[I]_{\sim} = \{I\}$. הוכחה: (\supseteq) מתקיים מרפלקסיביות היחס \sim . תהא $g \in X$ כך ש $I \sim g$ וצ"ל $g = I$. מכך ש $I \sim g$ נסיק שקיימת $h \in X$ הפיכה כך ש

$$I \circ h = h \circ g$$

ואם נרכיב h^{-1} משמאל נקבל

$$I = h^{-1} \circ I \circ h = g$$

כמבוקש.

(ג) תהא $f \in X$ המקיימת שלכל $b_1, b_2 \in B$ מתקיים $f(b_1) = f(b_2)$. הוכיחו כי $|[f]_{\sim}| = |B|$.

פתרון:

תהא $f \in X$ המקיימת שלכל $b_1, b_2 \in B$ מתקיים $f(b_1) = f(b_2)$, כלומר f פונקציה קבועה, כלומר קיים $b_0 \in B$ כך שלכל $x \in B$ מתקיים $f(x) = b_0$.

טענה: מחלקת השקילות $[f]_{\sim}$ היא כל הפונקציות הקבועות. כלומר $[f]_{\sim} = \{g \in X \mid \exists b \in B : \forall x \in B : g(x) = b\}$. הוכחה: (\subseteq) תהא $g \in [f]_{\sim}$ אז קיימת $h \in X$ הפיכה כך ש $f \circ h = h \circ g$. ולכן לכל $x \in B$ מתקיים

$$g(x) = (h^{-1} \circ f \circ h)(x) = h^{-1}(f(h(x)))$$

אבל לכל x מתקיים ש $f(h(x)) = b_0$ ולכן

$$g(x) = h^{-1}(f(h(x))) = h^{-1}(b_0)$$

ולכן g קבועה על הערך $h^{-1}(b_0)$.

(\supseteq) תהא g פונקציה קבועה. אזי קיים $b \in B$ כך שלכל $x \in B$ מתקיים $g(x) = b$. נגדיר $h : B \rightarrow B$ שתחליף בין b ל b_0 ואת שאר האיברים תשלח לעצמם. כלומר

$$h(x) = \begin{cases} b_0 & \text{if } x = b \\ b & \text{if } x = b_0 \\ x & \text{else} \end{cases}$$

והיא הפיכה ומתקיים שלכל $x \in B$

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = b_0$$

ומצד שני

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = g(b) = b_0$$

ולכן $f \circ h = h \circ g$ ולכן $f \sim g$ ולכן $g \in [f]_{\sim}$ כנדרש.

כעת, נגדיר פונקציה $H : [f]_{\sim} \rightarrow B$ המוגדרת ע"י $H(g) = g(b_0)$ ונראה שהיא חח"ע ועל ולכן $|[f]_{\sim}| = |B|$ (כנדרש).

- טענה: H חח"ע: יהיו $g_1, g_2 \in [f]_{\sim}$ שונות. אזי מכיוון שהם קבועות, מתקיים כי $g_1(b_0) \neq g_2(b_0)$ ולכן $H(g_1) \neq H(g_2)$.
- טענה H על: יהא $b \in B$ אז הפונקציה הקבועה על b שייכת למחלקת השקילות $[f]_{\sim}$ והיא תשמש כמקור.

4. (24 נק') נסמן $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ את קבוצת כל הפונקציות מ \mathbb{R} ל \mathbb{R} . נגדיר פונקציה $H : A \times A \rightarrow A \times A$ על ידי הכלל:

$$H((f_1, f_2)) = (f_1 \circ f_2, f_2 \circ f_1)$$

(א) הוכיחו או הפריכו: H פונקציה חח"ע.

פתרון:

הפרכה: ניקח פונקציה הפיכה, למשל $f_1(x) = x + 1$ אז ההופכית שלה היא $f_2(x) = x - 1$ ולכן

$$H((f_1, f_2)) = (f_1 \circ f_2, f_2 \circ f_1) = (I, I)$$

וגם

$$H((f_2, f_1)) = (f_2 \circ f_1, f_1 \circ f_2) = (I, I)$$

ולכן $(f_1, f_2) \neq (f_2, f_1)$ נשלחים לאותה תמונה (I, I) .

(ב) מצאו פונקציה $g \in A$ כך ש $(I, g) \notin \text{Im}H$ (כאשר $I \in A$ היא פונקצית הזהות).

פתרון:

נגדיר $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי הכלל $g(x) = 0$ (הפונקציה הקבועה על 0).

טענה: $(I, g) \notin \text{Im}H$

הוכחה: נב"ש $(I, g) \in \text{Im}H$ אזי קיים מקור (f_1, f_2) כך ש $H((f_1, f_2)) = (I, g)$ כלומר,

$$H((f_1, f_2)) = (f_1 \circ f_2, f_2 \circ f_1) = (I, g)$$

זה אומר ש $f_2 \circ f_1 = g$ וגם $f_1 \circ f_2 = I$. מכך ש $f_1 \circ f_2 = I$ נסיק ש f_2 חח"ע ו f_1 על. לכן קיימים x_1, x_2 כך ש $f_1(x_1) = 1, f_1(x_2) = 2$ ולכן

$$(f_2 \circ f_1)(x_1) = f_2(f_1(x_1)) = f_2(1)$$

$$(f_2 \circ f_1)(x_2) = f_2(f_1(x_2)) = f_2(2)$$

ומכיון ש f_2 חח"ע $f_2(1) \neq f_2(2)$ ובפרט אחד מהם שונה מ 1. מצד שני $g(x_1) = g(x_2) = 1$ ולכן $f_2 \circ f_1 \neq g$.

(ג) תהינה $g_1, g_2 \in A$ פונקציות הפיכות. הוכיחו/הפריכו: $(g_1, g_2) \in \text{Im}H$.

פתרון:

הפרכה: ניקח $g_1 = I$ ו g_2 להיות הפונקציה ההפיכה המוגדרת לפי הכלל $g_2(x) = x + 1$. נב"ש ש $(g_1, g_2) \in \text{Im}H$ אז קיים מקור (f_1, f_2) כך ש $H((f_1, f_2)) = (g_1, g_2)$ כלומר,

$$H((f_1, f_2)) = (f_1 \circ f_2, f_2 \circ f_1) = (g_1, g_2)$$

זה אומר ש $f_2 \circ f_1 = g_1$ וגם $f_1 \circ f_2 = I$. בגלל ש $f_2 \circ f_1 = g_1$ (ו הפיכה) נסיק ש f_1 חח"ע ו f_2 על. ובגלל $f_1 \circ f_2 = I$ (ו הפיכה) נסיק ש f_2 חח"ע ו f_1 על. סה"כ קיבלנו ש f_1, f_2 שתיהן חח"ע + על ולכן הפיכות. מכיון ש $f_1 \circ f_2 = I$ נקבל שהן הופכיות אחת של השניה ולכן $f_2 \circ f_1 = I \neq g_2$ סתירה.

(ד) מצאו את העוצמה של $\text{Im}H$ (התשובה חייבת להיות אחת מהבאות: מספר n טבעי או אפס, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$).

פתרון:

מצד אחד $\text{Im}H \subseteq A \times A$ ולכן

$$|\text{Im}H| \leq |A \times A| = |A| \cdot |A| = \aleph^{\aleph} \cdot \aleph^{\aleph} = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$$

מצד שני: $\{(f, f) \mid f \in A\} \subseteq \text{Im}H$ מכיון שלכל $f \in A$ מתקיים ש $H((f, I)) = (f, f)$ ולכן

$$|A| = |\{(f, f) \mid f \in A\}| \leq |\text{Im}H|$$

השיוון האדום מיידי. בסה"כ קיבלנו $2^{\aleph} \leq |\text{Im}H| \leq 2^{\aleph} = |A|$ ולכן לפי ק.ש.ב. $|\text{Im}H| = 2^{\aleph}$.

5. הגדרה: קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}$ תקרא מגניבה אם: לכל $x_1, x_2 \in C$ כך ש $x_1 \neq x_2$ מתקיים ש $x_1 - x_2 \notin \mathbb{Q}$.

(א) (5 נק') הוכיחו שקיימת קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}$ מגניבה וגם S אינה מוכלת באף קבוצה מגניבה אחרת.

פתרון:

נגדיר \mathcal{O} אוסף הקבוצות המגניבות, סדורה ע"י הכלה. מתקיים כי $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{O}$ שרשרת ולכן היא מוכלת בשרשרת מקסימאלית \mathcal{C} . נגדיר $C = \cup_{C' \in \mathcal{C}} C'$

טענה: C מגניבה.

הוכחה: יהיו $x_1, x_2 \in C$ שונים. אזי קיימות קבוצות בשרשרת C'_1, C'_2 כך ש $x_1 \in C'_1, x_2 \in C'_2$. מכיון שזו שרשרת, נניח בה"כ ש $C'_1 \subseteq C'_2$ ולכן $x_1, x_2 \in C'_2$ ולכן ההפרש ביניהן אינו רציונאלי מכיון ש C'_2 מגניבה.

טענה: C מגניבה מקסימאלית עם יחס ההכלה ולכן היא לא מוכלת באף קבוצה מגניבה אחרת.

הוכחה: נב"ש כי קיימת \hat{C} קבוצה מגניבה שמכילה ממש את C אזי $C \cup \{\hat{C}\}$ מכילה ממש את C וגם היא מוכלת

ב \mathcal{O} וגם היא שרשרת. למה שרשרת? כי לכל שתי קבוצות $C'_1, C'_2 \in \mathcal{C}$ אם $C \cup \{\hat{C}\}$ מכילה ממש את C וגם היא מוכלת בשניה כי שרשרת.

אחרת $C'_1 \in \mathcal{C}$ וגם $C'_2 = \hat{C}$ (המקרה הנוסף דומה) ואז

$$C'_2 \subseteq C \subseteq \hat{C}$$

וסיימנו.

(ב) (15 נק') נתייחס ל S מהסעיף הקודם. ענו על השאלות הבאות:

i. הוכיחו שלכל $y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in S$ כך ש $y - x \in \mathbb{Q}$.

פתרון:

יהא $y \in \mathbb{R}$. נחלק:

- אם $y \in S$ אז נבחר $x = y$ ואכן $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$ ואכן $y - x = 0 \in \mathbb{Q}$.
- אחרת, $y \notin S$. נב"ש שלא קיים $x \in S$ כך ש $y - x \in \mathbb{Q}$ אזי לכל $x \in S$ מתקיים ש $y - x \notin \mathbb{Q}$. כיון ש $y \notin S$ אז $S \cup \{y\}$ מכיל את S ושונה ממנה. נראה ש $S \cup \{y\}$ מגניבה ונקבל שתירה לסעיף א. אכן, לכל x_1, x_2 שונים ב $S \cup \{y\}$ מתקיים:
 - אם $x_1, x_2 \in S$ אזי $x_1 - x_2 \notin \mathbb{Q}$ כי S מגניבה.
 - אם $x_1 \in S$ ו $x_2 \in \{y\}$ אז $x_2 = y$ ונקבל פי ההנחה בשלילה כי $x_2 - x_1 = y - x_1 \notin \mathbb{Q}$. המקרה ש $x_1 \in \{y\}$ ו $x_2 \in S$ דומה.
- ii. הוכיחו שקיימת פונקציה חח"ע ועל $f : S \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$.

פתרון:

נגדיר $f : S \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $f(x, q) = x + q$.

- טענה f על. הוכחה: יהא $y \in \mathbb{R}$ אז לפי תת סעיף קודם קיים $x \in S$ כך ש $y - x \in \mathbb{Q}$ ולכן קיים $q \in \mathbb{Q}$ המקיים $y - x = q$. לכן

$$y = x + q = f(x, q)$$

וקיבלנו ש (x, q) מקור ל y כנדרש.

- טענה f חח"ע. הוכחה: נניח $f((x_1, q_1)) = f((x_2, q_2))$ ונראה ש $x_1 = x_2, q_1 = q_2$. מההנחה נקבל ש

$$x_1 + q_1 = x_2 + q_2$$

ואם נעביר אגף

$$x_1 - x_2 = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$$

כאשר האדום נובע מכך ש $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. מהגדרת הקבוצה S לא ייתכן ש $x_1 \neq x_2$ (כי איברים שונים מ S ההפרש שלהם לא רציונאלי) ולכן $x_1 = x_2$ מכאן ש

$$0 = x_1 - x_2 = q_2 - q_1$$

ולכן גם $q_1 = q_2$ כנדרש.

iii. הוכיחו/הפריכו: $|S| = \aleph$.

פתרון:

לפי תת סעיף קודם, מתקיים לפי הגדרה כי $|\mathbb{R}| = |S \times \mathbb{Q}|$ ולכן

$$\aleph = |S \times \mathbb{Q}| = |S| \cdot \aleph_0$$

כיוון ש $S \neq \emptyset$ (אחרת היא לא מקסימאלית כי $\{1\}$ קבוצה מגניבה) נקבל ש

$$\aleph = |S| \cdot \aleph_0 = \max\{|S|, \aleph_0\} = |S|$$

כאשר האדום נכון מכיוון שאחרת $\aleph = \max\{|S|, \aleph_0\} = \aleph_0$ ונקבל סתירה.