

תרגיל 4 באינפי 2 - מתמטיקאים

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות עבור פונקציה f המוגדרת בקטע $[a, b]$:

1. אם $f(x) \geq 0$ ו $\int_a^b f(x)dx = 0$ אז $f = 0$.

2. אם f רציפה, $f(x) \geq 0$ ו $\int_a^b f(x)dx = 0$ אז $f = 0$.

3. אם f רציפה כך שלכל פונקציה רציפה $g(x)$ המוגדרת בקטע $[a, b]$ מתקיים

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

אז $f = 0$.

שאלה 2

הוכיחו את אי השוויון:

$$\frac{4}{9}(e-1) \leq \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)} dx \leq \frac{1}{2}(e-1)$$

שאלה 3

חשבו את גבולות הסדרות הבאות:

1.

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k^2}{n^2}}$$

2.

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

.3

$$c_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \sin \frac{k}{2^n}$$

שאלה 4

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}{x^6}$$

שאלה 5

סעיף א

הוכיחו כי הפונקציה

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

היא מכפלה פנימית (מעל \mathbb{R} כמובן) של מרחב הפונקציות הרציפות על $[a, b]$

סעיף ב

הוכיחו כי אם $a = -\pi$ ו $b = \pi$ אז $\int_a^b \sin mx \sin nx dx = 0$ (עבור $m \neq n$ שלמים).

שאלה 6

סעיף א

נסתכל על התחום החסום על ידי

$$y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad y = \sqrt{\cos x}$$

חשבו את נפח הגוף הנוצר מסיבוב התחום הזה סביב ציר x

סעיף ב

נסתכל על התחום החסום על ידי

$$x = y^2, \quad y = x^2$$

חשבו את נפח הגוף הנוצר מסיבוב תחום זה סביב ציר y .