מבחן בגאומרטיה אלגברית 1 מועד 2008 א'

15 בפברואר 2015

1 שאלה 1

מגדירים במרחב $\mathbb{P}^3_{\bar{w}}$ את הקבוצות הבאות:

$$\begin{aligned} X &= \left\{w_0 w_1^2 = w_2^2 w_3 - w_3^3\right\} \\ Y_1 &= \{w_3 = 0\} \\ Y_2 &= \{w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 0\} \\ Y_3 &= \{w_0 + w_1 + w_2 + 2w_3 = 0\} \end{aligned}$$

הקבוצות X, Y_1, Y_2, Y_3 הן כולן קבוצות פרויקטיביות כבתור פתרונות למשוואה הומוגנית (אחת). לכן $X \cap Y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ היא גם קבוצה פרויקטיבית. $R = (X \cap Y_1) \cup (X \cap Y_2)$ הוא hypersurface ולכן $Z = (X \cap Y_3) \setminus R$ הוא קבוצה אפינית. כיוון ויש בו יותר מנקודה אחת הוא לא יריעה פרויקטיבית.

2 שאלה 2

זהה לשאלה 2 ב2011 א'.

3 שאלה 3

גנוס לא בחומר.

4 שאלה 4

במרחב $\mathbb{P}^5$ר"ל את U קבוצת הנקודת שמייצגות conics, $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\bar{w}}$ כך ש$|L \cap C| = 2$ היכן ש$L := \{w_0 + w_1 + w_2 = 0\}$. חתך־חרוט (קוניקה) מוגדר ע"י המשוואה:

$$a_0 w_0^2 + a_1 w_1^2 + a_2 w_2^2 + a_3 w_0 w_1 + a_4 w_1 w_2 + a_5 w_0 w_2 = 0$$

בחיתוך מתקיימות המשוואות גם של L אז לאחר הצבה:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 (w_1 + w_2)^2 + a_1 w_1^2 + a_2 w_2^2 - a_3 w_1 (w_1 + w_2) + a_4 w_1 w_2 - a_5 w_2 (w_1 + w_2) \\ 0 &= (a_0 + a_1 - a_3) w_1^2 + (2a_0 - a_3 + a_4 - a_5) w_1 w_2 + (a_0 + a_2 - a_5) w_2^2 \end{aligned}$$

החיתוך מכיל שתי נק' אמ"מ $\Delta \neq 0$ כלומר

$$(2a_0 - a_3 + a_4 - a_5)^2 - 4(a_0 + a_1 - a_3)(a_0 + a_2 - a_5) \neq 0$$

לכן

$$\begin{aligned} U &= \left\{(w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{P}^2_{\bar{w}} : a_0 w_0^2 + a_1 w_1^2 + a_2 w_2^2 + a_3 w_0 w_1 + a_4 w_1 w_2 + a_5 w_0 w_2 = 0\right\} \\ &\quad \setminus \left\{\text{conics} : (2a_0 - a_3 + a_4 - a_5)^2 - 4(a_0 + a_1 - a_3)(a_0 + a_2 - a_5) = 0\right\} \end{aligned}$$

מחסרים hypersurface מקבוצה פרויקטיבית אז זו יריעה אפינית.

5 שאלה 5

נתבונן בעקומה $B = \left\{x^5 - y^3 = 0\right\} \subseteq \mathbb{C}^2_{x,y}$ ר"ל $\bar{B}$, $C[B]$.

1. לפי הגדרה

$$C[B] = \mathbb{C}^2_{x,y} \Big/ \left\langle x^5 - y^3 \right\rangle$$

תהא $f \in C[B]$ ועבורה יתקיים

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^{3i} + \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^{3i+1} + \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^{3i+2} \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} x^{i+5} + y \sum a_{ij} x^{i+5} + y^2 \sum a_{ij} x^{i+5} \end{aligned}$$

ז"א לכל $f \in C[A]$ כנ"ל ניתן למצוא הצגה שכזו ובהכרח כל פולינום בחוג המנה הנ"ל הוא מצורה זו ולפיכך

$$C[B] = \left\{p_1(x) + y \cdot p_2(x) + y^2 \cdot p_3(x) \mid p_{1,2,3} \in \mathbb{C}[x]\right\}$$

הערה:

אני לא בטוח שזו דרך מנומקת היטב/נכונה/הגיונית ולכן אפשר לנסות לעבוד בדומה לשיעור החזרה של פרופ' בנדמן עם שינוי קל בצעד של הוכחות היחידות (צעד 2) ולומר: B קבוצה אפינית כבתור אוסף אפסים של פולינום, כלומר

$$C[B] = \mathbb{C}[x,y] \big/ I(X)$$

כאשר האידיאל של הקבוצה מוג' ע"י $I(X) = \left\langle x^5 - y^3 \right\rangle$. כעת לפי שלושת השלבים:

- כל צמצום של הפולינום $p(x,y)$ על B נותן פולינום מהצורה

$$p_1(x) + y p_2(x) + y^2 p_3(x)$$

שהוא בחוג המנה $x^5 - y^3 = 0$.

- כל מח"ש של פולינומים בחוג המנה מכילה פולינום יחיד כנ"ל כי לכל xבמשוואה $y^3 = x^5$ מוגדר ערך יחיד של y. נניח אחרת, כלומר ש$y_1 \neq y_2$:

$$\begin{cases} x^5 = y_1^3 \\ x^5 = y_2^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^5 - x^5 = y_1^3 - y_2^3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (y_1 - y_2)\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 = 0$$
$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 + \frac{y_1}{y_2} + 1 = 0$$

(ניתן להניח $y_2 \neq 0$כי אם $y_2 = 0$ אז בהכרח כיוון ומעל $\mathbb{C}$, האיבר הנילפוטנט היחיד הוא 0, כלומר $\exists n \in \mathbb{N} : z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ינבע ש$y_1 = y_2 = x = 0$ ובפרט $y_1 = y_2$). נפתור לקבל:

$$y_1 = \frac{-1 \pm 3i}{2} y_2$$

אבל אז (בה"כ $y_1 = \frac{1+3i}{2} y_2$) אם נחזור למשוואה הראשונה (נציב את הערכים $(x, y_1), (x, y_2)$ על B) נקבל:

$$x^5 = y_1^3 = \frac{13 - 9i}{4} y_2^3 = \frac{13 - 9i}{4} x^5$$

אז בהכרח $x = 0$ וכאמור מתאים במקרה זה רק הערך $y = 0$ לנקודה על B והנחנו שזה לא המקרה. סתירה.

- חוג המנה הנ"ל סגור גם לסכום ומכפלה של כל שתי פולינומים מהצורה הנ"ל.

מכאן נובע

$$C[B] = \left\{ p_1(x) + y \cdot p_2(x) + y^2 \cdot p_3(x) \mid p_{1,2,3} \in \mathbb{C}[x] \right\}$$

2. נציב $x = \frac{w_1}{w_0}, y = \frac{w_2}{w_0}$ לקבל

$$\bar{B} = \left\{ (w_0, w_1, w_2) : w_1^5 - w_0^2 w_2^3 = 0 \right\}$$