

## אינפי 4 - תרגול 2

3 באוגוסט 2011

### דוגמה

ניקח אליפסויד:

$$E = \{x^2 + 17y^2 + 7z^2 = 3\}$$

ניקח נק'  $(x_0, y_0, z_0) \in E$ .  
צריך למצוא את משוואת המישור המשיק לקבוצה  $E$  בנק'  $(x_0, y_0, z_0)$ .

### פתרון

$$\begin{aligned}dE(x_0, y_0, z_0) &= (2x_0 \quad 34y_0 \quad 14z_0) \\(2x_0 \quad 34y_0 \quad 14z_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} &= 0 \\x_0x + 17y_0y + 7z_0z &= x_0^2 + 17y_0^2 + 7z_0^2 \\x_0x + 17y_0y + 7z_0z &= 3\end{aligned}$$

וזו משוואת המישור המשיק.

### תרגיל

נגדיר קבוצה  $x_\ell$  כקבוצה של מיקומים של מוט באורך  $\ell$  ב- $\mathbb{R}^3$  כאשר קצה אחד של המוט נמצא על ציר ה- $x$  והקצה השני על כדור ברדיוס 1 שמרכזו בראשית הצירים. משוואת הכדור היא

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

נקרא לנק' על ציר ה- $x$  עליה נמצא קצה המוט  $(t, 0, 0)$ .  
אורך המוט הוא:

$$(t - x)^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$$

לכן סה"כ

$$x_\ell = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ (t - x)^2 + y^2 + z^2 &= \ell^2 \end{aligned} \right\}$$

נמצא עכשיו מישור משיק בנק':

$$p = \begin{pmatrix} 1 + \ell \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נגדיר פונק':

$$f(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ (t-x)^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 \end{pmatrix} = 0$$

נמצא דיפרנציאל:

$$df = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2(t-x) & -2(t-x) & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת:

$$df \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

זה מתקיים ב  $\ker(df)$ .  
נמצא את הגרעין של  $df$ :

$$df(p) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2\ell & -2\ell & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אם נפתור את המערכת הקודמת נקבל שעבור המערכת

$$df(p) \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} t &= x = 0 \\ z, y &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

אזי מתקיים:

$$\ker(df(p)) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן המישור המשיק הוא:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 + \ell \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

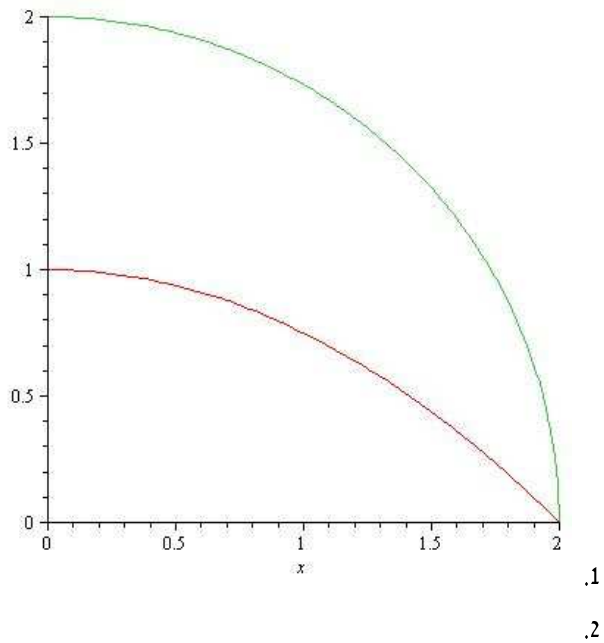
## תרגיל

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{4-x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$$

1. ציירו את התחום.

2. שנו את סדר האינטגרציה.

## פתרון



$$\int_0^2 dx \int_{\frac{4-x^2}{4}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{2\sqrt{1-y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

## תרגיל

פתור:

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x+y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

## פתרון

נבצע החלפת משתנים:

$$\begin{aligned}u &= x + y \\v &= x - y \\x &= \frac{u + v}{2} \\y &= \frac{u - v}{2} \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

ונפתור את האינטגרל:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy &= \int_1^2 du \int_{-u}^u \frac{1}{2} e^{\frac{v}{u}} du \\ &= \frac{3}{4} (e - e^{-1})\end{aligned}$$

## תרגיל

פתרו:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

עבור הפונק' והמשטח:

$$\begin{aligned}f &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ V &= \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \end{array} \right\}\end{aligned}$$

נבצע החלפת משתנים למשתנים כדוריים:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^{2a} \frac{1}{\rho} d\rho d\varphi d\theta \cdot |\rho \sin \theta|$$

ונפתור (בבית).