ב"א אנליזה 1 תשעו מבחן לדוגמה

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)\ln(\cos(x))}{x^2 2^x}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\ln(\cos(x))}{x^2 2^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2^x}\cdot\frac{\ln(1+\cos(x)-1)}{\cos(x)-1}\cdot\frac{\cos(x)-1}{x^2}$$
$$=1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)$$

(ב) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{\sqrt{2x^2+2}-(x+1)}$

פתרון: מתקיים (בעזרת כפל בצמוד)

$$\frac{|x-1|}{\sqrt{2x^2+2}-(x+1)}=\frac{|x-1|}{\sqrt{2x^2+2}-(x+1)}=\frac{|x-1|}{\sqrt{2x^2+2}-(x+1)}\cdot\frac{\left(\sqrt{2x^2+2}+(x+1)\right)}{\left(\sqrt{2x^2+2}+(x+1)\right)}=\frac{|x-1|\left(\sqrt{2x^2+2}+(x+1)\right)}{2x^2+2-(x+1)^2}=$$

$$=\frac{|x-1|\left(\sqrt{2x^2+2}+(x+1)\right)}{x^2-2x+1}=\frac{|x-1|\left(\sqrt{2x^2+2}+(x+1)\right)}{(x-1)^2}$$

ולכן, הגבול מימין הוא

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{\sqrt{2x^2+2}-(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2x^2+2}+(x+1)\right)}{(x-1)^2}==\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(\sqrt{2x^2+2}+(x+1)\right)}{x-1}=\left\{\frac{\sqrt{4}+2}{0^+}\right\}=\infty$$

והגבול משמאל הוא

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{\sqrt{2x^2+2}-(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)\left(\sqrt{2x^2+2}+(x+1)\right)}{(x-1)^2}==\lim_{x\to 1^+}\frac{-\left(\sqrt{2x^2+2}+(x+1)\right)}{x-1}=$$

$$=\left\{\frac{-\left(\sqrt{4}+2\right)}{0^-}=-(-\infty)\right\}=\infty$$

ולכן שני הגבולות החד צדדים שווים אחד לשני ושווים ל ∞.

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$

פתרון: מתקיים $\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$. נחשב את הגבול של $\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ בעזרת כלל המנה: נגדיר $a_n = \frac{n^n}{n!}$ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= (n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

ולכן, מכיוון ש $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to e$ גם $\sqrt[n]{a_n}\to e$ ולכן

$$\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \ln\sqrt[n]{a_n} \to \ln(e) = 1$$

וזה הגבול המבוקש בשאלה.

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ רציפה?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

וזה אכן מתקיים כי x^2 שואפת לאפס ו $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ חסומה. לכן f רציפה ב $x=0$ וברור שהיא רציפה בכל $x\neq 0$ כי $x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה בכל תחום הגדרתה שהוא $x\neq 0$. סה"כ f רציפה בכל הממשיים.

(ב) מצאו את f' בכל נקודה שהיא מוגדרת.

פתרון: נבדוק אם f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

כלומר $f'(0)$ קיימת וסופית ומתקיים $f'(0)=0$. לכל $x\neq 0$ הנגזרת היא

$$\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

(ג) לאילו ערכי x פונקצית הנגזרת $f'(x)$ רציפה?

פתרון: ראינו ש

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

על מנת ש f' תהיה רציפה ב $x = 0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

נניח בשלילה שזה אכן קורה. כעת כיוון ש $\lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (אפסה כפול חסומה) נקבל ש $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ כהפרש של שני פונקציות ששואפות לאפס. אבל $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0$ שהרי $a_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$ ו $\cos(a_n) = 1 \not\to 0$. סתירה. מכאן ש f' אינה רציפה ב $x = 0$. לכל $x \neq 0$ הנגזרת f' רציפה שהרי היא שווה ל $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ והיא רציפה בתחום הגדרה שהוא $x \neq 0$.

.3

(א) מצאו את הערך המקסימאלי של הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ב $\mathbb{R}$.
פתרון: נגזור

$$f'(x) = \frac{2\left(1+x^2\right) - (2x)^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1+x^2-2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1+x\right)\left(1-x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

ולכן f' מתאפסת אמ"מ $x = \pm 1$. בנוסף, לפי הטבלה

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

נסיק שהפונקציה f יורדת ממש ב $(-\infty,-1)$ ואז עולה ממש ב $(-1,1)$ ואז ויורדת ממש ב $(1,\infty)$ ולכן 1 הוא נקודת מקסימום של f והערך בה הוא

$$f(1) = \frac{2}{1+1} = 1$$

ולכן $f(x) < f(1)$ לכל $x > 1$ (שהרי בקטע זה הפונקציה יורדת). בנוסף לכל $x < 1$ גם מתקיים $f(x) < f(1)$. למה? ראינו ש f יורדת ב $(-\infty,-1)$ ולכן לכל $x < 0$ מתקיים

$$f(x) \leq \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{\frac{2}{x}}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = 0 < 1 = f(1)$$

ולכן $f(1) = 1$ זה הערך המקסימאלי.

(ב) הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים כי $0 < \ln(1+x^2) \leq x$
פתרון: לכל $x > 0$ מתקיים כי $1 < 1 + x^2$ ומכיוון ש $\ln$ פונקציה עולה ממשנסיק ש $0 = \ln(1) < \ln(1+x^2)$. נותר להוכיח כי $\ln(1+x^2) \leq x$. הפונקציה $g(t) = \ln(1+t^2)$ רציפה בקטע $[0,x]$ וגזירה בו ולכן לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $0 < c < x$ כך ש

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(c)$$

או מפורשות

$$\frac{\ln(1+x^2)-0}{x} = \frac{2c}{1+c^2} \leq 1$$

(האי-שיוויון נובע מסעיף קודם). לכן $\ln(1+x^2) \leq x$ כנדרש (x חיובי ולכן אי-השיוויון נשמר).

4. תהא f פונקציה רציפה וחיובית בכל הממשיים, המקיימת $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(א) הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x) - x = -\infty$.

פתרון: נחשב בעזרת הנתון:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = \{\infty \cdot (0-1)\} = -\infty$$

כנדרש.

(ב) הוכיחו שקיימת נקודה c כך ש $f(c) = c$.

פתרון: כיוון ש $f(x)$ חיובית נסיק ש $f(x) - x > -x$ ומכיוון ש $\lim_{x\to-\infty} -x = \infty$ נסיק לפי חצי סנוויץ כי $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \infty$ לכן קיימת $a < 0$ כך ש

$$f(a) - a < 0$$

ומסעיף קודם נסיק שקיימת נקודה $b > 0$ כך ש $f(b) - b > 0$. כיוון שהפונקציה $f(x) - x$ רציפה בקטע $[a, b]$ ומחליפה סימן שמה יש לה שורש בקטע זה. כלומר קיימת c בקטע כך ש $f(c) - c = 0$. נעביר אגף ונקבל את מה שרצינו.

5. תהי סדרה מונוטונית עולה וחיובית a_n כך ש $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = 3$.

(א) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

פתרון: נניח בשלילה שהגבול אינו ∞אזי מכיוון ש a_n סדרה עולה האפשרות היחידה שאפשרית היא שיש לה גבול סופו L. כלומר $a_n \to L$ ואז גם $a_{n+1} \to L$ וגם $a_{n+2} \to L$. בנוסף, $L > 0$ כי הסדרה חיובית בפרט לכל n מתקיים $a_n > 0$ ומכיוון שהסדרה עולה, לכל n מתקיים $a_n \geq a_1 >$ ולכן גם הגבול $L \geq a_1 > 0$. כעת, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = 3$ לפי הנתון ומצד שני

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{L+L}{L} = \frac{2L}{L} = 2$$

וקיבלנו $3 = 2$. סתירה. מכאן שגבול הסדרה ∞.

(ב) נניח כי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$. מצאו את L.

פתרון: כיוון שהסדרה עולה נקבל ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ לכל n ולכן גם הגבול $L \geq 1$. בנוסף, לפי אריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{L}$$

ולכן

$$3 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{L} + L$$

מכאן ש $3L = L^2 + 1$. נפתור את המשוואה $L^2 - 3L + 1 = 0$:

$$L_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

כיוון ש $1 > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ נסיק לפי מבחן המנה ש $a_n \to 0$ ולכן הפתרון למשוואה $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ הוא היחידי האפשרי עבור L וזה הערך של L.