תרגיל מספר 9 מבנים אלגבריים

להגשה עד 16.1.2015

1. יהא R חוג. הוכח את הבאים:

(א) לכל $a \in R$ מתקיים $-(-a) = a$

(ב) לכל $a, b \in R$ מתקיים $-(a+b) = -a-b$

(ג) לכל $a, b \in R$ מתקיים $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

(ד) לכל $a, b \in R$ מתקיים $(-a)(-b) = ab$

(ה) לכל $a \in R$ מתקיים $(-a)^2 = a^2$

2. יהיו R_1, R_2 שני חוגים. נגדיר את חוג המכפלה להיות הקבוצה $R_1 \times R_2$ עם חיבור וכפל רכיב רכיב כלומר

$$\forall (a,b), (x,y) \in R_1 \times R_2 : \, (a,b) + (x,y) = (a+x, b+y)$$

$$\forall (a,b), (x,y) \in R_1 \times R_2 : \, (a,b)(x,y) = (ax, by)$$

כאשר $a+x$ זהו חיבור של R_1, $b+y$ זהו חיבור של R_2. באופן דומה הכפלים המצוינים בשאלה מתייחסים לכפלים של R_1, R_2 לפי ההקשר. הוכח כי זהו אכן חוג.

3. הוכיחו כי הבאים הם חוגים. קבעו האם אלו חוגים חילופיים, האם אלו חוגים עם יחידה והאם חוגים אלו עם חילוק.

(א) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים השלמים)

(ב) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים השלמים)

(ג) הקבוצה $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.