מבחן בגאומרטיה אלגברית 1 מועד 2008 א'

15 בפברואר 2015

1 שאלה 1

מגדירים במרחב $\mathbb{P}^3_{\bar{w}}$ את הקבוצות הבאות:

$$\begin{aligned} X &= \left\{w_0 w_1^2 = w_2^2 w_3 - w_3^3\right\} \\ Y_1 &= \{w_3 = 0\} \\ Y_2 &= \{w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 0\} \\ Y_3 &= \{w_0 + w_1 + w_2 + 2w_3 = 0\} \end{aligned}$$

הקבוצות X, Y_1, Y_2, Y_3 הן כולן קבוצות פרויקטיביות כבתור פתרונות למשוואה הומוגנית (אחת). לכן $X \cap Y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ היא גם קבוצה פרויקטיבית. $R = (X \cap Y_1) \cup (X \cap Y_2)$ הוא hypersurface ולכן $Z = (X \cap Y_3) \setminus R$ הוא קבוצה אפינית. כיוון ויש בו יותר מנקודה אחת הוא לא יריעה פרויקטיבית.

2 שאלה 2

זהה לשאלה 2 ב2011 א'.

3 שאלה 3

גנוס לא בחומר.

4 שאלה 4

במרחב $\mathbb{P}^5$ר"ל את U קבוצת הנקודת שמייצגות conics, $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\bar{w}}$ כך ש$|L \cap C| = 2$ היכן ש$L := \{w_0 + w_1 + w_2 = 0\}$. חתך־חרוט (קוניקה) מוגדר ע"י המשוואה:

$$a_0 w_0^2 + a_1 w_1^2 + a_2 w_2^2 + a_3 w_0 w_1 + a_4 w_1 w_2 + a_5 w_0 w_2 = 0$$

בחיתוך מתקיימות המשוואות גם של L אז לאחר הצבה:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 (w_1 + w_2)^2 + a_1 w_1^2 + a_2 w_2^2 - a_3 w_1 (w_1 + w_2) + a_4 w_1 w_2 - a_5 w_2 (w_1 + w_2) \\ 0 &= (a_0 + a_1 - a_3) w_1^2 + (2a_0 - a_3 + a_4 - a_5) w_1 w_2 + (a_0 + a_2 - a_5) w_2^2 \end{aligned}$$

החיתוך מכיל שתי נק' אמ"מ $\Delta \neq 0$ כלומר

$$\left(2a_0-a_3+a_4-a_5\right)^2-4\left(a_0+a_1-a_3\right)\left(a_0+a_2-a_5\right)\neq 0$$

לכן

$$\begin{aligned} U &= \left\{(w_0,w_1,w_2)\in\mathbb{P}^2_{\bar{w}} : a_0w_0^2+a_1w_1^2+a_2w_2^2+a_3w_0w_1+a_4w_1w_2+a_5w_0w_2=0\right\} \\ &\quad \setminus \left\{\text{conics} : \left(2a_0-a_3+a_4-a_5\right)^2-4\left(a_0+a_1-a_3\right)\left(a_0+a_2-a_5\right)=0\right\} \end{aligned}$$

מחסרים hypersurface מקבוצה פרויקטיבית אז זו יריעה אפינית.

5 שאלה 5

נתבונן בעקומה $B=\left\{x^5-y^3=0\right\}\subseteq\mathbb{C}^2_{x,y}$ ר"ל $\bar{B}$, $C\left[B\right]$.

1. לפי הגדרה

$$C[B]=\mathbb{C}^2_{x,y}\Big/\left\langle x^5-y^3\right\rangle$$

תהא $f\in C\left[B\right]$ ועבורה יתקיים

$$\begin{aligned} f\left(x,y\right) &= \sum_{i,j}a_{ij}x^iy^j=\sum_{i,j}a_{i,j}x^iy^{3i}+\sum_{i,j}a_{i,j}x^iy^{3i+1}+\sum_{i,j}a_{ij}x^iy^{3i+2} \\ &= \sum_{i,j}a_{ij}x^{i+5}+y\sum a_{ij}x^{i+5}+y^2\sum a_{ij}x^{i+5} \end{aligned}$$

ז"א לכל $f\in C\left[A\right]$ כנ"ל ניתן למצוא הצגה שכזו ובהכרח כל פולינום בחוג המנה הנ"ל הוא מצורה זו ולפיכך

$$C\left[B\right]=\left\{p_1\left(x\right)+y\cdot p_2\left(x\right)+y^2\cdot p_3\left(x\right)\mid p_{1,2,3}\in\mathbb{C}\left[x\right]\right\}$$

2. נציב $x=\frac{w_1}{w_0},y=\frac{w_2}{w_0}$ לקבל

$$\bar{B}=\left\{(w_0,w_1,w_2):w_1^5-w_0^2w_2^3=0\right\}$$