פתרון תרגיל בית 5 באלגברה מופשטת
88-211 סמסטר א' תשע"ו

שאלה 1. תהי D_4 החבורה הדיהדרלית מסדר 8. תארו את כל תת־החבורות הלא טריוויאליות שלה, והוכיחו שכולן אבליות. האם כולן ציקליות?

פתרון. נציג את החבורה בצורה הרגילה, כחבורה הנוצרת על ידי האיברים σ, סיבוב ב-$90°$ ו-τ, שיקוף לגבי ציר כלשהו של הריבוע. כלומר בכתיב של יוצרים ויחסים:

$$D_4 = \left\langle \sigma, \tau : \sigma^4 = \tau^2 = \mathrm{id}, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \right\rangle$$

ידוע לנו כי $|D_4| = 8$. לפי משפט לגראנז' הסדרים האפשריים היחידים של תת־חבורות הם $\{1, 2, 4, 8\}$. הסדרים 1 ו-8 מתקבלים עבור תת־החבורות הטריוויאליות. מסתבר שיש חמש תת־חבורות מסדר 2 והן

$$\left\langle \sigma^2 \right\rangle, \langle \tau \rangle, \langle \tau\sigma \rangle, \left\langle \tau\sigma^2 \right\rangle, \left\langle \tau\sigma^3 \right\rangle$$

יש גם שלוש תת־חבורות מסדר 4 והן

$$\langle \sigma \rangle, \left\langle \sigma^2, \tau \right\rangle = \left\{ \mathrm{id}, \sigma^2, \tau, \tau\sigma^2 \right\}, \left\langle \sigma^2, \tau\sigma^3 \right\rangle = \left\{ \mathrm{id}, \sigma^2, \tau\sigma^3, \tau\sigma \right\}$$

קל לראות שכל תת־החבורות הציקליות הן אבליות. לגבי תת־החבורות $\left\langle \sigma^2, \tau \right\rangle$ ו-$\left\langle \sigma^2, \tau\sigma^3 \right\rangle$ בדיקה ישירה תראה שהן אבליות (למשל על ידי טבלת כפל), אבל הן לא ציקליות (כי אין בהן איבר מסדר 4).

שאלה 2. נגדיר את המֶרְכָּז של חבורה G להיות

$$Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}$$

דהיינו זהו האוסף של כל האיברים ב-G שמתחלפים עם כל איברי G.

א. הוכיחו כי לכל חבורה G מתקיים $Z(G) \lhd G$.

ב. מצאו את $Z(S_3)$ ואת $Z(D_3 \times \mathbb{Z}_4)$.

ג. הוכיחו $Z(D_{2n+1}) = \{e\}$ וכי $Z(D_{2n}) = \langle \sigma^n \rangle$ עבור $n > 1$. רמז: איך נראה איבר כללי בחבורה הדיהדרלית?

פתרון. א. נראה בשלבים כי $Z(G) \leq G$. ברור ש-$e \in Z(G)$ כי e מתחלף עם כל איבר. יהיו $x, y \in Z(G)$, אז נשים לב שלכל $h \in G$ מתקיים כי

$$xyh = xhy = hxy$$

ולכן $xy \in Z(G)$. כמו כן מפני שמתקיים $xh = hx$, אז גם $hx^{-1} = x^{-1}h$, ולכן $x^{-1} \in Z(G)$. כלומר המרכז סגור לפעולה ולהופכי. כעת נראה נורמליות. יהי $k \in G$, אז נראה שיוויון בין המחלקה השמאלית לבין המחלקה הימנית לפי התחלפות האיברים במרכז:

$$kZ(G) = \{kg : \forall h \in G, gh = hg\} = \{gk : \forall h \in G, gh = hg\} = Z(G)k$$

ולכן $Z(G)$ תת־חבורה נורמלית של G.

ב. המרכז של S_3 הוא תת־חבורה, ולכן הסדר שלו חייב לחלק את $|S_3| = 6$. הוא לא יכול להיות 6 כי אז נקבל $Z(S_3) = S_3$, והרי S_3 לא אבלית. אנחנו יודעים כי $a = (1\ 2\ 3)$ לא מתחלף עם $b = (1\ 2)$. כלומר שניהם לא במרכז. לכן גם $a^{-1} = (3\ 2\ 1) \notin Z(S_3)$. מהתרגיל הקודם אנו יודעים כי $(2\ 3)$ ו-$(1\ 3)$ לא מתחלפים בינהם. לסיכום $Z(S_3) = \{\mathrm{id}\}$.
אפשר לשים לב כי $S_3 \cong D_3$, ולכן $Z(D_3) = \{\mathrm{id}\}$. לעומת זאת $\mathbb{Z}_4$ היא אבלית.
כעת יש לבדוק כי $Z(G \times H) \cong Z(G) \times Z(H)$. לכן נקבל כי

$$Z(D_3 \times \mathbb{Z}_4) = Z(D_3) \times Z(\mathbb{Z}_4) = \{(\mathrm{id}, 0), (\mathrm{id}, 1), (\mathrm{id}, 2), (\mathrm{id}, 3)\}$$

ג. נתחיל בכך שנשים לב שכל איבר של D_n יכול להכתב בצורה $\tau^i\sigma^j$ כאשר $i \in \{0, 1\}$ ו-$j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. מהיחס $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$ אפשר בקלות לקבל את היחסים $\sigma^k\tau = \tau\sigma^{-k}$ לכל $k \in \mathbb{Z}$. כמו כן, מפני שהקבוצה $\{\sigma, \tau\}$ יוצרת את D_n, אז איבר $\alpha \in D_n$ נמצא במרכז אם ורק אם הוא מתחלף עם קבוצת היוצרים (ודאו שאתם מבינים למה זה נכון גם לחבורות אחרות!).
נניח $\alpha = \tau^i\sigma^j \in Z(D_n)$ בהצגה לעיל. דרשנו כי $\alpha\sigma = \sigma\alpha$, כלומר $\tau^i\sigma^j\sigma = \sigma\tau^i\sigma^j$, לכן אחרי כפל משמאל ב-$\sigma^{-j}$ נקבל

$$\tau^i\sigma = \sigma\tau^i$$

וזה יתכן אם $i = 0$. אך זה לא ייתכן אם $i = 1$, הרי נקבל $\tau\sigma = \sigma\tau$ וידוע לנו שהם לא מתחלפים (עבור $n \geq 3$). כלומר האיברים שאנחנו מחפשים הם מן הצורה $\alpha = \sigma^j$.
כעת נבדוק התחלפות עם τ, כלומר מתי $\alpha\tau = \tau\alpha$. זה יקרה אם $\sigma^j\tau = \tau\sigma^j$ ולפי היחסים שקיבלנו לעיל, זה שקול ל-$\tau\sigma^{-j} = \tau\sigma^j$, כלומר מתי $\sigma^{2j} = \mathrm{id}$. ידוע לנו כי $o(\sigma) = n$, אז התשובה היא רק כאשר $j = 0$ או $j = \frac{n}{2}$. זה בדיוק הפיצול לפי הזוגיות בשאלה.
קיבלנו שבמקרה ו-$n = 2m + 1$ אי זוגי, אז $Z(D_{2m+1}) = \{\mathrm{id}\}$ ואם $n = 2m$ זוגי, אז $Z(D_{2m}) = \{\mathrm{id}, \sigma^m\}$. להשלמת התמונה, נשים לב כי החבורות D_1 ו-D_2 הן אבליות, ולכן המרכז שלהן הוא כל החבורה.

שאלה 3. בכל סעיף תנו דוגמה לחבורה G ותת־חבורה $H \leq G$ המקיימות את התנאים.
רמז: אפשר להעזר בשאלה הקודמת.

א. הכלה ממש $Z(H) \subset Z(G)$.

ב. הכלה ממש $Z(G) \subset Z(H)$.

ג. $Z(G)$ לא מכיל את $Z(H)$ ולא מוכל בו.

פתרון. א. אפשר לבחור כל חבורה אבלית ותת־חבורה ממש שלה. למשל $G = \mathbb{Z}$ ואת $H = 2\mathbb{Z}$.

ב. אפשר להעזר בשאלה הקודמת. אם $G = S_3$, אז המרכז שלה טריוויאלי. נבחר $H = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$ שהיא תת־חבורה ציקלית של S_3, ובפרט אבלית, ולכן $Z(G) = \{e\} \subset H = Z(H)$. אפשר לבחור גם את $G = D_5$ עם $H = \langle\sigma\rangle$.

ג. גם כאן אפשר להעזר בשאלה הקודמת, ולבחור $G = D_4$, עם $H = \langle\tau\rangle$. ידוע לנו כי $Z(D_4) = \langle\sigma^2\rangle = \{\mathrm{id}, \sigma^2\}$ וכן $Z(H) = H = \{\mathrm{id}, \tau\}$ כי היא ציקלית.

שאלה 4. בכל סעיף נתונה חבורה G ותת־חבורה $H \leq G$. תארו את G/H, אוסף המחלקות השמאליות של H ב-G.

א. $G = U_{10}$, $H = \langle 9\rangle$.

ב. $G = G_1 \times G_2$, $H = \{e_1\} \times G_2$ כאשר e_1 הוא איבר היחידה של G_1.

ג. $G = D_6$, $H = \left\langle \sigma^2 \right\rangle$ כאשר σ היא האיבר שמקביל לסיבוב ב-$60°$ מעלות.

ד. $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}^* : x > 0\}$.

פתרון. א. נשים לב כי $\varphi(10) = 4$, ואכן יש ארבעה איברים בחבורה $U_{10} = \{1, 3, 7, 9\}$. תת־החבורה $H = \{1, 9\}$ היא מסדר 2, ולכן יש שתי מחלקות שמאליות: H ו-$3H = \langle 3, 7\rangle$.

ב. המחלקות הן מן הצורה $(g_1, g_2) \cdot (\{e_1\} \times G_2)$. אפשר לראות כי קבוצת המחלקות היא בהתאמה חח"ע ועל לאיברי G_1 לפי

$$(g_1, g_2) \cdot (\{e_1\} \times G_2) = \{(g_1, k) : k \in G_2\} \leftrightarrow g_1 \in G_1$$

ג. ידוע לנו כי $|G| = 12$ וכמו כן $H = \left\{\mathrm{id}, \sigma^2, \sigma^4\right\}$. לכן יש ארבע מחלקות שמאליות והן

$$H, \sigma H = \left\{\sigma, \sigma^3, \sigma^5\right\}, \quad \tau H = \left\{\tau, \tau\sigma^2, \tau\sigma^4\right\}, \tau\sigma H = \left\{\tau\sigma, \tau\sigma^3, \tau\sigma^5\right\}$$

ד. אם $a \in \mathbb{R}^+$, אז המחלקה השמאלית של a היא $a\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$. אחרת $a < 0$ ונקבל $a\mathbb{R}^+ = \{ax : x < 0\} = \mathbb{R}^-$. לכן יש בסך הכל שתי מחלקות שמאליות.

שאלה 5 (אתגר). תהינה $\sigma, \tau \in S_n$ תמורות כך שמתקיים $\sigma = \tau^2$. במקרה זה נאמר כי τ היא שורש של σ. מצאו תנאי מספיק והכרחי שקובע האם לתמורה נתונה $\sigma \in S_n$ יש שורש. אם קיים שורש, איך אפשר לחשב אותו מפורשות?

פתרון. מבוסס על התשובה בקישור `http://math.stackexchange.com/a/266605`.
כל תמורה היא מכפלה של מחזורים זרים $\tau = c_1 c_2 \ldots c_k$. מפני שמחזורים זרים מתחלפים נקבל כי

$$\tau^2 = c_1 c_2 \ldots c_k c_1 c_2 \ldots c_k = c_1^2 c_2^2 \ldots c_k^2$$

כלומר לתמורה יהיה שורש אם היא מכפלה של ריבועי מחזורים זרים, כמו c_i^2.
כעת צריך לבדוק מתי מחזור הוא ריבועי. נניח כי המחזור $c = (i_1 i_2 \ldots i_m)$ הוא מחזור מאורך m. בדקו שאם m הוא אי זוגי, אז גם c^2 הוא מחזור מאורך m. אפשר להעזר בכך ש-$(m, 2) = 1$. אם m זוגי נקבל כי

$$c^2 = (i_1 i_3 \ldots i_{m-1})(i_2 i_4 \ldots i_m)$$

שהיא מכפלה של שני מחזורים זרים מאורך $\frac{m}{2}$.
בסך הכל קיבלנו שלתמורה יש שורש אם ורק אם בהצגה של התמורה למחזורים זרים, לכל m זוגי מספר המחזורים מאורך m הוא זוגי. במקרה ולתמורה σ יש שורש, נוכל לפי התיאור הזה למצוא את השורש: נציג את σ כמכפלת מחזורים זרים $d_1 d_2 \ldots d_k$. לכל מחזור d_i מאורך m אי זוגי נוכל למצוא את השורש שלו בתור

$$\sqrt{d_i} = \left(i_1 i_{(m+1)/2} i_2 i_{(m+3)/2} \ldots i_m i_{(m-1)/2}\right)$$

ולכל מחזור מאורך m זוגי, יהיה מחזור $d_i' = (j_1 j_2 \ldots j_m)$ מאורך m בהצגה של σ ונוכל לבנות את השורש

$$\sqrt{d_i d_i'} = (i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m)$$

שאלה 6 (אתגר). צפו בפרק 10 בעונה 6 של הסדרה פיוצ'רמה.

א. רשמו את עשרים החילופים המתבצעים בפרק, ובדקו שמכפלתם היא אכן מכפלת הזהות. הדרכה: היו עקביים, ורשמו בכל מקרה את הגופים המחליפים זהויות או את הזהויות המחליפות גופים.

ב. נאמר שסדרת חילופים היא נאותה אם אף חילוף אינו מופיע בה יותר מפעם אחת. בפרק, פרופסור פארנסוורת' מצהיר שכל סדרה נאותה של חילופים על n עצמים אפשר להמשיך לסדרה נאותה על n העצמים ועוד שניים, כך שמכפלת כל החילופים היא הזהות. תן דוגמה נגדית למשפט זה, אם מסתפקים ב-n העצמים ועוד אחד.

ג. נסו להוכיח את המשפט.
רמזים וספוילרים בסרטון הזה מאת Mathologer וברשומה הזאת בבלוג המומלץ "לא מדויק" של גדי אלכסנדרוביץ'.

בהצלחה!