

חדו"א 1 תרגיל מספר 8 תשפ"א - משפטי חקירה

ענו על השאלות הבאות:

חלק א

1. הוכיחו שקיימת נקודה c ממשיית המקיימת $\cos(c^3) + \frac{1}{\ln^2(c^2+1)+1} = 7c^3 + 10c + 7$
2. תהינה $f, g : [0, 6] \rightarrow [0, 6]$ פונקציות רציפות כך ש $g(x)$ פונקציה על (כלומר, לכל $b \in [0, 1]$ קיים $a \in [0, 1]$ כך ש $g(a) = b$). הוכיחו שקיים $x_0 \in [0, 1]$ כך ש $f(x_0) = g(x_0)$.
3. תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[0, 1]$ המקיימת כי $f(0) = f(1)$. הוכיחו שלכל n טבעי קיים $c \in [0, 1]$ כך ש $f(c) = f(c + \frac{1}{n})$.
4. תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל הממשיים. נניח שלכל x מתקיים

$$f(x) = f(x + 10)$$

(במקרה זה נגיד ש $f(x)$ מחזורית עם מחזור 10). הוכיחו שקיימת נקודה c כך ש $f(c) = f(c + 5)$

5. תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל הממשיים. הוכיחו: קיימת נקודה c כך ש $f(c) = c$ אמ"מ קיימת נקודה d כך ש $f^2(d) = d$ (כאשר $f^2(d) = f(f(d))$)
6. יהיו a_0, a_1, \dots, a_n מספרים ממשיים כך ש $\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. הוכיחו כי קיים c ממשי עבורו $a_0 + a_1c + \dots + a_nc^n = 0$
7. תהא f פונקציה גזירה בקטע $[0, 1]$ כך ש $f(1) = 0$ וכמו כן, לכל $x \in (0, 1)$ מתקיים $f(x) \neq 0$. הוכיחו כי קיימת $c \in (0, 1)$ כך ש

$$c = -\frac{f(c)}{f'(c)}$$

8. תהא f פונקציה שגזירה n פעמים בקטע (a, b) (עבור $a < b$ ממשיים). הוכיחו שאם קיימות $n + 1$ נקודות שונות x_0, x_1, \dots, x_n כך ש $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$ אז קיימת נקודה c כך ש $f^{(n)}(c) = 0$ (כאשר הסימון $f^{(n)}$ הוא גזירה של f שוב ושוב, n פעמים).

חלק ב

1. הוכיחו/הפריכו:

- (א) לכל פונקציה $f : [0, 3] \rightarrow [0, 4]$ רציפה קיימת נקודת שבת (כלומר קיים $c \in [0, 3]$ כך ש $f(c) = c$).
- (ב) לכל פונקציה $f : [0, 3] \rightarrow [0, 2]$ רציפה קיימת נקודת שבת (כלומר קיים $c \in [0, 3]$ כך ש $f(c) = c$).

2. תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת כי לשיוויון $f(x) = 0$ קיימים 8 פתרונות שונים. הוכיחו/הפריכו:

(א) לשיוויון $f'(x) = 0$ קיימים בהכרח 7 פתרונות שונים.

(ב) ייתכן שלשיוויון $f'(x) = 0$ קיימים 8 פתרונות שונים.

הערה: שימו לב, בלשון מתמטית "קיימים x פתרונות" פירושו "קיימים לפחות x פתרונות" ולא "קיימים בדיוק x פתרונות".

בהצלחה! ☺