$$\boxed{\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \text{ אם } x\to x_0 \text{ כאשר } f(x)=o(g(x))}$$

( ונאמר: " f היא O (Oh) קטן של g כאשר x שואף $x_0$ " ).

דוגמא: $\ln(x) = o(x)$ כאשר $x\to\infty$ .

שימו לב ש $o(g(x))$ מייצג איזושהיא פונקציה שכשנחלק אותה ב $g(x)$ - המנה תישאף לאפס כאשר מניחים שברור לנו על איזה גבול $x\to x_0$ מדובר ! לכן , נקבל למשל כי :

$o\big(g(x)\big) \pm o\big(g(x)\big) = o(g(x))$ - מהתכונות של גבול של סכום פונקציות ! .

- *תהי פונקציה* $f$ גזירה n פעמים בנקודה $x_0$ .

שימו לב – מזה נובע כי קיימות נגזרות מסדר n-1 <u>בסביבת הנקודה</u> (כדי שנוכל בכלל להתייחס לתהליך של גבול ) , והנגזרת מסדר n בנקודה מוגדרת על ידי :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}$$

נסתכל על:

$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$ . אז הוכחנו בתירגול כי קיים :

$$\mathrm{Lim}_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

ומכאן - נוכל לכתוב שעבור פונקציה $f$ שגזירה $n$ פעמים בנקודה $x_0$ :

קיימת הצגה בצורה : $f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + o((x-x_0)^n)$

כאשר $x \to x_0$ . בשיעור הוכחתם שבתנאים נוספים – גזירות מסדר n+1 בסביבה של הנקודה , ניתן להביע את השארית בצורת לגרנז" למשל – כך שיש ביטוי "מדוייק" לשארית (עד כדי חישוב נגזרת מסדר n+1 בנקודה שבדרך כלל אינה ידועה לנו ! ) .

דוגמא : ראינו פיתוח מקלוריין עם ביטוי לשארית לפונקציה הבאה אותה נציג גם בצורה ה"חדשה" -

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o((x)^n)$$ , עבור : $x \to 0$ .

° צורה שימושית נוספת לקירוב פונקציה על ידי פולינום ושארית היא הצורה הבאה :

באותם תנאים של קיום n נגזרות בנקודה שלנו , נגדיר את הפונקציה הרציפה ב $x_0$ הבאה :

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{R_n(x)\cdot n!}{(x-x_0)^n} & , \ x \neq x_0 \\ 0 & , \ x_0 \end{cases}$$

אז קיים :

$$\mathrm{Lim}_{x\to x_0}\omega(x) = 0$$

ולכן נוכל לכתוב :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + \frac{\omega(x)(x-x_0)^n}{n!}$$

כאשר $\mathrm{Lim}_{x\to x_0}\omega(x) = 0$.