עומרי גוטליב
ורועי עמרני

משוואות דיפרנציאליות רגילות

הפרדת משתנים

מד"ר מהצורה:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

היא מד"ר הניתנת להפרדת משתנים.

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$$

אם קיים y_0 כך ש-$N_1(y_0) = 0$, נקבל כי $y = y_0$ הוא פתרון של המשוואה.

אם קיים x_0 כך ש-$N_2(x_0) = 0$ אז $x = x_0$ הוא פתרון של המשוואה.

(לבדוק אם לא חילקנו באפס, ואם חילקנו, לבדוק אם מה שחילקנו בו הוא פתרון).

הערה

כל משוואה דיפרנציאלית מהצורה $y' = f(ax + by)$ ניתן לפתור ע"י הצבה:

$$z = ax + by$$

ולקבל פונקציה הניתנת לפתרון בעזרת הפרדת משתנים.

מד"ר הומוגנית

הגדרה – פונקציה הומוגנית

פונקציה $f(x, y)$ נקראית הומוגנית מסדר k אם לכל $\lambda > 0$ מתקיים השוויון:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

משפט

פונקציה $f(x, y)$ ניתנת לכתיבה בצורה $f(x, y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ אמ"מ הפונקציה $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 0 - כלומר, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

הגדרה – מד"ר הומוגנית

אם ניתן לכתוב את המד"ר $y' = f(x, y)$ בצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$,

אז היא נקראת מד"ר הומוגנית.

מד"ר הומוגנית ניתנת לפתרון ע"י הצבה $z = \frac{y}{x}$.

פתרון משוואה דיפרנציאלית מהצורה $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$

מקרה 1

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$, ז"א, למערכת המשוואות:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד.

נבחר α, β שמקיימים את המשוואות.

נציב $y = q + \beta$, ו-$x = p + \alpha$,

ואז נקבל ש-p היא פונקציה של x ו-q היא פונקציה של y.

לאחר הצבה ופישוט נקבל מערכת מהצורה:

$$q' = f\left(\frac{a_1p + b_1q}{ap + bq}\right)$$

נציב בה $z = \frac{q}{p}$ ונקבל לאחר פישוט:

$$z + z'p = f\left(\frac{a_1 + b_1z}{a + bz}\right)$$

את המשוואה הנ"ל אפשר לפתור בעזרת הפרדת משתנים:

$$\frac{dz}{dp}p = f\left(\frac{a_1 + b_1z}{a + bz}\right) - z$$

זוכרים לחזור חזרה ל-x ו-y!

מקרה 2

שימו לב:

אם $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$, אז קיים λ כך ש-$\lambda(a_1, b_1) = (a, b)$.

דוגמה

$$y' = \frac{2x + 4y + 6}{x + 2y - 3}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, ז"א, עבור $\lambda = 2$ מתקיים:

$$\lambda(1,2) = (2,4)$$

$$y' = \frac{2(x + 2y) + 6}{x + 2y - 3}$$

נציב $z = x + 2y$ ונקבל מד"ר שאנו יודעים לפתור.

מערכת לא הומוגנית

משפט

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה + פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית:

הוא פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית.

וריאציית מקדמים

השיטה הקלאסית

נפתור את המערכת ההומוגנית המתאימה.

נקבל בסיס של פתרונות $\{y_1, \dots, y_n\}$. נניח שהפתרון הוא מהצורה:

$$c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

נציב את הפתרון הנ"ל במד"ר, ונקבל את הפונקציות $c_1(x), \dots, c_n(x)$. לאחר שקיבלנו אותם, אנו יודעים ש- $c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$ הוא פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית.

לכן מצאנו גם את הפתרון הכללי של ההומוגנית, וגם פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית. הסכום שלהם יהיה הפתרון הכללי שלנו (משפט בתחילת העמוד).

מקרה פרטי – מד"ר מסדר ראשון

בהינתן מד"ר מסדר ראשון מהצורה:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

קיבלנו מהפרדת משתנים ש- $ce^{-\int p(x)dx}$ הוא הפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

נשתמש בשיטה הנ"ל למצוא פתרון פרטי ונקבל:

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx$$

ולכן הפתרון הפרטי של הלא הומוגני:

$$y_p = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

וסה"כ הפתרון:

$$y = y_h + y_p = ce^{-\int p(x)dx} + \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

השיטה המתוחכמת

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y = b(x)$$

אז בשביל למצוא את המקדמים $c_1, \dots, c_n$ של הפתרון הפרטי:

$$c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$W(x)\cdot\begin{pmatrix}c_1'(x)\\ c_2'(x)\\ \vdots\\ c_n'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b(x)\end{pmatrix}$$

כאשר:

$$W(x)\coloneqq\begin{pmatrix}y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x)\\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}$$

(זהו הוורונסקיאן בלי הדטרמיננטה).

דרך מתוחכמת לפתרון השיטה המתוחכמת – כלל קרמר
את מערכת המשוואות הנתונה ניתן לפתור באמצעות כלל קרמר.

$$c_i'(x)=\frac{|A_i(x)|}{|W(x)|}$$

כאשר $A_i(x)$ היא מטריצה המתקבלת מהוורונסקיאן ($W(x)$), לאחר החלפת העמודה ה-i של $W(x)$ עם וקטור הפתרון. במקרה זה, החלפת העמודה ה-i עם הווקטור:

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b(x)\end{pmatrix}$$

משוואת ברנולי

משוואת ברנולי היא משוואה מהצורה:

$$y' + p(x)y = g(x) \cdot y^n, \qquad n \neq 0,1$$

בשביל לפתור, נציב:

$$z = y^{1-n} \Rightarrow z' = y^{-n}y'(1-n)$$

מציבים במד"ר:

$$z' + p(x) \cdot z \cdot (1-n) = g(x)(1-n)$$

קיבלנו משוואה לינארית לא הומוגנית שיודעים לפתור.

מסקנה

אם $n = 2$ נקבל פתרון מהצורה:

$$y = \frac{1}{c \cdot a(x) + b(x)}$$

(משתמשים בפתרון הכללי למד"ר מסדר ראשון).

משוואת ריקטי

משוואה מהצורה:

$$y' + f(x)y^2 + g(x)y + h(x) = 0$$

פתרון של משוואת ריקטי הוא מהצורה:

$$y = \frac{c \cdot a(x) + b(x)}{c \cdot A(x) + B(x)}$$

לכל ביטוי מהצורה הנ"ל קיימת משוואת ריקטי:

בהינתן ביטוי מהצורה $y = \frac{c \cdot a(x) + b(x)}{c \cdot A(x) + B(x)}$, הוא פתרון למשוואת ריקטי:

$$y' + \frac{y^2(A'B - B'A)}{Ab - aB} + y \cdot \frac{a'B - A'B - Ab' - aB'}{bA - aB} + \frac{ab' - a'b}{bA - aB} = 0$$

ובכיוון השני נציב $y = y_p + z$ במשוואת ריקטי, ונשתמש במסקנה של פתרון של מד"ר מסדר ראשון, ונקבל את הדרוש.

משפטים על מערכת מסדר גבוה

משפט קיום ויחידות

תהי בעיית קושי בצורה נורמלית:

$$y^{(n)} = f\left(x, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

$$y(x_0) = a_0$$

$$y'(x_0) = a_1$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$$

(כל אלו התנאים של בעיית קושי).

כאשר:

f רציפה בסביבה של הנקודה $(x_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ ומקיימת תנאי ליפשיץ ביחס ל-$\left(y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ ב-$\mathbb{R}^n$. ז"א, לכל x קבוע, מתקיים:

$$f(x, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) - f(x, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \le L \| b_0 - c_0, b_1 - c_1, \dots, b_{n-1} - c_{n-1} \|$$

(הנורמה היא הסכום של כל האיברים בריבוע).

אזי קיים פתרון יחיד למשוואה.

הגדרה – משוואה לינארית הומוגנית

ניקח משוואה לינארית כללית מסדר n:

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y + b(x)$$

במשוואה זו $b(x) = 0 \Leftrightarrow$ המשוואה נקראית לינארית הומוגנית ($y(x) = 0$ פותר).

משפטונים/למות

(1) המשוואות של משוואה לינארית הומוגנית מסדר n מהווים מרחב וקטורי n מימדי.
(2) הפתרון הכללי למשוואה לינארית אי-הומוגנית היא מהצורה $y = y_h + y_p$ כאשר y_h הוא כל הפתרונות למשוואה ההומוגנית, ו-y_p הוא פתרון פרטי כלשהו למשוואה האי-הומוגנית.

הגדרה – תלות לינארית של פונקציות

תלות לינארית של $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ אמ"מ קיימים $c_1, \dots, c_n$ (לא כולם אפסים) כך שמתקיים:

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \equiv 0$ לכל x בתחום.

הוורונסקיאן

הגדרה

בהינתן משוואה לינארית הומוגנית מסדר n וקבוצת פתרונות $\{y_1, \dots, y_n\}$. ניצור את הדטרמיננטה:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

למה

אם $\{y_1, \dots, y_n\}$ תלויים לינארית.

לכן העמודות תלויות לינארית בכל x בתחום.

לכן מתקיים:

$$W(x) = 0$$

משפט

אם $W(x_0) = 0$ בנקודה אחת, אזי $W(x) = 0$ בכל התחום.

משפט (אבל)

בהינתן מד"ר הומוגנית מהצורה:

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

אזי:

$$\frac{dW}{dx} = W'(x) = a_{n-1}(x) \cdot W(x)$$

ומכאן נובע:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)dt}$$

נוסחת אבל לפתרון מד"ר מסדר שני

בהינתן מד"ר מהצורה:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

אם y_1 פתרון של המשוואה, אז הפתרון השני הוא:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int_{-x}^{x} a_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$

פתרון ע"י הורדת סדר המשוואה

אפשרות 1

$$y^{(n)} = f(x)$$

פתרון

עושים אינטגרל n פעמים.

אפשרות 2

$$y'' = f(x, y')$$

(y לא מופיע).

פתרון

מסמנים $z = y'$ ומקבלים $z' = f(x, z)$

אפשרות 3

$$y'' = f(y, y')$$

(x לא מופיע).

פתרון

x לא מופיע.

נציב $p = y'$.

$$y'' = \frac{dp}{dx} \underset{\text{כלל השרשרת}}{=} \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

דוגמה

$$y \cdot y'' - 2(y')^2 = 0$$

נציב $p = y'$ ונקבל:

$$y'' = p'_y \cdot p$$

נגזרת לפי y.

$$y \cdot p'_y \cdot p - 2p^2 = 0$$

נחלק ב-p, ונשים לב כי גם $p = y' = 0$ פתרון, לכן $y = c$ פתרון. נקבל:

$$yp'_y - 2p = 0$$

$$y\frac{dp}{dy} = 2p$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dp}{2p}$$

משוואת לגרנז'

משוואה מהצורה:

$$y=\phi(y')x+\psi(y')$$

כאשר $\phi(y')\neq y'$.

נציב $y'=p$, ונקבל:

$$y=\phi(p)\cdot x+\psi(p)$$

$$y'=\phi(p)+\frac{d\phi}{dp}x\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{d\psi}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}$$

(זה נובע מכלל השרשרת).

$$p=\phi(p)+\frac{dp}{dx}\left(\frac{d\phi}{dp}x+\frac{d\psi}{dp}\right)$$

"נחלק" ב-$\frac{dp}{dx}$:

$$\frac{dx}{dp}\cdot p=\frac{dx}{dp}\cdot\phi(p)+\left[\frac{d\phi}{dp}x+\frac{d\psi}{dp}\right]$$

$\frac{dx}{dp}$ זה נגזרת של x לפי p. רושמים את x לפי p וגוזרים לפי p.

לדוגמה, $p\cdot\frac{dx}{dp}$, כאשר $x=p^3$, מתקבל ש-$\frac{dx}{dp}=3p^2$, ומכאן ש- $p\cdot\frac{dx}{dp}=3p^2\cdot p=3p^3$.

$$\frac{dx}{dp}\big(p-\phi(p)\big)=x\phi'_p(p)+\psi'_p(p)$$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{x\phi'_p(p)+\psi'_p(p)}{p-\phi(p)}$$

$$x'_p-\frac{\phi'_p(p)}{p-\phi(p)}x=\frac{\psi'_p(p)}{p-\phi(p)}$$

קיבלנו משוואה לינארית לא הומוגנית מסדר ראשון שאנו יודעים לפתור.

דוגמה

$$y=x\cdot(y')^2+(y')^2$$

נציב $y'=p$, ונקבל:

$$y=xp^2+p^2$$

נגזור לפי x:

$$p=p^2+2p\cdot p'x+2p\cdot p'$$

$2p=\frac{d\phi}{dp}$, ו-$p'=\frac{dp}{dx}$.

$$p=p^2+(2px+2p)p'$$

אנו רוצים לחלק ב-p.

$y=0$ הוא פתרון, אך לכל $c\neq0$ מתקיים כי $y=c$ לא פתרון. לכן $y=0$ פתרון. נחלק:

$$1-p=(2x+2)p'$$

בתרגיל הזה, אפשר להשתמש בהפרדת משתנים. נראה מה עושים באופן כללי:

נחלק ב-p'. נבדוק בסוף אם $p'=0$ פתרון.

$$\frac{1-p}{p'}=2x+2$$

$$\frac{1}{p'}(1-p)=2x+2$$

$$x'(1-p)=2x+2$$

$\frac{1}{p'}=x'$ ממשפט מאינפי. p נגזר לפי x ו-x נגזר לפי p.

$$x'=\frac{2}{1-p}x+\frac{2}{1-p}$$

וזאת כבר משוואה לינארית מסדר ראשון שאנו יודעים לפתור. מקבלים:

$$x=\frac{c}{(p-1)^2}-1$$

אחרי שמבודדים את p מהמשוואה הנ"ל, נקבל את y'. נעשה אינטגרל ונקבל:

$$y=p^2(x+1)=\frac{cp^2}{(p-1)^2}$$

לכן התשובה הסופית:

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{(p-1)^2}-1 \\ y=p^2(x+1)=\dfrac{cp^2}{(p-1)^2} \end{cases}$$

שיטת האיטרציות העוקבות

בהינתן מד"ר מהצורה:

$$y'(x) = f(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

ניקח פונקציה רציפה כלשהי $y_0(x)$, ונגדיר את סדרת הפונקציות:

$$y_{n+1}(x) \coloneqq y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y_n(x)\big)\,dx$$

הסדרה הנ"ל מתכנסת במ"ש בסביבת הנקודה x_0, ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$$

מערכת משוואות לינארית דיפרנציאליות

צורה כללית של מערכת לינארית של מד"ר:

$$\vec{x}'(t) = p(t)\vec{x}(t) + q(t)$$

סימון הפתרונות

כאשר אנו מטפלים בעת ובעונה אחת ביותר מפתרון אחד, נמספר את וקטורי הפתרון בווקטורים הרשומים מעליהם באופן הבא:

$$\vec{x}^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(i)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(i)}(t) \end{pmatrix}$$

הפתרונות הם מרחב וקטורי

אוסף כל הפתרונות שלה המערכת ההומוגנית מהווה מרחב וקטורי.

הגדרה – תלות לינארית

קבוצת m פונקציות וקטוריות:

$$\vec{v}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} v_1^{(1)}(t) \\ \vdots \\ v_n^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} v_1^{(2)}(t) \\ \vdots \\ v_n^{(2)}(t) \end{pmatrix}, \dots, \vec{v}^{(m)}(t) = \begin{pmatrix} v_1^{(m)}(t) \\ \vdots \\ v_n^{(m)}(t) \end{pmatrix}$$

נקראת תלויה לינאריות בקטע $[a,b]$ אם קיימים m קבועים:

$$c_1, c_2, \dots, c_m$$

שלא כולם 0, כך ש-

$$c_1\vec{v}^{(1)}(t) + c_2\vec{v}^{(2)}(t) + \cdots + c_m\vec{v}^{(m)}(t) = \vec{0}$$

לכל ערכי t בקטע $[a,b]$.

<u>הגדרה – הוורונסקיאן למערכת</u>

כל פונקציות וקטוריות $\vec{x}^{(1)}(t), \dots, \vec{x}^{(n)}(t)$,

הדטרמיננטה של המטריצה $n\ x\ n$ המורכבת מעמודותיהן נקראות הוורונסקיאן של:

$$\vec{x}^{(1)}(t), \dots, \vec{x}^{(n)}(t)$$

ומסומן ב-

$$W(t) = \left(\vec{x}^{(1)}(t), \dots, \vec{x}^{(n)}(t)\right)$$

שימו לב: הוא מוגדר שונה למערכת ולמד"ר מסדר גבוה!

<u>משפט</u>

אם n פונקציות ווקטוריות $\vec{x}^{(1)}(t), \dots, \vec{x}^{(m)}(t)$ תלויות לינאריות בקטע $[a, b]$,

אזי הוורונסיקאן שלהן מתאפס זהותית בכל הקטע $[a, b]$. ז"א:

לכל $a \le t \le b$ מתקיים $W(t) \equiv 0$.

בכיוון ההפוך, אם המערכת ההמוגונית $\vec{x}' = p(t)\vec{x}$ מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בקטע $[a, b]$ ו-n פתרונותיה $\vec{x}^{(1)}(t), \dots, \vec{x}^{(n)}(t)$ מקיימים $W(t_0) = 0$ עבור נקודה אחת t_0 בקטע,

אז פתרונות אלה תלויים לינארית בקטע זה.

<u>מסקנה</u>

אם המערכת ההומוגנית מקיימת את משפט הקיום והיחידות ב-$[a, b]$ והורונסקיאן $W(t)$ מתאפס בנקודה אחת t_0 של $[a, b]$,

אז הוא מתאפס זהותית בכל בקטע $[a, b]$.

<u>משפט</u>

נתונה המערכת ההומוגנית המקיימת את משפט הקיום והיחידות בקטע $[a, b]$,

ולה n פתרונות וקטורים $\vec{x}^{(1)}(t), \dots, \vec{x}^{(n)}(t)$.

אם $W(t_0) \neq 0$ בנקודה אחת כלשהי t_0 ב-$[a, b]$,

אז $\vec{x}^{(1)}(t), \dots, \vec{x}^{(n)}(t)$ פורשים את מרחב הפתרונות של המערכת.

<u>מסקנה</u>

אם מערכת הומוגנית $\vec{x}' = p(t)\vec{x}$ מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות אז ניתן לקבל n פתרונות בת"ל למערכת.

נוסחת אבל Abel למערכת

נתונה מערכת משוואות דיפרנציאליות, לינאריות, הומוגניות המקיימות את תנאי משפט הקיום והיחידות.

$$\vec{x}'(t) = p(t)\vec{x}(t)$$

נתונה נקודה t_0 בקטע.

אם $\vec{x}^{(1)}(t), \vec{x}^{(2)}(t), \dots, \vec{x}^{(n)}(t)$ הם n פתרונות כלשהם של המערכת, אז:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trace(p(x))dx}$$

מערכת משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים

מערכת המשוואות היא מערכת מהצורה:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

כך ש-A היא מטריצה קבועה, ולא של פונקציות!

משפט

למערכת דיפרנציאלית עם מקדמים קבועים יש בסיס של n פתרונות מהצורה:

$$\overrightarrow{v_1}e^{\lambda_1 t}, \dots, \overrightarrow{v_n}e^{\lambda_n t}$$

אם ורק אם:

למטריצת המקדמים A יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$.

אם המשפט מתקיים, אז הפתרונות הם $\overrightarrow{v_1}e^{\lambda_1 t}, \dots, \overrightarrow{v_n}e^{\lambda_n t}$ כך ש-$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ע"ע, ו-$v_1, \dots, v_n$ הם ו"ע שמתאימים להם (יכולות להיות כפילויות).

A לכסינה עם ע"ע ממשיים

המשפט הנ"ל מתקיים,

אז הפתרונות הם $\overrightarrow{v_1}e^{\lambda_1 t}, \dots, \overrightarrow{v_n}e^{\lambda_n t}$ כך ש-$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ע"ע, ו-$v_1, \dots, v_n$ הם ו"ע שמתאימים להם (יכולות להיות כפילויות).

יש ערכים עצמיים לא ממשיים

אם למטריצה A יש ערך עצמי מרוכב λ, ומתאים לו וקטור עצמי מרוכב v.

נקבל כי גם $\bar{\lambda}$ הוא ערך עצמי, ו-$\bar{\vec{v}}$ הוא וקטור עצמי שמתאים לו.

דוגמה

נניח שקיבלנו ע"ע $5 + 6i$ שמתאים לו ו"ע $\begin{pmatrix} 2 \\ -3i \end{pmatrix}$.

הפתרון הכללי הוא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3i \end{pmatrix} e^{5+6i} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3i \end{pmatrix} e^{5t}(\cos 6t + i \sin 6t)$$

מנוסחת אויילר, $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$.

נכפיל ונפריד:

$$= \begin{pmatrix} 2e^{5t}\cos 6t \\ -3e^{5t}\sin 6t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2e^{5t}\sin 6t \\ -3e^{5t}\cos 6t \end{pmatrix}$$

ונקבל בסיס לפתרונות:

$$\left\{\begin{pmatrix} 2e^{5t}\cos 6t \\ -3e^{5t}\sin 6t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^{5t}\sin 6t \\ -3e^{5t}\cos 6t \end{pmatrix}\right\}$$

מערכות להן אין בסיס של וקטורים עצמיים

המטרה היא לפתור מערכת מהצורה:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

כך של-A אין בסיס של וקטורים עצמיים.

מטריצת ז'ורדן

בהינתן מטריצה מז'רדנת T, כך שמתקיים $T^{-1}AT = J$, נפעל באופן הבא:

נציב:

$$\vec{x}(t) = T\vec{y}(t)$$

ונקבל:

$$T \cdot \vec{y}'(t) = AT\vec{y}(t)$$

$$\vec{y}'(t) = T^{-1}AT\vec{y}(t) = J\vec{y}(t)$$

וזאת מערכת שקל לפתור (דומה לחילוץ לאחור).

לא נשכח לחזור ולמצוא את $\vec{x}(t)$.

מציאת מטריצה מז'רדנת

בהינתן ו"ע $\vec{v}$ שמתאים לע"ע λ,

נמצא וקטור $\vec{u}$ שמקיים את המשוואה:

$$(\lambda I - A)\vec{u} = \vec{v}$$

המטריצה המז'רדנת תהיה:

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \cdots & (\lambda I - A)^2\vec{u} & (\lambda I - A)\vec{u} & \vec{u} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

פתרון בלי שימוש במטריצה המז'רדנת

נשתמש בעובדה שהפתרון הוא מהצורה:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \overrightarrow{u_1}e^{\lambda t}$$

$$x_2^{(2)}(t)=(t\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2})e^{\lambda t}$$

$$\vdots$$

$$x^{(l)}(t)=\left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\overrightarrow{u_1}+\cdots+\overrightarrow{u_l}\right)e^{\lambda t}$$

במקרה זה, $\overrightarrow{u_1}$ הוא ו"ע שמתאים לע"ע λ.

בשביל למצוא את $\overrightarrow{u_2}$ ואילך, נציב במשוואה וקטור כללי מהצורה הידועה ונמצא את וקטורי המקדמים החסרים ($\overrightarrow{u_2}$ ואילך).

מערכת לא הומוגנית

משפט ווריאציית המקדמים

למערכת דיפרנציאלית לינארית אי הומוגנית עם **מקדמים קבועים**:

$$\vec{x}'=A\vec{x}+\vec{b}(t)$$

כאשר הרכיבים של $\vec{b}(t)$ רציפים בקטע פתוח I,

יש בקטע זה פתרון שהצגתו $x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i(t)x_i(t)$, כאשר $x_1(t),\dots,x_n(t)$ בסיס לקבוצת הפתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה.

חישוב המקדמים

$c_1(t),\dots,c_n(t)$ הן n פונקציות המתקבלות באמצעות פתרון משוואות אלגבריות.

על מנת לחשב את המקדמים, נציב במשוואה ונקבל שאפשר לפתור את המשוואה הבאה:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(t)\vec{x}^{(i)}(t)=\vec{b}(t)$$

פתרון מערכת הומוגנית עם מקדמים קבועים באמצעות אקספוננט של מטריצה

הגדרה – אקספוננט של מטריצה

נגדיר e^A באופן הבא:

$$e^A:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

חישוב e^A

מקרה 1 – מטריצה אלכסונית

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

אז:

$$e^A=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2}\end{pmatrix}$$

מקרה 2 – מטריצה לכסינה
אם A מטריצה לכסינה, אז קיימת מטריה הפיכה P כך ש-

$$A = PDP^{-1}$$

לכן:

$$e^A = P\begin{pmatrix} e_1^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}P^{-1}$$

מקרה 3 – מטריצה לא לכסינה
עבור מטריצת ג'ורדן J עם ע"ע λ:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & e^{\lambda} \\ 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix}$$

ועבור A מטריצה לא לכסינה שניתנת לז'רדון, אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש:

$$A = PJP^{-1}$$

$$e^A = Pe^JP^{-1}$$

איך נשתמש ב-e^A כדי לפתור משוואות?
עבור מערכת מהצורה:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

הפתרון הכללי הוא מהצורה:

$$\vec{x}(t) = e^{At}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

פתרון משוואה דיפרנציאלית מסדר שני עם מקדמים לא קבועים

משפט

נתון כי שתי פונקציות $P(x), Q(x)$ ניתנות לפיתוח לטורי חזקות סביב נקודה x_0 בקטעים:

$$|x-x_0| < R_1, \qquad |x-x_0| < R_2$$

בהתאמה.

אז לבעיית ההתחלה:

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$
$$y(x_0) = \alpha, \qquad y'(x_0) = \beta$$

יש פתרון, הוא יחיד, הוא מהצורה:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

וזה מתקיים לכל הפחות בקטע:

$$|x-x_0| < R \coloneqq \min\{R_1, R_2\}$$

הנקודה x_0 שסביבה ניתן לפתח את מקדמי המשוואה לטורי חזקות נקראת **נקודה רגולית**.

הגדרה – נקודה סינגולרית

נתונה המשוואה:

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$

אם לפחות אחת משתי הפונקציות $P(x), Q(x)$ אינה ניתנת להיכתב כטור חזקות סביב $x = x_0$, אז x_0 נראית נקודה סינגולרית.

נקודה סינגולרית-רגולרית

הגדרה

$x = x_0$ נקראת נקודה סינגולרית-רגולרית עבור המשוואה:

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$

אם $x = x_0$ נקודה סינגולרית, אבל המקדמים ניתנים להיכתב כ- $P(x) = \frac{p(x)}{x-x_0}, Q(x) = \frac{q(x)}{(x-x_0)^2}$,

כאשר שתי הפונצקיות $p(x), q(x)$ ניתנת לפיתוח לטור טיילור סביב x_0 ברדיוסים מסוימים.

פתרון המשוואה במקרה של נקודה כזו

סביב נקודה סינגולרית-רגולרית ניתן לקבל פתרון של המשוואה מהצורה:

$$y = (x-x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^{k+r}$$

עבור המקרה $x_0=0$, הפתרון הוא מהצורה:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}$$

מציאת r
נסמן:

p_0 הוא האיבר הראשון בפיתוח טיילור של $p(x)$, q_0 הוא האיבר הראשון בפיתוח טיילור של $q(x)$.

נתבונן בפתרון שעבורו $a_0\neq 0$, ונפתור את המשוואה:

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0$$

(ז"א, שאם יצא לנו בחישוב המקדמים ש-$a_0=0$, זו סתירה – זה לא בטוח פתרון. לא יודעים איך לפתור את המשוואה במקרה הזה)

מקרים של r_1,r_2
מקרה 1 - $r_1=r_2$
הפתרון הנוסף הוא מהצורה:

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\ln(x)+x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

מקרה 2 - $r_1\neq r_2$
נניח בלי הגבלת הכלליות כי $r_1>r_2$.

r_1-r_2 **טבעי**
או שנקבל ישירות שני פתרונות בת"ל,

או שנקבל שני טורים זהים שמתחילים ממקומות זהים, ונצטרך למצוא פתרון נוסף, שגם הוא מהצורה:

$$y_2(x)=ay_1(x)\cdot\ln(x)+x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

כך ש-a קבוע שיכול להיות 0.

r_1-r_2 **לא טבעי**
נקבל שני פתרונות בת"ל, וסיימנו ☺.

משוואת בסל

המשוואה הדיפנרציאלית:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

נקראת משוואת בסל מסדר α כאשר $\alpha \geq 0$.

הפתרון הראשון

מציבים טור חזקות, והפתרון של משוואת בסל מסדר α המתקבל:

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \prod_{n=0}^{k}(n+\alpha)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

מכונה פונקציית בסל מסדר α.

הפתרון השני

מקרה 1

$r_1 - r_2 = 2\alpha$ אינו מספר שלם (אז α לא שלם), וגם $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

ניתן לקבל במקרה זה, באופן דומה:

$$J_{-\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \prod_{n=1}^{k}(n-\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}$$

פתרון זה מתקבל בעזרת נוסחת הנסיגה:

$$a_n n(n-2\alpha) + a_{n-2} = 0$$

מקרה 2

כאשר $\alpha = 0$ נקבל $r_1 = r_2 = 0$.

הפתרון הראשון:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

פתרון שני:

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

מקרה 3

$r_1 - r_2 = 2\alpha$ כאשר 2α מספר טבעי.

אפשרות 1

כדי לקבל את הפתרון השני, יש להשתמש בפתרון מהצורה:

$$y_2(x) = aJ_\alpha(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\alpha}$$

אפשרות 2

$$\alpha = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$$

במקרה ש-$\alpha = \frac{1}{2}$ נקבל את הפתרונות:

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \qquad y_2(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

בשאר המקרים, נקבל (קל עם הסתכלות על הטור חזקות):

$$y_1(x) = x^{\alpha-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \qquad y_2(x) = x^{\alpha-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

משוואת לז'נדר

המשוואה:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

הפתרון

$$a_{n+2} = \frac{(n+\alpha+1)(n-\alpha)}{(n+2)(n+1)} a_n$$

מקרה 1

α לא שלם, ואז נקבל שני טורים בלתי תלויים.

אחד עבור החזקות הזוגיות ואחד עבור החזקות האי זוגיות.

מקרה 2

α שלם:

אפשרות 1

α זוגי.

נקבל שפתרון אחד הוא פולינום עם חזקות זוגיות מסדר α, ופתרון שני טור אינסופי עם חזקות אי זוגיות.

אפשרות 2

α אי זוגי.

נקבל שפתרון אחד הוא פולינום עם חזקות אי זוגיות מסדר α,

ופתרון שני טור אינסופי עם חזקות זוגיות.

פולינומים אלה מכונים הפולינומים של לז'נדר.

התמרת לפלס

הגדרה – התמרת לפלס

תהי נתונה פונקציה $f(t)$, המוגדרת עבור $0 \le t < \infty$.

התמרת לפלס של $f(t)$, שתסומן $F(s)$ או $L\big(f(t)\big)$ היא הפונקציה:

$$F(s) = L\big(f(t)\big) \coloneqq \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

משפט

אם $f(t)$ רציפה למקוטעין, ומתקיים:

$$|f(t)| \le Me^{ct}$$

עבור M כלשהו לכל $0 \le t < \infty$,

אז התמרת לפלס $F(s) = L\big(f(t)\big)$ קיימת לכל $s > c$.

הגדרה

פונקציית הביסייד $u_c(t)$ מוגדרת להיות:

$$u_c(t) \coloneqq \begin{cases} 0, & 0 \le t \le c \\ 1, & t > c \end{cases}$$

משוואות דיפרנציאליות רגילות

עומרי גוטליב
ורועי עמרני

נוסחאון

$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(s) \coloneqq L\big(f(t)\big)}$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$u_c(t) \cdot f(t-c)$	$e^{-sc}F(s)$