מועד א' – מד"ר להנדסה – 83-115 – 12/07/18

זמן המבחן: 3 שעות. מבחן פתוח: כל חומר עזר מותר. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.

1. מצאו פתרון למד"ר $3xy^2y'+2y^3=\cos\left(x^2\right)$ המקיים $y\left(\sqrt{\pi}\right)=1$.

המד"ר הוא בעצם מהצורה $\left(2y^3-\cos\left(x^2\right)\right)dx+3xy^2dy=0$, זו אינה משוואה מדוייקת.

נחפש גורם אינטגרציה שתלוי ב x בלבד:

$\frac{P_y-Q_x}{Q}=\frac{6y^2-3y^2}{3xy^2}=\frac{1}{x}$ תלוי ב x בלבד ולכן גורם האינטגרציה הוא $\mu=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln(x)}=x$.

מכאן שהמשוואה $x\left(2y^3-\cos\left(x^2\right)\right)dx+3x^2y^2dy=0$ מדוייקת.

לכן $U(x,y)=\int 3x^2y^2dy+c(x)=x^2y^3+c(x)$

כעת $U_x=P$ ולכן $2xy^3+c'(x)=2xy^3-x\cos\left(x^2\right)$.

לכן $c'(x)=-x\cos\left(x^2\right)$ ולאחר אינטגרציה פשוטה נקבל כי $c(x)=-\frac{\sin\left(x^2\right)}{2}$.

סה"כ $U(x,y)=x^2y^3-\frac{\sin\left(x^2\right)}{2}$ ולכן פתרון המד"ר נתון ע"י המשוואה הסתומה $x^2y^3-\frac{\sin\left(x^2\right)}{2}=C$.

נציב $x=\sqrt{\pi}$ ולפי הנתון נקבל כי $\pi-0=C$ ולכן $x^2y^3-\frac{\sin\left(x^2\right)}{2}=\pi$.

מכאן שהפתרון הסופי הינו $y=\sqrt[3]{\frac{\pi+\frac{\sin\left(x^2\right)}{2}}{x^2}}$.

2. מצאו פתרון למד"ר $\frac{-3y'}{y} = xy^3 - 1$ המקיים $y(0)=1$.

זו בעצם מד"ר ברנולי $-3y' + y = xy^4$

נציב $z = \frac{1}{y^3}$ לכן $z' = \frac{-3y'}{y^4}$ ונקבל את המד"ר הלינארית $z' + z = x$.

לכן $z = e^{-\int 1dx}\left(\int xe^{\int 1dx} + C\right) = e^{-x}\left(\int xe^x + C\right) = e^{-x}\left(xe^x - e^x + C\right) = x - 1 + \frac{C}{e^x}$

לכן $y^3 = \frac{1}{x - 1 + \frac{C}{e^x}}$.

נציב $x = 0$ ולפי הנתון נקבל כי $1 = \frac{1}{-1 + C}$ ולכן $C = 2$.

סה"כ הפתרון הסופי הינו $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1 + \frac{2}{e^x}}}$

3. מצאו פתרון למד"ר $y''=y+e^{2x}e^{\left(e^x\right)}$ המקיים $y(0)=0, y'(0)=e$.

זו מד"ר לינארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים $y''-y=e^{2x}e^{\left(e^x\right)}$.

נמצא פתרון כללי למד"ר ההומוגנית, ונמצא פתרון פרטי באמצעות וריאצית מקדמים.

הפולינום האופייני הוא x^2-1 עם שורשים ± 1 .

לכן הפתרון הכללי להומוגנית הינו $y_H=c_1e^x+c_2e^{-x}$.

נחפש פתרון פרטי מהצורה $y_p=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{-x}$ באמצעות כלל קרמר.

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{-x}\\ e^{2x}e^{\left(e^x\right)} & -e^{-x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & e^{-x}\\ e^x & -e^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{-e^xe^{\left(e^x\right)}}{-2}$$

ולכן

$$c_1(x)=\frac{e^{\left(e^x\right)}}{2}$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}e^x & 0\\ e^x & e^{2x}e^{\left(e^x\right)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & e^{-x}\\ e^x & -e^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{e^{3x}e^{\left(e^x\right)}}{-2}$$

הפעם האינטגרציה פחות מיידית, נחשב אותה:

$$c_2(x)=\frac{-1}{2}\int e^{3x}e^{\left(e^x\right)}dx=\begin{Bmatrix}t=e^x\\ dt=e^xdx\end{Bmatrix}=\frac{-1}{2}\int t^2e^tdt=$$

$$=\begin{Bmatrix}f'=e^t & g=t^2\\ f=e^t & g'=2t\end{Bmatrix}=\frac{-t^2e^t}{2}+\int te^tdt=\begin{Bmatrix}f'=e^t & g=t\\ f=e^t & g'=1\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{-t^2e^t}{2}+te^t-\int e^tdt=\frac{-t^2e^t}{2}+te^t-e^t=\frac{-e^{2x}e^{\left(e^x\right)}}{2}+e^xe^{\left(e^x\right)}-e^{\left(e^x\right)}$$

סה"כ הפתרון הפרטי הינו $y_p=\frac{e^x e^{\left(e^x\right)}}{2}+\left(\frac{-e^{2x}e^{\left(e^x\right)}}{2}+e^x e^{\left(e^x\right)}-e^{\left(e^x\right)}\right)e^{-x}=e^{\left(e^x\right)}-e^{\left(e^x\right)-x}$

הפתרון הכללי הינו $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^{\left(e^x\right)}-e^{\left(e^x\right)-x}$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל $y(0)=0\Rightarrow c_1+c_2+e-e=0$

נגזור $y'=c_1e^x-c_2e^{-x}+e^xe^{\left(e^x\right)}-\left(e^x-1\right)e^{\left(e^x\right)-x}$, ונקבל $y'(0)=e\Rightarrow c_1-c_2+e-0=e$.

לכן סה"כ $c_1=c_2=0$ והפתרון הסופי הוא $y=e^{\left(e^x\right)}-e^{\left(e^x\right)-x}$

4. מצאו פתרון למד"ר $y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{x}+y+1$ המקיים $y(1)=0$.

ראשית נשים לב כי זו מד"ר פרידה $y'=\frac{1}{x}\left(y+1\right)+y+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(y+1\right)$

נפריד את המשתנים $\frac{dy}{y+1}=\left(\frac{1}{x}+1\right)dx$.

נבצע אינטגרציה $\ln|y+1|=\ln|x|+x+C$

לכן $y+1=\pm\left(|x|e^xe^C\right)=Cxe^x$ (כאשר הפכנו את $\pm|x|e^C$ לצורה Cx עבור קבוע כללי כלשהו).

נציב $x=1$ ולכן לפי הנתון $1=Ce$ ולכן $C=\frac{1}{e}$.

סה"כ נקבל את הפתרון הסופי $y=xe^{x-1}-1$.

5. מצאו פתרון למד"ר $y''+y=e^x$ המקיים $y(0)=0, y'(0)=0$.

ישנן מספר דרכים לפתור את השאלה הזו, אנו נשתמש בהתמרת לפלס בפתרון זה.

נבצע את ההתמרה:

$$s^2F(s)-sy(0)-y'(0)+F(s)=\frac{1}{s-1}$$

לכן יחד עם תנאי ההתחלה נקבל כי $F(s)=\dfrac{1}{\left(1+s^2\right)\left(s-1\right)}$

נבצע פירוק לשברים חלקיים ונקבל

$$F(s)=\frac{1}{\left(1+s^2\right)\left(s-1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}\right)$$

נבצע התמרה הפוכה ונקבל את הפתרון

$$y=\frac{1}{2}\left(e^x-\cos(x)-\sin(x)\right)$$