

מבנים אלגבריים

תרגיל בית $5\frac{1}{2}$

9 בדצמבר 2012

1. יהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם של חבורות. הראו כי $\varphi : G \rightarrow \text{Im}H$ הוא על.
2. יהי $\phi : G \rightarrow H$ איזומורפיזם של חבורות. הוכח: $\phi^{-1} : H \rightarrow G$ הוא איזומורפיזם של חבורות.
3. מיינו את כל החבורות שהסדר שלהן קטן מ-5, עד כדי איזומורפיזם.
4. יהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם של חבורות.
 - (א) הראו כי לכל $g \in G$, הסדר של $\varphi(g)$ מחלק את הסדר של g .
 - (ב) נניח כי φ איזומורפיזם. הראו כי $o(g) = o(\varphi(g))$.
5. האם קיים הומומורפיזם לא-טריוויאלי (שונה ממהומומורפיזה ששולח את כולם ליחידה) $\phi : \mathbb{Z}_{30} \rightarrow \mathbb{Z}_{11}$?
6. יהי $\phi : G \rightarrow H$ איזומורפיזם של חבורות. לכל ת"ח $N \leq G$ נסמן $\phi(N) := \{\phi(n) : n \in N\}$. הוכח: N נורמלית ב G , אם ורק אם $\phi(N)$ נורמלית ב H .
7. ענו על השאלות הבאות:
 - (א) האם $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ציקלית?
 - (ב) האם $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ציקלית?
 - (ג) האם $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ ציקלית?
8. יהיו m, n מספרים זרים. הראו כי $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ציקלית, ואיזומורפית ל- \mathbb{Z}_{mn} .
9. תהי C_n חבורה ציקלית מסדר n . (הוכחנו בתרגיל שכולן איזומורפיות ל \mathbb{Z}_n).
 - (א) הראו: לכל $n \mid m$, קיימת תת-חבורה יחידה מסדר m .
 - (ב) מה הם היוצרים של C_n ? כמה יוצרים שונים יש?
10. מצאו אילו מהחבורות הבאות איזומורפיות זו לזו: $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.
11. נביט בחבורת הסימטריה S_n .
 - (א) יהי τ מחזור מאורך k , ויהי σ חילוף. הראו כי $\sigma\tau\sigma$ הוא מחזור מאורך k .

(ב) תהי μ תמורה. הראו כי $\mu\tau\mu^{-1}$ מחזור מאורך k . רמז: כל תמורה ניתנת לרישום כמכפלה של חילופים.

(ג) הראו כי מתקיים

$$\mu(a_1 \dots a_k)\mu^{-1} = (\mu(a_1) \dots \mu(a_k))$$

(ד) הראו שחבורת קיילי, $K_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ היא תת-חבורה נורמלית של S_4 .

12. תהי G חבורה, ותהי $X \subseteq G$ תת-קבוצה. נתנו שתי הגדרות לתת-החבורה הנוצרת על ידי X . הגדרנו כי $\langle X \rangle$ היא חבורת כל המכפלות הסופיות (חיוביות או שליליות) של איברי X . בנוסף הגדרנו את $\langle X \rangle$ כחיתוך של כל התת-חבורות $H \leq G$ אשר מכילות את X . הראו כי ההגדרה הראשונה גוררת את השנייה.

13. תהי G חבורה, ותהי $X \subseteq G$ תת-קבוצה. נגדיר התת-חבורה הנורמלית של G הנוצרת על ידי X באופן הבא: זהו חיתוך כל התת-חבורות הנורמליות של G המכילות את X . בנוסחא נרשום זאת

$$H = \bigcap_{X \subseteq N \trianglelefteq G} N$$

(א) הראו כי H היא תת-חבורה נורמלית של G .

(ב) הוכיחו כי H היא התת-חבורה הנוצרת על ידי $\{gxg^{-1} : g \in G, x \in X\}$.