



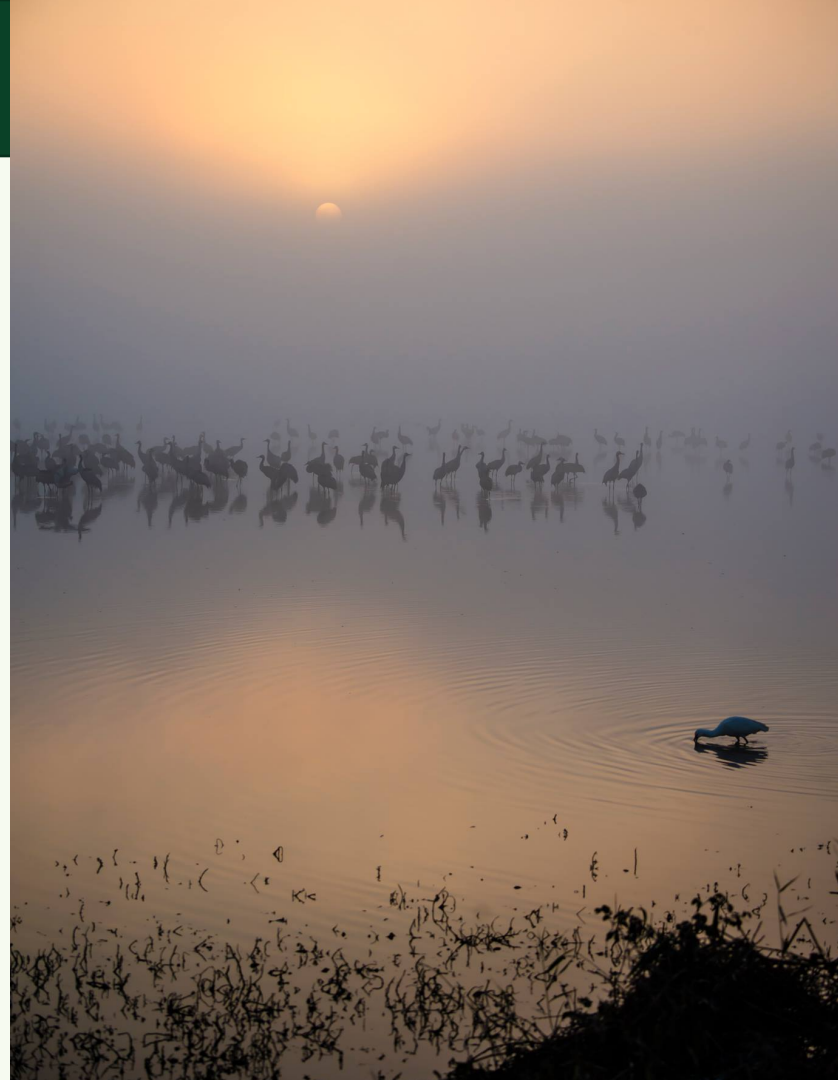
תורת המשחקים

דר ארז שיינר

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University



- מבוא
- משחקים בצורה אסטרטגית
- שליטה
- שיווי משקל נאש
- משחקים רציפים
- אסטרטגיות מעורבות
- מקסמין
- משחקי סכום אפס
- משחקים בצורה רחבה
- שידוכים יציבים





תורת המשחקים

מבוא

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University





כעת נשחק את משחק האולטימטום; המחשב יחלק אתכם לזוגות.

- כל זוג ישחק שני תורות, כאשר הראשון מתחלף.
- בכל תור, זוג השחקנים יקבל 100 ש"ח וירטואליים.
- השחקנית הראשונה תציע לשחקן השני סכום מסויים, ואת השאר תשמור לעצמה.
- אם השחקן השני יסכים לחלוקה, שניהם יקבלו את הכסף.
- אם השחקן השני יסרב, שני השחקנים לא יקבלו כלום

<https://game.math-wiki.com>





לכאורה כל שחקן היה צריך להסכים לכל הצעה גדולה מאפס, לא משנה מה קרה עד עכשיו.

לפיכך, כל שחקנית הייתה צריכה להציע את הסכום המינימלי האפשרי שגדול מאפס.

מצד שני, כסף אינו השיקול היחיד בחיים. כלומר התועלת של כל שחקן אינו שווה בהכרח לתוצאת המשחק.

כמו כן, חשוב לדעת אם השחקן השני "רציונאלי" או לא. ייתכן שהשחקן השני יציע לך סכום כסף גדול יותר אם את תציעי לו סכום כסף גדול, באופן לא רציונאלי. ייתכן שהוא יעשה זאת כיוון שהוגנות היא חלק מהתועלת שלו.



<https://sheep.math-wiki.com>

דיון על המשחק





<https://invest.math-wiki.com>

דיון על המשחק





מה היא אסטרטגיה של שחקן?





אסטרטגיה היא קבוצת החלטות של שחקן, כיצד לנהוג בכל מצב של המשחק.

לא חייבת להיות "חוקיות" מסויימת (כיצד כלל מגדירים חוקיות?), אלא סט של הוראות הפעלה לכל פעם בו נדרשת פעולת השחקן.

נראה בהמשך כי השחקן יכול להחליט כחלק מהאסטרטגיה שבמצב מסוים הוא יבצע פעולות שונות בהסתברויות מסוימות.

זה בלי קשר לכך שייתכן שהמהלכים האפשריים של השחקן תלויים בהסתברות כחלק מחוקי המשחק.





תורת המשחקים

משחקים בצורה אסטרטגית



משחק בצורה אסטרטגית הוא שלשה של:

- מספר סופי של שחקנים
- לכל שחקן יש מספר סופי של אסטרטגיות (לאו דווקא כמויות שוות)
- לכל בחירת אסטרטגיות של כלל השחקנים, יש תוצאת משחק יחידה

שימו לב שכאן אין אלמנט של מזל או הסתברות - בחירת האסטרטגיות של השחקנים קובעת באופן מוחלט את התוצאה הסופית.



אבן, נייר ומספריים

ניתן לתאר משחק בצורה אסטרטגית בין שני שחקנים באמצעות טבלה (מטריצה).
לכל אסטרטגיה של השחקנית הראשונה מתאימה שורה, ולכל אסטרטגיה של השחקן השני מתאימה עמודה.
בהנתן בחירה של שורה ועמודה, נתונה תוצאת המשחק. התועלת של השחקנית הראשונה רשומה משמאל.

שחקן II	מספריים	נייר	אבן
שחקנית I			
אבן	1,-1	-1,1	0,0
נייר	-1,1	0,0	1,-1
מספריים	0,0	1,-1	-1,1



האם המשחקים הבאים הם משחקים בצורה אסטרטגית?

- משחק האולטימטום
- איקס-עיגול
- שש-בש
- שח-מט



האם המשחקים הבאים הם משחקים בצורה אסטרטגית?

- **משחק האולטימטום** - כן, שחקנית מחליטה מראש איזו הצעה לקבל ואיזו הצעה לתת.
 - **שח-מט, איקס-עיגול** - כן, כל שחקן מחליט כיצד לפעול בכל מצב של הלוח. אלא אם הוא מעוניין לבחור פעולות מסוימות בהסתברות מסוימת, ואז מדובר בסיפור אחר.
 - **שש-בש** - לא. כיוון שכל תור מתחיל בהטלת קוביה, לא ניתן לדעת מהי תוצאת המשחק על פי אסטרטגיות השחקנים בלבד.
- אפילו אם נחשוב על הקוביות כשחקן, תוצאתן לא תלוייה רק במצב הלוח אלא בהסתברות.





המשטרה עצרה שני חשודים בפשע ומפרידה אותם לחדרי חקירה שונים, ומציעה להם להודות בפשע ולהפוך לעדי מדינה.

- אם שניהם מודים, הם מקבלים 5 שנים בכלא כל אחד
- אם האחד מודה והשני לא, עד המדינה יוצא לחופשי והשני מקבל 15 שנים בכלא.
- אם שניהם אינם מודים, הם יקבלו שנה 1 בכלא כל אחד.

מה הם צריכים לעשות?
האם זה משנה אם הם הספיקו לדבר קודם בתא המעצר?

כנסו לקישור:

<https://dilemma.math-wiki.com/?room=1>

דילמת האסיר

נציג את ה"משחק" בטבלה:

חשודה II	מודה	לא מודה
חשוד I		
מודה	-5,-5	0,-15
לא מודה	-15,0	-1,-1



ילד II	חולק	לא חולק
ילדה I		
חולקת	10,10	20,0
לא חולקת	0,20	0,0





תורת המשחקים

שליטה

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University





במשחק בצורה אסטרטגית, אסטרטגיה s של שחקן i נקראת **נשלטת חזק** אם קיימת אסטרטגיה t של אותו השחקן כך שלכל בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, מתקיים שהשחקן הו יקבל תשלום גבוה יותר אם יבחר בt לעומת s.





במשחק בצורה אסטרטגית, אסטרטגיה s של שחקן i נקראת **נשלטת חזק** אם קיימת אסטרטגיה t של אותו השחקן כך שלכל בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, מתקיים שהשחקן הו יקבל תשלום גבוה יותר אם יבחר בt לעומת s.

האסטרטגיה s נקראת **נשלטת חלש** אם קיימת t עבורה התשלומים יהיו גבוהים או שווים לעומת הבחירה באסטרטגיה s לכל בחירת אסטרטגיות של האחרים, וכמו כן קיימת בחירה של האחרים בה התשלום עבור t גבוה ולא שווה לזה המתאים לs.





במשחק בצורה אסטרטגית, אסטרטגיה s של שחקן i נקראת **שולטת חזק** אם לכל אסטרטגיה t של אותו השחקן מתקיים שלכל בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, השחקן הו יקבל תשלום גבוה יותר אם יבחר בs לעומת t.





במשחק בצורה אסטרטגית, אסטרטגיה s של שחקן i נקראת **שולטת חזק** אם לכל אסטרטגיה t של אותו השחקן מתקיים שלכל בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, השחקן הו יקבל תשלום גבוה יותר אם יבחר בs לעומת t.

האסטרטגיה s נקראת **שולטת חלש** אם לכל t התשלומים יהיו קטנים או שווים לעומת הבחירה באסטרטגיה s לכל בחירת אסטרטגיות של האחרים, וכמו כן קיימת בחירה של האחרים עבורה התשלום עבור s יהיה גבוה ולא שווה מאשר זה עבור t.





- אסטרטגיה נשלטת קטנה מאסטרטגיה **כלשהי**, לכל בחירה של האחרים
- אסטרטגיה שולטת גדולה **מכל** האסטרטגיות, לכל בחירה של האחרים
- שחקן רציונאלי לעולם לא יבחר באסטרטגיה נשלטת, ותמיד יבחר באסטרטגיה שולטת. (אם ישנן כאלה, כמובן.)



ניתוח דילמת האסיר

להודות היא אסטרטגיה שולטת חזק, ולכן שני השחקים יבחרו בה.
למרות שיש נקודה שעדיפה לשני השחקנים על הלוח, כל אחד מהם ירוויח מ'בגידה'.

שימו לב שאנחנו מניחים שהתשלומים בטבלה הם הסופיים.
אם כניסה של חברי לכלא פוגעת בי, עליי לעדכן את טבלת התשלומים של המשחק.

חשודה II	מודה	לא מודה
חשוד I		
מודה	-5,-5	0,-15
לא מודה	-15,0	-1,-1



נחזור לחשודים בפשע מדילמת האסיר.

נוסיף שבכל חדר עם חשוד יש גם שוטר.

כל חשוד יכול להודות או לא להודות.

שני השוטרים יכולים גם לנהוג בדרך מסוימת:

- השוטרת הראשונה יכולה להיות ישרה או ערמומית
- השוטר השני יכול להיות טוב או רע

טבלת התשלומים מוצגת בשקופית הבאה לפי הסדר:

חשודה II, חשוד I, שוטר II, שוטרת I



דילמת האסירים והשוטרים

שוטר II שוטרת I	טוב			רע		
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ערמומית	מודה	1,1,-1,-1	15,10,0,-15	מודה	2,2,-2,-2	15,10,0,-15
	לא מודה	15,10,-10,0	5,5,5,5	לא מודה	15,15,-15,0	5,6,-10,-1
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ישרה	מודה	8,8,-4,-4	10,10,0,-10	מודה	8,8,-4,-4	15,15,0,-15
	לא מודה	10,10,-10,0	0,0,0,0	לא מודה	15,15,-15,0	2,2,-1,-1
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה



כנסו לקישור הבא:

<https://second.dilemma.math-wiki.com/?room=1&player=cop1>





- אם השחקן הראשון רציונאלי, הוא לא יבחר באסטרטגיה נשלטת, ללא תלות בשחקנים האחרים.





- אם השחקן הראשון רציונאלי, הוא לא יבחר באסטרטגיה נשלטת, ללא תלות בשחקנים האחרים.
- השחקנית השנייה תמחק את האסטרטגיה הנשלטת, ונקבל משחק חדש, מצומצם יותר.





- אם השחקן הראשון רציונאלי, הוא לא יבחר באסטרטגיה נשלטת, ללא תלות בשחקנים האחרים.
- השחקנית השנייה תמחק את האסטרטגיה הנשלטת, ונקבל משחק חדש, מצומצם יותר.
- כלל השחקנים צריכים להניח שהשחקן הראשון רציונאלי, שהשחקנית השנייה רציונאלית ושהיא יודעת שהראשון רציונאלי.





- אם השחקן הראשון רציונאלי, הוא לא יבחר באסטרטגיה נשלטת, ללא תלות בשחקנים האחרים.
- השחקנית השנייה תמחק את האסטרטגיה הנשלטת, ונקבל משחק חדש, מצומצם יותר.
- כלל השחקנים צריכים להניח שהשחקן הראשון רציונאלי, שהשחקנית השנייה רציונאלית ושהיא יודעת שהראשון רציונאלי.
- כך הלאה, כלל השחקנים צריכים להוכיח שהאחרים רציונאליים, ויודעים שהם רציונאליים, ויודעים שהם יודעים שהם רציונאליים, מכל אורך של שרשרת ידיעה כזו עד לסוף המשחק.



ניתוח דילמת האסירים והשוטרים

שוטר II שוטרת I	טוב			רע		
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ערמומית	מודה	1,1,-1,-1	15,10,0,-15	מודה	2,2,-2,-2	15,10,0,-15
	לא מודה	15,10,-10,0	5,5,5,5	לא מודה	15,15,-15,0	5,6,-10,-1
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ישרה	מודה	8,8,-4,-4	10,10,0,-10	מודה	8,8,-4,-4	15,15,0,-15
	לא מודה	10,10,-10,0	0,0,0,0	לא מודה	15,15,-15,0	2,2,-1,-1



ניתוח דילמת האסירים והשוטרים

שוטר II שוטרת I		רע		
		חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ערמומית		מודה	2,2,-2,-2	15,10,0,-15
		לא מודה	15,15,-15,0	5,6,-10,-1
ישרה		חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
		מודה	8,8,-4,-4	15,15,0,-15
		לא מודה	15,15,-15,0	2,2,-1,-1



ניתוח דילמת האסירים והשוטרים

שוטר II		רע	
שוטרת I			
ערמומית		חשודה II	מודה
		חשוד I	
		מודה	2,2,-2,-2
		לא מודה	15,15,-15,0
ישרה		חשודה II	מודה
		חשוד I	
		מודה	8,8,-4,-4
		לא מודה	15,15,-15,0



ניתוח דילמת האסירים והשוטרים

שוטר II	רע									
שוטרת I										
ישרה		<table border="1"> <thead> <tr> <th>חשודה II</th> <th>מודה</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>חשוד I</td> <td></td> </tr> <tr> <td>מודה</td> <td>8,8,-4,-4</td> </tr> <tr> <td>לא מודה</td> <td>15,15,-15,0</td> </tr> </tbody> </table>	חשודה II	מודה	חשוד I		מודה	8,8,-4,-4	לא מודה	15,15,-15,0
חשודה II	מודה									
חשוד I										
מודה	8,8,-4,-4									
לא מודה	15,15,-15,0									



ניתוח דילמת האסירים והשוטרים

שוטר II			רע						
שוטרת I									
ישרה			<table border="1"> <tr> <td>חשודה II</td> <td>מודה</td> </tr> <tr> <td>חשוד I</td> <td></td> </tr> <tr> <td>מודה</td> <td>8,8,-4,-4</td> </tr> </table>	חשודה II	מודה	חשוד I		מודה	8,8,-4,-4
חשודה II	מודה								
חשוד I									
מודה	8,8,-4,-4								



האם הסדר בו אנחנו מסירים אסטרטגיות נשלטות עשוי להשפיע על המשחק אליו נגיע?





האם הסדר בו אנחנו מסירים אסטרטגיות נשלטות עשוי להשפיע על המשחק אליו נגיע?

אם נסלק אסטרטגיות נשלטות חזק, אחת אחרי השנייה עד שלא תיוותרנה אסטרטגיות נשלטות חזק, תמיד נגיד לאותו המשחק המצומצם.
זה לא מובן מאליו, שהרי כל סילוק אסטרטגיה משנה את המשחק.



האם הסדר בו אנחנו מסירים אסטרטגיות נשלטות עשוי להשפיע על המשחק אליו נגיע?

אם נסלק אסטרטגיות נשלטות חזק, אחת אחרי השנייה עד שלא תיוותרנה אסטרטגיות נשלטות חזק, תמיד נגיד לאותו המשחק המצומצם.
זה לא מובן מאליו, שהרי כל סילוק אסטרטגיה משנה את המשחק.

על מנת להוכיח את הטענה, ראשית נלמד על מושג האינדוקציה.
צפו בקישור הבא:

<https://youtu.be/n6xkPhKmhQo>



תהי s_1 נשלטת חזק, אזי לאחר n מחיקות של אסטרטגיות נשלטות אחרות היא עדיין נשלטת חזק.

(שימו לב שהאסטרטגיות יכולות להיות של שחקנים אחרים או נשלטות חלש).

נוכיח זאת באינדוקציה, כאשר עבור $n=0$ ברור שזה נכון.





בהנתן n עבורו הטענה נכונה, נוכיח עבור $n+1$

אחרי מחיקת n האסטרטגיות הראשונות s_1 עדיין נשלטת חזק לפי הנחת האינדוקציה, צריך להוכיח שזה המצב עבור האסטרטגיה האחרונה נקרא לה t_1 .

נסמן את האסטרטגיה s_1 נשלטת חזק על ידה ב- r . אם t_1 שונה מ- r סיימנו. אם $t_1=r$, היא נמחקה מאסטרטגיה t_2 שהתשלום עבורה גדול או שווה לזה של t_1 . לכן בוודאי התשלום עבור האסטרטגיה t_2 גדול ממש מזה של s_1 ולכן היא עדיין נשלטת חזק כפי שרצינו.



נוכיח כעת שסדר מחיקת אסטרטגיה נשלטות חזק לא משנה.
ראשית ננסח במדויק את הטענה, על מנת להוכיחה באינדוקציה:

יהי משחק בצורה אסטרטגית, ונניח שסדרת המחיקות של
אסטרטגיות נשלטות חזק s_1, s_2, \dots, s_n הובילה למשחק בו אין
אסטרטגיות נשלטות חזק.

אזי כל סדרת מחיקות של אסטרטגיות נשלטות חזק שתוביל למשחק
בו אין אסטרטגיות נשלטות חזק חייבת להכיל בדיוק את n
האסטרטגיות הללו, אולי בסדר אחר.

הערה: שימו לב שיייתכן שמדובר באסטרטגיות של שחקנים שונים.



עבור $n=1$: נניח שמחיקת האסטרטגיה הנשלטת חזק s_1 של שחקן i מובילה למשחק ללא אסטרטגיות נשלטות חזק.

ראשית, לאף שחקן פרט לו אין אסטרטגיה נשלטת חזק.

אכן, אם הייתה לו כזו t_1 שנשלטת על ידי t_2 , גם לאחר מחיקת s_1 היא עדיין נשלטת חזק ע"י t_2 .



עבור $n=1$: נניח שמחיקת האסטרטגיה הנשלטת חזק s_1 של שחקן
מובילה למשחק ללא אסטרטגיות נשלטות חזקה.

ראשית, לאף שחקן פרט לו אין אסטרטגיה נשלטת חזק.

אכן, אם הייתה לו כזו t_1 שנשלטת על ידי t_2 , גם לאחר מחיקת s_1
היא עדיין נשלטת חזק ע"י t_2 .

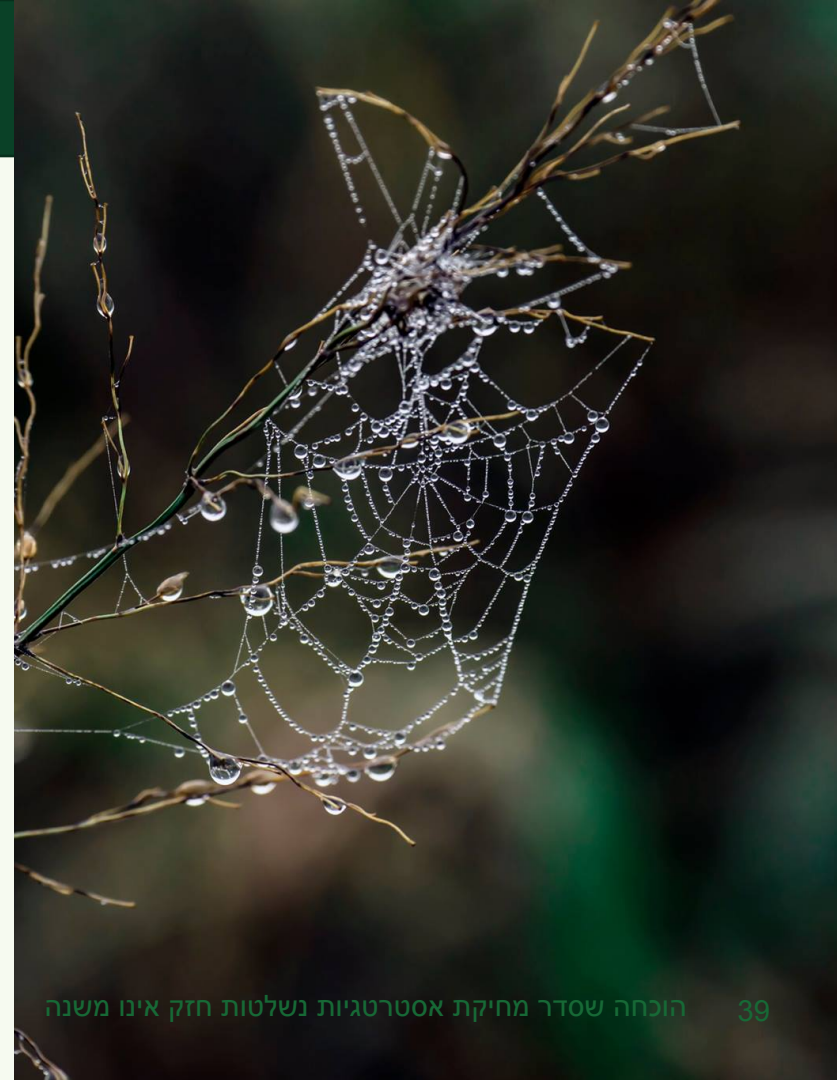
שימו לב שטיעון זה אינו תקף עבור אסטרטגיות נשלטות חלש. כיוון
שייתכן שרק כאשר שחקן i משחק s_1 אז t_2 תניב תשלום גבוה מ t_1
במצב כלשהו, ובשאר האסטרטגיות של שחקן i התשלומים של t_1 ו t_2
שווים.

במצב כזה, בוודאי שלא ניתן לדעת מה השחקן השני יבחר מבין t_1
ל t_2 ולמחוק אחת מהן.



עבור $n=1$: נניח שמחיקת האסטרטגיה הנשלטת חזק s_1 של שחקן i מובילה למשחק ללא אסטרטגיות נשלטות חזקה.

כעת, לא ייתכן שלשחקן i יש אסטרטגיה נשלטת חזק פרט ל s_1 .
אם הייתה לו כזו, s_2 , היא הייתה נשארת נשלטת חזק לאחר מחיקת s_1 , בסתירה לכך שאין אסטרטגיות נשלטות חזק לאחר מחיקת s_1 .



הוכחה שסדר מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק אינו משנה

עבור $n=1$: נניח שמחיקת האסטרטגיה הנשלטת חזק s_1 של שחקן
נמובילה למשחק ללא אסטרטגיות נשלטות חזקה.

סה"כ s_1 היא האסטרטגיה הנשלטת חזק היחידה במשחק, כפי
שרצינו.

כעת, בהנתן n עבורו הטענה נכונה, צ"ל עבור $n+1$.
תהי סדרת מחיקות

$s_1, s_2, \dots, s_{(n+1)}$

צריך להוכיח שכל סדרת מחיקות שמובילה למשחק ללא אסטרטגיה
נשלטת חזק מכילה בדיוק את כל האסטרטגיות הללו, ולא אחרות.



תהי סדרת מחיקות t_1, \dots, t_k .

ראשית, נשים לב כי s_1 היא אחת האסטרטגיות $t_i = s_1$ כיוון שהיא אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק המקורי, ותשאר כזו עד שתמחק.

כיוון ש s_1 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק המקורי, ניתן למחוק אותה ראשונה והאסטרטגיות שהיו נשלטות חזק ישארו כאלה.

נקבל את סדרת המחיקות

$$s_1, t_1, \dots, t_{(i-1)}, t_{(i+1)}, \dots, t_k$$

נביט במשחק ללא s_1 , בו יש את סדרת המחיקות

$$s_2, \dots, s_{(n+1)}$$

המכילה n מחיקות, ולכן לפי הנחת האינדוקציה

$$\{s_2, \dots, s_{(n+1)}\} = \{t_1, \dots, t_{(i-1)}, t_{(i+1)}, \dots, t_k\}$$

כפי שרצינו.



מחיקת נשלטות חלש

<https://dessert.math-wiki.com>

ילדה ילד	אנוס	תפוח	בננה
שוקולד	2,1	2,1	3,0
וניל	2,0	0,1	0,1
מסטיק	0,1	1,0	3,3



ילד II	אנוס	תפוח	בננה
ילדה I			
שוקולד	2,1	2,1	3,0
וניל	2,0	0,1	0,1



ילדה I	ילד II	תפוח	
שוקולד		2,1	
וניל		0,1	



ילד II		תפוח	
ילדה I			
שוקולד		2,1	



סדרת מחיקות II

ילדה I	אנוס	תפוח	בננה
שוקולד	2,1	2,1	3,0
וניל	2,0	0,1	0,1
מסטיק	0,1	1,0	3,3



סדרת מחיקות II

ילד II	אנוס	תפוח	בננה
ילדה I			
שוקולד	2,1	2,1	3,0
מסטיק	0,1	1,0	3,3



סדרת מחיקות II

ילדה I	ילד II	אנוס	בננה
שוקולד		2,1	3,0
מסטיק		0,1	3,3



ילדה I	ילד II	אנוס	בננה
שוקולד		2,1	3,0



ילדה I	אנוס	ילד II	
שוקולד	2,1		





תורת המשחקים

שיווי משקל נאש

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University





וקטור אסטרטגיות במשחק בצורה אסטרטגית נקרא שיווי משקל נאש, אם אף שחקן לא ירוויח מלהפר אותו באופן אישי.

במדוייק, אם כל השחקנים פרט לשחקן הו ישחקו באסטרטגיות שיווי המשקל, התשלום לשחקן הו עבור כל אסטרטגיה יהיה קטן או שווה לאסטרטגיה משיווי המשקל.

מציאת שיווי משקל

לכל שחקן i עבור כל בחירה של שאר השחקנים, נסמן את התשלומים המקסימליים של השחקן i .
משבצת בה כל התשלומים צבועים היא שיווי משקל נאש, לפי ההגדרה.

<https://dessert.math-wiki.com>

ילד II	אנוס	תפוח	בונה
ילדה I			
שוקולד	2,1	2,1	3,0
וניל	2,0	0,1	0,1
מסטיק	0,1	1,0	3,3



מציאת שיווי משקל

לכל שחקן i עבור כל בחירה של שאר השחקנים, נסמן את התשלומים המקסימליים של השחקן i .
משבצת בה כל התשלומים צבועים היא שיווי משקל נאש, לפי ההגדרה.

ילד II	אנוס	תפוח	בונה
ילדה I			
שוקולד	2,1	2,1	3,0
וניל	2,0	0,1	0,1
מסטיק	0,1	1,0	3,3



מציאת שיווי משקל

קיבלנו שלושה שיווי משקל במשחק זה.

שימו לב - ניתוח המשחק לפי שיווי משקל הניב תוצאה שונה מאשר לפי מחיקת אסטרטגיות נשלטות חלש

ילד II	אנוס	תפוח	בונה
ילדה I			
שוקולד	2,1	2,1	3,0
וניל	2,0	0,1	0,1
מסטיק	0,1	1,0	3,3



דוגמא נוספת למציאת שיווי משקל

שוטר II שוטרת I	טוב			רע		
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ערמומית	מודה	1,1,-1,-1	15,10,0,-15	מודה	2,2,-2,-2	15,10,0,-15
	לא מודה	15,10,-10,0	5,5,5,5	לא מודה	15,15,-15,0	5,6,-10,-1
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ישרה	מודה	8,8,-4,-4	10,10,0,-10	מודה	8,8,-4,-4	15,15,0,-15
	לא מודה	10,10,-10,0	0,0,0,0	לא מודה	15,15,-15,0	2,2,-1,-1



דוגמא נוספת למציאת שיווי משקל

שטר II שטר I	טוב			רע		
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ערמומית	מודה	1,1,-1,-1	15,10,0,-15	מודה	2,2,-2,-2	15,10,0,-15
	לא מודה	15,10,-10,0	5,5,5,5	לא מודה	15,15,-15,0	5,6,-10,-1
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ישרה	מודה	8,8,-4,-4	10,10,0,-10	מודה	8,8,-4,-4	15,15,0,-15
	לא מודה	10,10,-10,0	0,0,0,0	לא מודה	15,15,-15,0	2,2,-1,-1



דוגמא נוספת למציאת שיווי משקל

שטר II שטר I	טוב			רע		
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ערמומית	מודה	1,1,-1,-1	15,10,0,-15	מודה	2,2,-2,-2	15,10,0,-15
	לא מודה	15,10,-10,0	5,5,5,5	לא מודה	15,15,-15,0	5,6,-10,-1
	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה	חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
ישרה	מודה	8,8,-4,-4	10,10,0,-10	מודה	8,8,-4,-4	15,15,0,-15
	לא מודה	10,10,-10,0	0,0,0,0	לא מודה	15,15,-15,0	2,2,-1,-1





כיצד ינהגו שחקנים כאשר אין להם אפשרות לתקשר לפני המשחק?

נדגים באמצעות המשחק הבא;

<https://coordination.math-wiki.com>





כיצד ינהגו שחקנים כאשר אין להם אפשרות לתקשר לפני המשחק?

נדגים באמצעות המשחק הבא;

<https://coordination.math-wiki.com>

נקודות שיווי המשקל הן הנקודות בהן כל השחקנים בוחרים באותן האפשרויות.

גם ללא תקשורת מוקדמת, לעיתים בני אדם מזהים נקודות שיווי משקל **מתבלטות** (Focal point, Schelling point).





תורת המשחקים

משחקים רציפים

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University





הגדרנו משחק בצורה אסטרטגית כשלושה של:

- מספר סופי של שחקנים
- לכל שחקן יש מספר סופי של אסטרטגיות (לאו דווקא כמויות שוות)
- לכל בחירת אסטרטגיות של כלל השחקנים, יש תוצאת משחק יחידה

משחק רציף מוגדר באופן דומה, אך לכל שחקן יש אינסוף אסטרטגיות, המיוצגות ע"י מספרים מקטע ממשי כלשהו [a,b]





דוגמא: נניח ששני צדדים משחקים במכרז על מסכת KN95 ששווה 10 ש"ח
כל שחקן יכול להציע סכום שהוא מספר בין 0 ל10.
אם יש הצעה גבוהה ביותר יחידה, השחקן שהציע אותה מקבל את המסכה עבור הסכום
שהציע.

מה הם שיווי המשקל במשחק זה?





כל עוד אחד השחקנים מציע סכום שנמוך מ10, משתלם לשחקן השני לתת הצעה גבוהה יותר שנמוכה מ10. אם הצעתו כבר גבוהה יותר, ישתלם לו להנמיך אותה, כך שעדיין תשאר גבוהה יותר.

אם שני השחקנים יבחרו ב10 זו תהיה נקודת שיווי משקל, שכן בכל מקרה כל אחד מהשחקנים ירוויח אפס (יקבל מסכה תמורת השווי שלה, או לא יבצע רכישה כלל).





שתי חברות מקימות חברת סטארט-אפ ביחד.

כל חברת בוחרת את אחוז הזמן שלה, שהיא מוכנה להשקיע בפרוייקט כמספר בין 0 ל-1.

שווי האקזיט נתון ע"י הנוסחא הבאה שתלוייה בהשקעה שלהן:

$$f(x, y) = x + y + axy$$

כאשר a הוא קבוע המתאר את איכות העבודה המשותפת של שתי השחקניות.

התשלום לשחקנית הוא חצי משווי האקזיט, ועוד הזמן הפנוי שנותר לה.

$$u_1(x, y) = \frac{f(x, y)}{2} + (1 - x)^2$$

שימו לב, שהזמן הופך יקר יותר ככל שיש פחות ממנו. למשל אם נשאר לשחקנית חצי

מהזמן פנוי, היא תקבל עבורו רק רבע בחזרה.





לדוגמא, מה יקרה אם שחקנית אחת לא תשקיע כלל?





לדוגמא, מה יקרה אם שחקנית אחת לא תשקיע כלל?

האקזיט יהיה שווה בדיוק לפי כמות ההשקעה של השחקנית השנייה, והתשלומים יהיו:

$$u_1(0, y) = \frac{y}{2} + 1 \quad u_2(0, y) = \frac{y}{2} + (1 - y)^2$$





לדוגמא, מה יקרה אם שחקנית אחת לא תשקיע כלל?

האקזיט יהיה שווה בדיוק לפי כמות ההשקעה של השחקנית השנייה, והתשלומים יהיו:

$$u_1(0, y) = \frac{y}{2} + 1 \quad u_2(0, y) = \frac{y}{2} + (1 - y)^2$$

אם הקבוע a חיובי, ברור ששווי האקזיט יהיה גדול ביותר אם שתי השחקניות ישקיעו את כל זמןן.

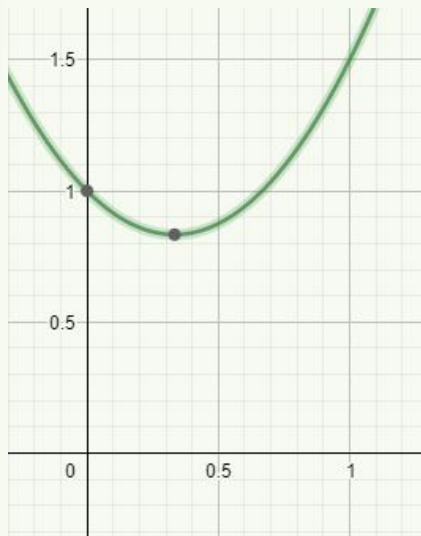
האם בהכרח זה אומר שזה התשלום הגבוה ביותר עבור השחקניות?





אם שתי השחקניות תשקענה זמן שווה, ונניח $a=1$, כל אחת מהן תקבל תשלום של:

$$u(x, x) = x + \frac{x^2}{2} + (1 - x)^2 = \frac{3x^2}{2} - x + 1$$



ואכן המקסימום, במקרה זה, יתקבל כאשר $x=1$.

מזהים את נקודת המינימום?

שימו לב שעד שלב מסויים, תוספת השקעה גורמת

להפסדים ולאחר מכן לצמיחה.





בהנתן בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, קבוצת התגובות המיטביות של שחקן היא קבוצת האסטרטגיות שניבו עבורו תשלום מקסימלי.

במרכז הקורונה, מהי קבוצת התגובות המיטביות של השחקן השני אם השחקן הראשון הציע 9?





בהנתן בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, קבוצת התגובות המיטביות של שחקן היא קבוצת האסטרטגיות שניבו עבורו תשלום מקסימלי.

במרכז הקורונה, מהי קבוצת התגובות המיטביות של השחקן השני אם השחקן הראשון הציע 9?

מדובר בקבוצה ריקה. אף אסטרטגיה לא תניב תשלום מקסימלי, לכל אסטרטגיה יש תגובה טובה יותר.





בהנתן שהשחקנים השנייה בחרה ב c , מה היא קבוצת האסטרטגיות המיטביות של השחקנית הראשונה?

בעצם y הוא פרמטר, ואנחנו מחפשים את ערכי x שיתנו את התשלום המקסימלי לשחקנית הראשונה.



בהנתן שהשחקנים השנייה בחרה בע, מה היא קבוצת האסטרטגיות המיטביות של השחקנית הראשונה?

בעצם y הוא פרמטר, ואנחנו מחפשים את ערכי x שיתנו את התשלום המקסימלי לשחקנית הראשונה.

נניח כי $a=1$, התשלום של השחקנית הראשונה הוא

$$u_1(x, y) = \frac{x + y + xy}{2} + (1 - x)^2$$



בהנתן שהשחקנים השנייה בחרה בע, מה היא קבוצת האסטרטגיות המיטביות של השחקנית הראשונה?

בעצם y הוא פרמטר, ואנחנו מחפשים את ערכי x שיתנו את התשלום המקסימלי לשחקנית הראשונה.

נניח כי $a=1$, התשלום של השחקנית הראשונה הוא

$$u_1(x, y) = \frac{x + y + xy}{2} + (1 - x)^2$$

נסדר את זה כפונקציה של x :

$$u_1(x, y) = x^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)x + 1 + \frac{y}{2}$$



בהנתן שהשחקנים השנייה בחרה בע, מה היא קבוצת האסטרטגיות המיטביות של השחקנית הראשונה?

בעצם y הוא פרמטר, ואנחנו מחפשים את ערכי x שיתנו את התשלום המקסימלי לשחקנית הראשונה.

נניח כי $a=1$, התשלום של השחקנית הראשונה הוא

$$u_1(x, y) = \frac{x + y + xy}{2} + (1 - x)^2$$

נסדר את זה כפונקציה של x :

$$u_1(x, y) = x^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)x + 1 + \frac{y}{2}$$

זו פרבולה מחייכת! נקודות המקסימום יתקבלו באחד הקצוות או בשניהם.

נציב את שני הקצוות

$$u_1(0, y) = 1 + \frac{y}{2}$$

$$u_1(1, y) = \frac{1}{2} + y$$

מה עדיף לשחקנית הראשונה?



נציב את שני הקצוות

$$u_1(0, y) = 1 + \frac{y}{2} \qquad u_1(1, y) = \frac{1}{2} + y$$

מה עדיף לשחקנית הראשונה?

נפתור את אי השוויון

$$1 + \frac{y}{2} < \frac{1}{2} + y$$

ונקבל שעבור y גדול מאחד עדיף לשחקנית הראשונה להשקיע את המקסימום, עבור y קטן מחצי עדיף לשחקנית 1 לא להשקיע כלום. ומעניין ביותר, שעבור y שווה בדיוק לאחד לא משנה לשחקנית 1 אם להשקיע או לא.

כלומר רק אם השחקנית השנייה משקיעה את כל זמנה, שווה לשחקנית הראשונה לתת את כל כולה, אחרת עדיף לה לא להכנס לעסק הזה.

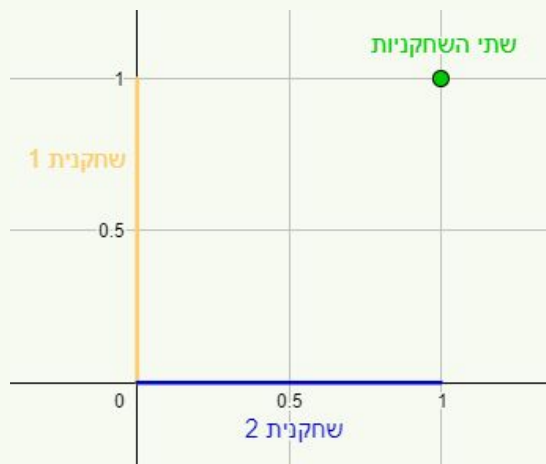


שיווי משקל נאש במשחק הסטארט-אפ

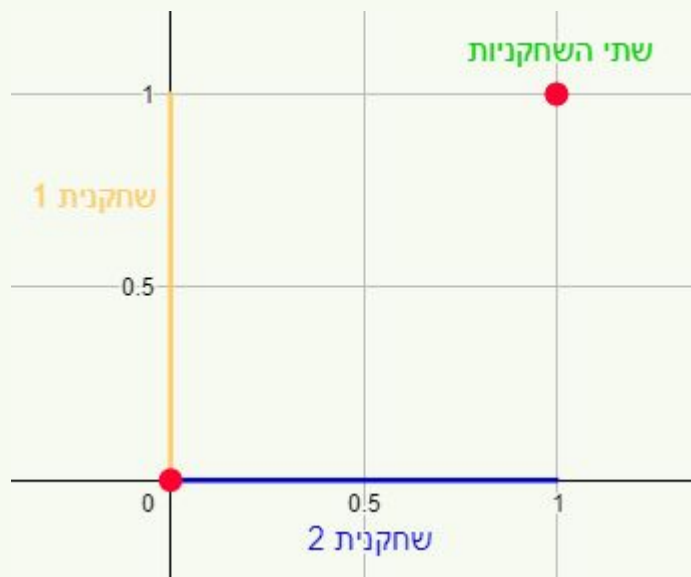
נשרטט על גרפים את התגובות המיטביות של כל שחקנית בהתאם לבחירת אסטרטגיות של האחרת.

למשל עבור השחקנית הראשונה נצייר את אוסף הנקודות בהן ערך ציר הא הוא תגובה מיטבית לערך ציר ה_ב.

נקודת מפגש בין שני הגרפים היא נקודת שיווי משקל, כל כי שחקנית בחרה באסטרטגיה המיטבית ביחס לאסטרטגיה של השנייה, ולכן לא תרוויח מלשנות אסטרטגיה.



נסמן את נקודות שיווי המשקל





תורת המשחקים

אסטרטגיות מעורבות

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University



שיווי משקל באבן, נייר ומספרים

האם במשחק אבני-רו-מספרים יש שיווי משקל נאש?

שחקן II	מספרים	נייר	אבן
שחקנית I			
אבן	1,-1	-1,1	0,0
נייר	-1,1	0,0	1,-1
מספרים	0,0	1,-1	-1,1



שיווי משקל באבן, נייר ומספרים

לא.

אז מה נעשה על מנת לנתח את המשחק? האם יש דרך כלשהי?

שחקן II שחקנית I	מספרים	נייר	אבן
אבן	1,-1	-1,1	0,0
נייר	-1,1	0,0	1,-1
מספרים	0,0	1,-1	-1,1



זוג או פרט

נתחיל מלחשוב על משחק פשוט יותר;
בפועל, שחקן יבחר בצורה אקראית את המהלך שלו.
האמנם צורה אקראית עדיפה מהגרלה בהסתברות כלשהי?

שחקנית פרט	זוג	פרט
שחקן זוג	1,-1	-1,1
זוג	1,-1	-1,1
פרט	-1,1	1,-1





בהנתן משחק בצורה אסטרטגית, ניתן להגדיר משחק עם אסטרטגיות מעורבות. עבור שחקן עם ח אסטרטגיות, אסטרטגיה מעורבת היא בחירה של הסתברויות לכל אסטרטגיה, ובתנאי שסכום ההסתברויות הוא 1.

פונקצית התשלום היא התוחלת של התשלומים בהתאם להסתברויות. כלומר לכל וקטור אסטרטגיות מעורבות, אנחנו סוכמים את התשלומים של כל וקטורי האסטרטגיות האפשריים, כפול ההסתברות שהם יתקיימו.

באופן זה, הפכנו משחק בצורה אסטרטגית למשחק רציף.



אסטרטגיות מעורבות זוג או פרט

למשל במשחק זוג או פרט, אסטרטגיה מעורבת של שחקן זוג היא לשחק זוג בהסתברות p ואחרת לשחק פרט. אסטרטגיה מעורבת של שחקנית פרט היא לשחק זוג בהסתברות q ואחרת לשחק פרט.

מה התשלום של כל אחד מהשחקנים עבור וקטור האסטרטגיות המעורבות?

ראשית, נחשב את ההסתברות לכל אחד מוקטורי האסטרטגיות:

שחקנית פרט שחקן זוג	זוג q	פרט
זוג p	pq	$p(1-q)$
פרט	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$



עת, נסכום את התשלום של כל וקטור אסטרטגיות כפול ההסתברות שהוא יתרחש עבור השחקן הזוגי:

שחקנית פרט שחקן זוג	זוג q	פרט
זוג p	pq	p(1-q)
פרט	(1-p)q	(1-p)(1-q)

שחקנית פרט שחקן זוג	זוג	פרט
זוג	1,-1	-1,1
פרט	-1,1	1,-1

$$pq \cdot 1 + p(1 - q) \cdot (-1) + (1 - p)q \cdot (-1) + (1 - p)(1 - q) \cdot 1$$

יוצא שפונקציות התשלומים של שני השחקנים באסטרטגיות מעורבות הן:

$$u_{\text{זוג}}(p, q) = 4pq - 2p - 2q + 1$$

$$u_{\text{אי זוג}}(p, q) = -4pq + 2p + 2q - 1$$



נחשב את קבוצת התגובות המיטביות של השחקן הזוגי לאסטרטגיה המעורבת q של השחקנית האי זוגית.
כלומר עלינו לבחור q עבור הפרמטר q כך שהתשלום של השחקן הזוגי יהיה מקסימלי.

נחשב את קבוצת התגובות המיטביות של השחקן הזוגי לאסטרטגיה המעורבת q של השחקנית האי זוגית.

כלומר עלינו לבחור p עבור הפרמטר q כך שהתשלום של השחקן הזוגי יהיה מקסימלי.

נציג את התשלום כפונקציה של p :

$$u_{\text{זוגי}}(p, q) = 4pq - 2p - 2q + 1 = (4q - 2)p + (1 - 2q)$$

נחשב את קבוצת התגובות המיטביות של השחקן הזוגי לאסטרטגיה המעורבת q של השחקנית האי זוגית.

כלומר עלינו לבחור p עבור הפרמטר q כך שהתשלום של השחקן הזוגי יהיה מקסימלי.

נציג את התשלום כפונקציה של q :

$$u_{\text{זוגי}}(p, q) = 4pq - 2p - 2q + 1 = (4q - 2)p + (1 - 2q)$$

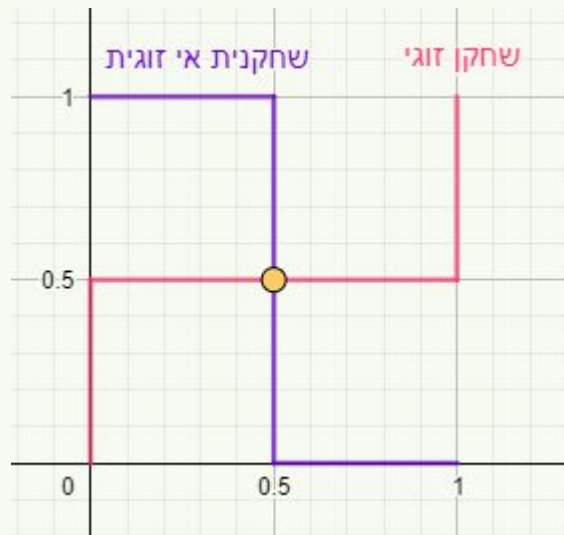
זהו קו ישר.

כאשר הוא עולה, המקסימום בקצה הימני, כאשר הוא יורד, המקסימום בקצה השמאלי, וכאשר הוא מאוזן, המקסימום מתקבל בכל אחת מהנקודות!

סימן השיפוע תלוי באם q גדול, קטן או שווה לחצי.

נציג על גרף את התגובות המיטביות של שני השחקנים.

עבור כל שחקן, הגרף הוא אוסף הנקודות בהן ערך הנקודה האחד מהווה תגובה מיטבית לערך הנקודה השני.





בעיטת פנדל כל כך מהירה, שהשוער צריך להחליט לאן לקפוץ לפני הבעיטה.

השוער יכול לקפוץ ימינה, שמאלה או להשאר באמצע.

הבועט יכול לבעוט ימינה, שמאלה או לכיוון האמצע.

לכל שילוב אסטרטגיות יש סיכוי מסויים להבקעת שער, נציג זאת בטבלה.

בדוגמא זו נעזרתי בנתונים מהמאמר

[Chiappori, P-A., Steven Levitt, and Timothy Groseclose. "Testing mixed-strategy equilibria when players are heterogeneous: The case of penalty kicks in soccer." *American Economic Review* 92.4 \(2002\): 1138-1151.](#)





בכל שילוב אסטרטגיות בטבלה רשום הסיכוי להבקעה באחוזים

שוער	שמאל	מרכז	ימין
שוער	60%	80%	90%
שמאל	100%	0%	100%
מרכז	95%	80%	45%
ימין			

האם יש שיווי משקל?





אין נקודת שיווי משקל במשחק, נעבור לאסטרטגיות מעורבות

שוער	שמאל	מרכז	ימין
שוער	60%	80%	90%
שמאל	100%	0%	100%
מרכז	95%	80%	45%
ימין			

כעת תבעטו אתם מול המחשב שיהיה השוער

<https://kicks.math-wiki.com>





בהנחה שהשוער יקפוץ שמאלה בסיכוי p ולמרכז בסיכוי q נחשב את התשלום של הבועט בכל אחת מן האסטרטגיות הטהורות (כלומר שהוא בוחר אסטרטגיה אחת בסיכוי 1).

שוער	בועט $0.6p+q+0.95(1-p-q)$	$0.8p+0.8(1-p-q)$	$0.9p+q+0.45(1-p-q)$
שמאל	60%	80%	90%
מרכז	100%	0%	100%
ימין	95%	80%	45%





נחפש נקודת שיווי משקל בה התשלום של הבועט שווה בשלושת האסטרטגיות.

זה לא אומר שאין נקודות שיווי משקל בהן אחת משלושת האסטרטגיות פחות שווה משתי האחרות.

אך בוודאות אין נקודות שיווי משקל בה התשלום גבוהה ביותר באסטרטגיה יחידה, כי ראינו שבהנתן שהבועט יבעט לכיוון מסויים, התגובה המיטבית של השוער לא מובילה לשיווי משקל.





נחפש נקודת שיווי משקל בה התשלום של הבוועט שווה בשלושת האסטרטגיות.

זה לא אומר שאין נקודות שיווי משקל בהן אחת משלושת האסטרטגיות פחות שווה משתי האחרות.

אך בוודאות אין נקודות שיווי משקל בה התשלום גבוהה ביותר באסטרטגיה יחידה, כי ראינו שבהנתן שהבוועט יבעט לכיוון מסויים, התגובה המיטבית של השוער לא מובילה לשיווי משקל.

אנו רוצים למצוא פתרון למערכת המשוואות

$$0.6p+q+0.95(1-p-q)=0.8p+0.8(1-p-q)=0.9p+q+0.45(1-p-q)$$





נקבל כי כאשר השוער קופץ שמאלה בהסתברות $p=0.58$, למרכז בהסתברות $q=0.06$ ולצד ימין בהסתברות 0.35 , כל אסטרטגיה מעורבת של הבעוט מניבה את אותו התשלום. תשלום זה הינו הבקעת שער בסיכוי 74.9% .

נחשב באופן דומה הסתברויות עבור השוער.

נניח שהבעוט מכוון לשמאל בהסתברות p , ולמרכז בהסתברות q .

נשווה את תשלומי השוער בשלושת האסטרטגיות.

$$0.4p+0.2q+0.1(1-p-q)=q=0.05p+0.2q+0.55(1-p-q)$$

נקבל שהבעוט צריך לבעוט שמאלה בסיכוי 0.42 , למרכז בסיכוי 0.25 וימינה בסיכוי 0.33 .

בנקודה זו נקבל את שיווי המשקל.





נביט בסטטיסטיקה האמיתית של בעיטות הפנדלים שנסקרו במאמר.
מתוך 459 בעיטות פנדל, 44% נבעטו שמאלה, 17% למרכז ו-38% נבעטו ימינה.
ב-56% מהן השוער קפץ לשמאל, ב-2% נשאר במרכז וב-41% קפץ לימין.

סה"כ 74.9% מהבעיטות הסתיימו בהבקעת שער.

שימו לב שתוצאות אלו מאד קרובות לשיווי המשקל שחזינו.





תורת המשחקים

מקסמין

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University





נשחק את המשחק הבא בין חברת ביטוח למבוטח

<https://insurance.math-wiki.com>

מבטחת	לבטח	לא לבטח
מבוטח		
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0





ראשית ננתח את המשחק ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות

מבטחת	לבטח	לא לבטח
מבוטח		
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0





ראשית ננתח את המשחק ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות

מבטחת	לבטח	לא לבטח
מבוטח		
לנהוג באחריות	-10,10	0,0





ראשית ננתח את המשחק ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות

מבטחת	לבטח	
מבוטח		
לנהוג באחריות	-10,10	





כעת נמצא שיווי משקל

מבטחת	לבטח	לא לבטח
מבוטח		
לנהוג באחריות	-10, 10	0, 0
לנהוג ברשלנות	-10, -90	-100, 0





הן ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות, והן ע"י מציאת נקודות שיווי משקל הגענו לפתרון היחיד לפיו חברת הביטוח תבטח, והמבוטח יהיה אחראי וישמור על רכשו.

יחד עם זאת, בהנתן שחברת הביטוח תבטח, המבוטח אינו נושא באחריות למעשיו. חברת הביטוח תפגע משמעותית אם האדם ינהג בחוסר אחריות.





הן ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות, והן ע"י מציאת נקודות שיווי משקל הגענו לפתרון היחיד לפיו חברת הביטוח תבטח, והמבוטח יהיה אחראי וישמור על רכשו.

יחד עם זאת, בהנתן שחברת הביטוח תבטח, המבוטח אינו נושא באחריות למעשיו. חברת הביטוח תפגע משמעותית אם האדם ינהג בחוסר אחריות.

עולות שתי שאלות:

1. כיצד ניתן לנתח משחק באופן שיגן על השחקן ממצב מסוכן שכזה?
2. האם ניתן לתקן את המשחק ולנטרל את הבעייה?



על מנת לתקן את הבעייה, נהוג להוסיף השתתפות עצמית בביטוחים.
כלומר המשחק ישתנה ויראה כך:

מבטח	לבטח	לא לבטח
מבוטח		
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-20,-80	-100,0

כעת אסטרטגית חוסר האחריות נשלטת חזק, ולכן המבוטח לעולם לא יבחר בה.
במציאות, כיוון שגם אנשים אחראיים נפגעים לפעמים, העיוות הזה פוגע בהם.
העיוות שנגרם כתוצאה מכך שאדם שלא נושא באחריות עשוי לקחת סיכון מיותר,
נקראת סיכון מוסרי





כעת נלמד כיצד יכלנו לנתח את המשחק באופן שמגן על השחקן מפני סיכונים.
שחקן יחשב בכל אסטרטגיה את התשלום המינימלי שהוא עשוי להקבל אם יבחר
באסטרטגיה זו.





כעת נלמד כיצד יכלנו לנתח את המשחק באופן שמגן על השחקן מפני סיכונים. שחקן יחשב בכל אסטרטגיה את התשלום המינימלי שהוא עשוי להקבל אם יבחר באסטרטגיה זו.

אסטרטגית מקסמין היא אסטרטגיה שהערך המינימלי שהיא מבטיחה הוא הגבוה ביותר מבין כל הערכים המינימליים של האסטרטגיות האחרות.





כעת נלמד כיצד יכלנו לנתח את המשחק באופן שמגן על השחקן מפני סיכונים. שחקן יחשב בכל אסטרטגיה את התשלום המינימלי שהוא עשוי להקבל אם יבחר באסטרטגיה זו.

אסטרטגית מקסמין היא אסטרטגיה שהערך המינימלי שהיא מבטיחה הוא הגבוה ביותר מבין כל הערכים המינימליים של האסטרטגיות האחרות.

הערך המינימלי של אסטרטגית המקסמין נקרא ערך המקסמין של השחקן. השחקן יכול, אם ירצה, להבטיח שהוא יקבל לפחות את המקסמין.





כעת נלמד כיצד יכלנו לנתח את המשחק באופן שמגן על השחקן מפני סיכונים. שחקן יחשב בכל אסטרטגיה את התשלום המינימלי שהוא עשוי להקבל אם יבחר באסטרטגיה זו.

אסטרטגית מקסמין היא אסטרטגיה שהערך המינימלי שהיא מבטיחה הוא הגבוה ביותר מבין כל הערכים המינימליים של האסטרטגיות האחרות.

הערך המינימלי של אסטרטגית המקסמין נקרא ערך המקסמין של השחקן. השחקן יכול, אם ירצה, להבטיח שהוא יקבל לפחות את המקסמין.

זו שיטת ניתוח משחק שמתאימה לשחקן שמעדיף להמנע מסיכונים, גם על חשבון רווחים אפשריים.





נחשב לדוגמא את ערך המקסמין של חברת הביטוח

מבטחת	לבטח	לא לבטח
מבוטח		
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0





נחשב לדוגמא את ערך המקסמין של חברת הביטוח
אם החברה תבטח את המבוטח, המינימום שתקבל הוא מינוס תשעים

מבטחת	לבטח	לא לבטח
מבוטח		
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0





נחשב לדוגמא את ערך המקסמין של חברת הביטוח
 אם החברה תבטח את המבוטח, המינימום שתקבל הוא מינוס תשעים
 אם החברה לא תבטח את המבוטח, המינימום שתקבל הוא אפס

מבטחת	לבטח	לא לבטח
מבוטח		
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0





נחשב לדוגמא את ערך המקסמין של חברת הביטוח
 אם החברה תבטח את המבוטח, המינימום שתקבל הוא מינוס תשעים
 אם החברה לא תבטח את המבוטח, המינימום שתקבל הוא אפס

לכן ערך המקסמין הוא אפס, והאסטרטגיה שתבטיח אותו היא לא לבטח

מבטחת	לבטח	לא לבטח
מבוטח		
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0





נזכר במשחק הסטארט-אפ בו שתי שחקניות מקימות חברה, ומחליטות כמה להשקיע בה מ-0 עד 1. התשלום לשחקנית הראשונה הוא

$$u_1(x, y) = \frac{x + y + xy}{2} + (1 - x)^2$$

עבור בחירת אסטרטגיה כלשהי של השחקנית הראשונה, אנחנו רוצים לדעת מהו הערך המינימלי שהיא עשויה לקבל.

כלומר הפעם x הוא קבוע, ואנחנו מחפשים את ערך y שייתן תוצאה מינימלית. ערך y עצמו לא באמת מעניין אותנו אלא התשלום בערך זה.





נציג את התשלום כפונקציה של y .

$$u_1(x, y) = \left(\frac{1+x}{2}\right)y + 1 - \frac{3}{2}x + x^2$$





נציג את התשלום כפונקציה של y .

$$u_1(x, y) = \left(\frac{1+x}{2}\right)y + 1 - \frac{3}{2}x + x^2$$

זהו קו ישר עם שיפוע חיובי, המינימום הוא בקצה השמאלי $y=0$.





נציג את התשלום כפונקציה של y .

$$u_1(x, y) = \left(\frac{1+x}{2}\right)y + 1 - \frac{3}{2}x + x^2$$

זהו קו ישר עם שיפוע חיובי, המינימום הוא בקצה השמאלי $y=0$.

לכן התשלום המינימלי לשחקנית הראשונה בהנתן שתשקיע x הוא

$$x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$





נציג את התשלום כפונקציה של y .

$$u_1(x, y) = \left(\frac{1+x}{2}\right)y + 1 - \frac{3}{2}x + x^2$$

זהו קו ישר עם שיפוע חיובי, המינימום הוא בקצה השמאלי $y=0$.

לכן התשלום המינימלי לשחקנית הראשונה בהנתן שתשקיע x הוא

$$x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

כעת השחקנית הראשונה רוצה לבחור את ערך x עבורו התשלום המינימלי הוא הגבוה ביותר ביחס לאסטרטגיות אחרות





מדובר בפרבולה מחייכת, ולכן הערך המקסימלי שלה הוא באחד הקצוות.
אם השחקנית הראשונה תשקיע את מלוא הזמן ($x=1$) מובטח לה תשלום של חצי.
אם השחקנית הראשונה לא תשקיע מאמץ כלל ($x=0$) מובטח לה תשלום של 1.

לכן ערך המקסמין שלה הוא 1, ואסטרטגית המקסמין היא לא להכנס לסטארט-אפ מלכתחילה.





תורת המשחקים

משחקי סכום אפס

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University



משחק סכום אפס הוא משחק אסטרטגי בין שני שחקנים, כך שסכום התשלומים שלהם בכל וקטור אסטרטגיות הוא אפס.

במילים פשוטות, התשלום של השחקן השני הוא תמיד מינוס התשלום של השחקן הראשון.

במשחקים אלה נרשום בטבלה רק את התשלום של השחקן הראשון.

משחק סכום אפס הוא משחק אסטרטגי בין שני שחקנים, כך שסכום התשלומים שלהם בכל וקטור אסטרטגיות הוא אפס.

במילים פשוטות, התשלום של השחקן השני הוא תמיד מינוס התשלום של השחקן הראשון.

במשחקים אלה נרשום בטבלה רק את התשלום של השחקן הראשון.

לדוגמא:

שחקנית פרט	זוג	פרט
שחקן זוג	1	-1
פרט	-1	1

נסמן את פונקציית התשלום של השחקן הראשון ב-ט.

ערך המקסמין של השחקן הראשון, נקרא ערך המקסמין של המשחק.





נסמן את פונקציית התשלום של השחקן הראשון ב- u .

ערך המקסמין של השחקן הראשון, נקרא ערך המקסמין של המשחק.

עבור השחקן השני, התשלום המינימלי עבור אסטרטגיה מסוימת יתקבל כאשר פונקציית התשלום u תהיה מקסימלית. הרי ככל שהשחקן הראשון מרוויח, השחקן השני מפסיד.



נסמן את פונקציית התשלום של השחקן הראשון ב- u .

ערך המקסמין של השחקן הראשון, נקרא ערך המקסמין של המשחק.

עבור השחקן השני, התשלום המינימלי עבור אסטרטגיה מסוימת יתקבל כאשר פונקציית התשלום u תהיה מקסימלית. הרי ככל שהשחקן הראשון מרוויח, השחקן השני מפסיד.

מבין האסטרטגיות של השחקן השני הוא יעדיף את זו בה התשלום המקסימלי הוא הנמוך ביותר. הרי אם השחקן הראשון יקבל תשלום מינימלי, השחקן השני ירוויח.

נסמן את פונקציית התשלום של השחקן הראשון ב- u .

ערך המקסמין של השחקן הראשון, נקרא ערך המקסמין של המשחק.

עבור השחקן השני, התשלום המינימלי עבור אסטרטגיה מסוימת יתקבל כאשר פונקציית התשלום u תהיה מקסימלית. הרי ככל שהשחקן הראשון מרוויח, השחקן השני מפסיד.

מבין האסטרטגיות של השחקן השני הוא יעדיף את זו בה התשלום המקסימלי הוא הנמוך ביותר. הרי אם השחקן הראשון יקבל תשלום מינימלי, השחקן השני ירוויח.

ערך התשלום המינימלי של u מבין התשלומים המקסימליים של האסטרטגיות של השחקן השני נקרא ערך המינימקס של המשחק.



בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

נציג את משחק בעיטות הפנדל כמשחק סכום אפס.

התשלום לשוער הוא 50 אחוז פחות הסיכוי להבקעת שער.

שוער	שמאל	מרכז	ימין
שמאל	-10	-30	-40
מרכז	-50	50	-50
ימין	-45	-30	5



בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

נציג את משחק בעיטות הפנדל כמשחק סכום אפס.

התשלום לשוער הוא 50 אחוז פחות הסיכוי להבקעת שער.

שוער	שמאל	מרכז	ימין	מיני
שמאל	-10	-30	-40	-40
מרכז	-50	50	-50	-50
ימין	-45	-30	5	-45
מקסי				



בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

נציג את משחק בעיטות הפנדל כמשחק סכום אפס.

התשלום לשוער הוא 50 אחוז פחות הסיכוי להבקעת שער.

שוער	שמאל	מרכז	ימין	מיני
שמאל	-10	-30	-40	-40
מרכז	-50	50	-50	-50
ימין	-45	-30	5	-45
מקסי'	-10	50	5	



בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

נציג את משחק בעיטות הפנדל כמשחק סכום אפס.

התשלום לשוער הוא 50 אחוז פחות הסיכוי להבקעת שער.

שוער	שמאל	מרכז	ימין	מיני
שמאל	-10	-30	-40	-40
מרכז	-50	50	-50	-50
ימין	-45	-30	5	-45
מקסי'	-10	50	5	-40



בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

כלומר ערך המקסמין של המשחק הוא מינוס 40, ואילו ערך המינימקס הוא מינוס 10.

שוער	שמאל	מרכז	ימין	מיני
שוער שמאל	-10	-30	-40	-40
שוער מרכז	-50	50	-50	-50
שוער ימין	-45	-30	5	-45
מקסי'	-10	50	5	-40



בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

כלומר ערך המקסמין של המשחק הוא מינוס 40, ואילו ערך המינימקס הוא מינוס 10.

הבועט יכול להבטיח לעצמו הבקעה ב60 אחוז, והשוער יכול להבטיח שהבועט לא יבקיע ביותר מ90 אחוז.

שוער	בועט	שמאל	מרכז	ימין	מינ'
שמאל		-10	-30	-40	-40
מרכז		-50	50	-50	-50
ימין		-45	-30	5	-45
מקס'		-10	50	5	-40
					-10



השחקן הראשון יכול להבטיח שהוא יקבל **לפחות** את ערך המקסמין.



השחקן הראשון יכול להבטיח שהוא יקבל **לפחות** את ערך המקסמין.

השחקן השני יכול להבטיח שהשחקן הראשון יקבל **הכי הרבה** את ערך המינמקס.

השחקן הראשון יכול להבטיח שהוא יקבל **לפחות** את ערך המקסמין.

השחקן השני יכול להבטיח שהשחקן הראשון יקבל **הכי הרבה** את ערך המינמקס.

לכן ערך המקסמין קטן או שווה לערך המינמקס.

השחקן הראשון יכול להבטיח שהוא יקבל **לפחות** את ערך המקסמין.

השחקן השני יכול להבטיח שהשחקן הראשון יקבל **הכי הרבה** את ערך המינמקס.

לכן ערך המקסמין קטן או שווה לערך המינמקס.

האם יש קשר בין ערכי המקסמין ומינמקס לשיווי משקל?

טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינימקס.



טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינימקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בא.
עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.



טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינימקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בא.
עבור אסטרטגיה z של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.





טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינימקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בא.
עבור אסטרטגיה z של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

מכאן, x גדול או שווה לערך המינימקס, הרי ערך המינימקס הוא הערך הנמוך ביותר מבין הערכים המקסימליים של u עבור אסטרטגיות של השחקן השני.





טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המינסמין שווה לערך המינסמקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בא. עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

מכאן, x גדול או שווה לערך המינסמקס, הרי ערך המינסמקס הוא הערך הנמוך ביותר מבין הערכים המקסימיים של u עבור אסטרטגיות של השחקן השני.

עבור אסטרטגיה זו של השחקן הראשון, השחקן השני לא יכול להשיג תשלום נמוך יותר. הרי מטרתו להשיג ערך נמוך ככל הניתן של u , וזו נקודת שיווי משקל.





טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינימקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בא. עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

מכאן, x גדול או שווה לערך המינימקס, הרי ערך המינימקס הוא הערך הנמוך ביותר מבין הערכים המקסימליים של u עבור אסטרטגיות של השחקן השני.

עבור אסטרטגיה זו של השחקן הראשון, השחקן השני לא יכול להשיג תשלום נמוך יותר. הרי מטרתו להשיג ערך נמוך ככל הניתן של u , וזו נקודת שיווי משקל.

כלומר x הוא הערך המינימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן הראשון.





טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינימקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בא. עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

מכאן, x גדול או שווה לערך המינימקס, הרי ערך המינימקס הוא הערך הנמוך ביותר מבין הערכים המקסימליים של u עבור אסטרטגיות של השחקן השני.

עבור אסטרטגיה זו של השחקן הראשון, השחקן השני לא יכול להשיג תשלום נמוך יותר. הרי מטרתו להשיג ערך נמוך ככל הניתן של u , וזו נקודת שיווי משקל.

כלומר x הוא הערך המינימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן הראשון. ומכאן x קטן או שווה מערך המקסמין.





טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינימקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בא. עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

מכאן, x גדול או שווה לערך המינימקס, הרי ערך המינימקס הוא הערך הנמוך ביותר מבין הערכים המקסימליים של u עבור אסטרטגיות של השחקן השני.

עבור אסטרטגיה זו של השחקן הראשון, השחקן השני לא יכול להשיג תשלום נמוך יותר. הרי מטרתו להשיג ערך נמוך ככל הניתן של u , וזו נקודת שיווי משקל.

כלומר x הוא הערך המינימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן הראשון. ומכאן x קטן או שווה מערך המקסמין.

סה"כ x גדול או שווה למינימקס, שגדול או שווה למקסמין שגדול או שווה לא. לכן שלושתם שווים.



טענה: אם ערך המינמקס שווה לערך המקסמין אזי יש נקודת שיווי משקל



טענה: אם ערך המינמקס שווה לערך המקסמין אזי יש נקודת שיווי משקל

הוכחה: נסמן בא את התשלום u כאשר השחקן הראשון משחק את אסטרטגיית המקסמין, והשחקן השני משחק את אסטרטגיית המינמקס.



טענה: אם ערך המינמקס שווה לערך המקסמין אזי יש נקודת שיווי משקל

הוכחה: נסמן בא את התשלום u כאשר השחקן הראשון משחק את אסטרטגיית המקסמין, והשחקן השני משחק את אסטרטגיית המינמקס.

השחקן הראשון הבטיח לעצמו לפחות את ערך המקסמין, והשחקן השני הבטיח שהשחקן הראשון לא יקבל יותר מהמינמקס. כיוון ששני הערכים שווים, יוצא שא שווה לשניהם.



טענה: אם ערך המינמקס שווה לערך המקסמין אזי יש נקודת שיווי משקל

הוכחה: נסמן בא את התשלום u כאשר השחקן הראשון משחק את אסטרטגיית המקסמין, והשחקן השני משחק את אסטרטגיית המינמקס.

השחקן הראשון הבטיח לעצמו לפחות את ערך המקסמין, והשחקן השני הבטיח שהשחקן הראשון לא יקבל יותר מהמינמקס. כיוון ששני הערכים שווים, יוצא שא שווה לשניהם.

כיוון שהשחקן השני הבטיח שהשחקן הראשון לא יכול להרוויח יותר מערך זה, והשחקן הראשון הבטיח שהשחקן השני לא יכול לגרום לו להרוויח פחות מערך זה, מדובר בנקודת שיווי משקל.





מסקנה:

במשחק סכום אפס יש שיווי משקל אם ורק אם ערך המקסמין שווה לערך המינימקס.





מסקנה:

במשחק סכום אפס יש שיווי משקל אם ורק אם ערך המקסמין שווה לערך המינימקס.

משחק סכום אפס נקרא משחק עם ערך כאשר יש לו נקודת שיווי משקל.

ערך המשחק שווה למקסמין ולמינימקס, והוא התשלום בנקודת שיווי המשקל.



נשחק במשחק הקונה והמוכר.

<https://sale.math-wiki.com>

מוכר	מחיר גבוה	מחיר הוגן	מחיר נמוך
קונה			
מתמקחת	-5	10	0
מסכימה	-9	0	10
מציעה עוד	-10	-15	-11



נמצא את ערך המקסמיו, וערך המינמקס

מוכר	מחיר גבוה	מחיר הוגן	מחיר נמוך	מינ'
קונה				
מתמקחת	-5	10	0	-5
מסכימה	-9	0	10	-9
מציעה עוד	-10	-15	-11	-15
מקס'	-5	10	10	



למשחק יש ערך, ולכן יש לו נקודת שיווי משקל.

מוכר	מחיר גבוה	מחיר הוגן	מחיר נמוך	מינ'
קונה				
מתמקחת	-5	10	0	-5
מסכימה	-9	0	10	-9
מציעה עוד	-10	-15	-11	-15
מקס'	-5	10	10	-5



לא כל משבצת בה התשלום שווה לערך המשחק היא נקודת שיווי משקל

מוכר	מחיר גבוה	מחיר הוגן	מחיר נמוך	מינ'
קונה				
מתמקחת	-5	10	0	-5
מסכימה	-9	0	10	-9
מציעה עוד	-10	-15	-5	-15
מקס'	-5	10	10	-5





תורת המשחקים

משחקים בצורה רחבה

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University





משחק בצורה רחבה מוגדר לרוב באמצעות עץ (סוג של גרף). נגדיר אותו כאן בצורה רקורסיבית.

בהנתן מספר סופי של שחקנים נגדיר משחק בצורה רחבה כמשחק בו אחד השחקנים יכול לבחור בין מספר סופי של משחקים בצורה רחבה, או שלאף שחקן אין בחירה אך יש תשלום לכלל השחקנים והמשחק נגמר.





משחק בצורה רחבה מוגדר לרוב באמצעות עץ (סוג של גרף). נגדיר אותו כאן בצורה רקורסיבית.

בהנתן מספר סופי של שחקנים נגדיר משחק בצורה רחבה כמשחק בו אחד השחקנים יכול לבחור בין מספר סופי של משחקים בצורה רחבה, או שלאף שחקן אין בחירה אך יש תשלום לכלל השחקנים והמשחק נגמר.

לדוגמא, משחק האולטימטום הוא משחק בצורה רחבה.



משחק בצורה רחבה מוגדר לרוב באמצעות עץ (סוג של גרף). נגדיר אותו כאן בצורה רקורסיבית.

בהנתן מספר סופי של שחקנים נגדיר משחק בצורה רחבה כמשחק בו אחד השחקנים יכול לבחור בין מספר סופי של משחקים בצורה רחבה, או שלאף שחקן אין בחירה אך יש תשלום לכלל השחקנים והמשחק נגמר.

לדוגמא, משחק האולטימטום הוא משחק בצורה רחבה. בשלב ראשון השחקן הראשון בוחר מספר בין 0 ל100.





משחק בצורה רחבה מוגדר לרוב באמצעות עץ (סוג של גרף). נגדיר אותו כאן בצורה רקורסיבית.

בהנתן מספר סופי של שחקנים נגדיר משחק בצורה רחבה כמשחק בו אחד השחקנים יכול לבחור בין מספר סופי של משחקים בצורה רחבה, או שלאף שחקן אין בחירה אך יש תשלום לכלל השחקנים והמשחק נגמר.

לדוגמא, משחק האולטימטום הוא משחק בצורה רחבה.

בשלב ראשון השחקן הראשון בוחר מספר בין 0 ל 100.

בשלב שני אנו שוב במשחק בצורה רחבה, אך הפעם תורו של השחקן השני לבחור להסכים או שלא להסכים.





משחק בצורה רחבה מוגדר לרוב באמצעות עץ (סוג של גרף). נגדיר אותו כאן בצורה רקורסיבית.

בהנתן מספר סופי של שחקנים נגדיר משחק בצורה רחבה כמשחק בו אחד השחקנים יכול לבחור בין מספר סופי של משחקים בצורה רחבה, או שלאף שחקן אין בחירה אך יש תשלום לכלל השחקנים והמשחק נגמר.

לדוגמא, משחק האולטימטום הוא משחק בצורה רחבה.

בשלב ראשון השחקן הראשון בוחר מספר בין 0 ל 100.

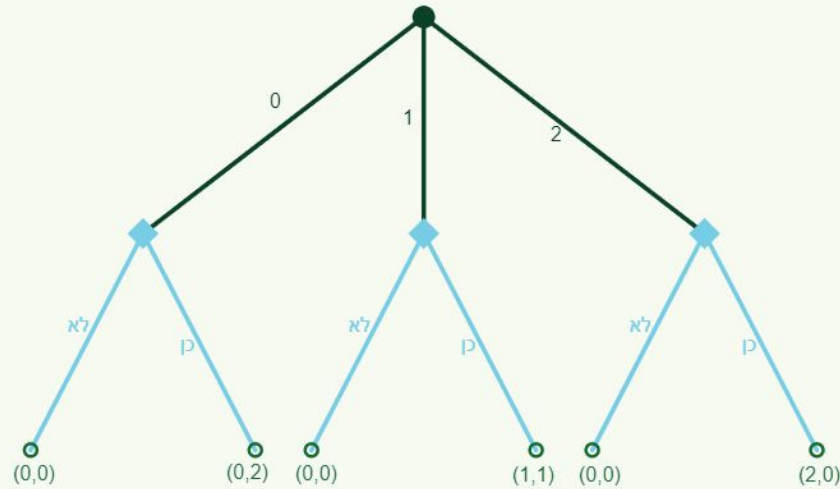
בשלב שני אנו שוב במשחק בצורה רחבה, אך הפעם תורו של השחקן השני לבחור להסכים או שלא להסכים.

בשלב השלישי אנחנו מגיעים לסוף המשחק בו מתואר התשלום לשני השחקנים.



משחק האולטימטום בצורה רחבה

נציג את עץ משחק האולטימטום בצורה רחבה.
לצורך הפשטות, נניח שהמשחק הוא במספרים שלמים ועד 2.

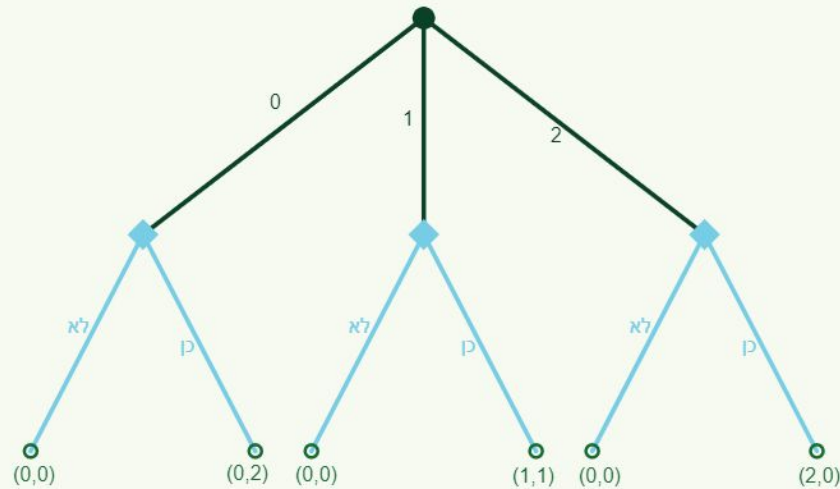


משחק האולטימטום בצורה רחבה

נציג את עץ משחק האולטימטום בצורה רחבה.

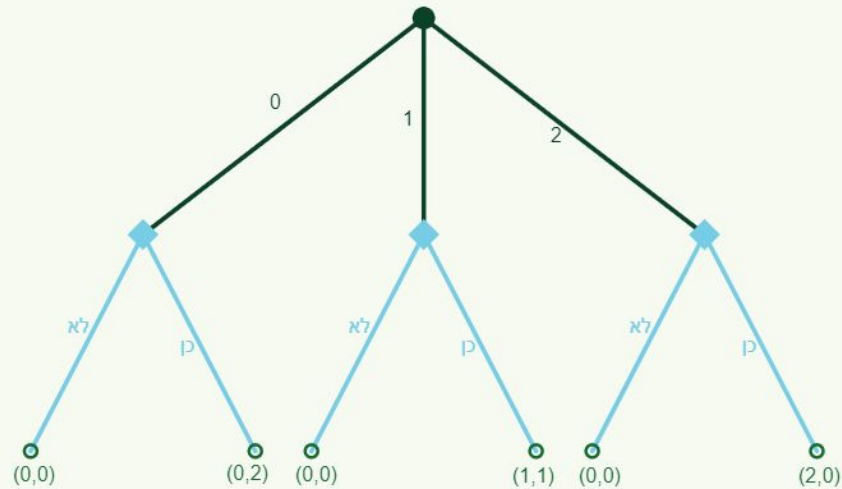
לצורך הפשטות, נניח שהמשחק הוא במספרים שלמים ועד 2.

לשחקן הראשון ישנן שלוש אסטרטגיות, ואילו לשחקן השני יש שמונה אסטרטגיות - להחליט מראש כן או לא בכל אפשרות.



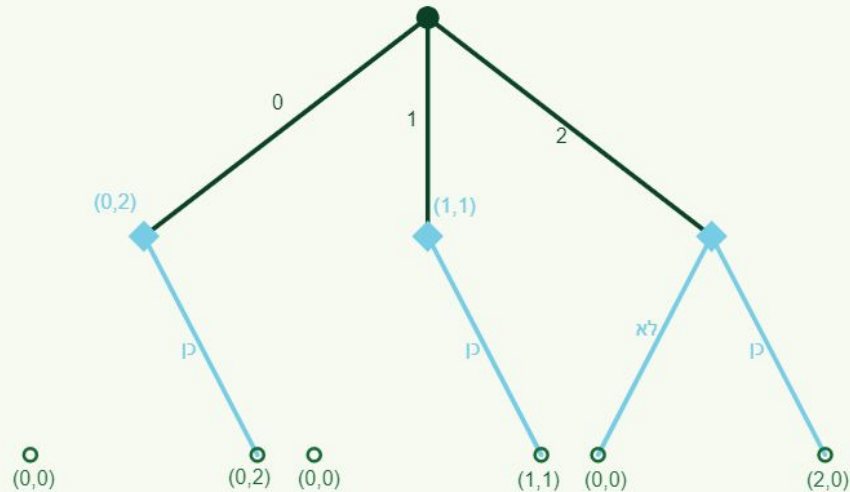
משחק האולימטום בצורה רחבה

ננתח את המשחק באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק בתתי המשחקים.



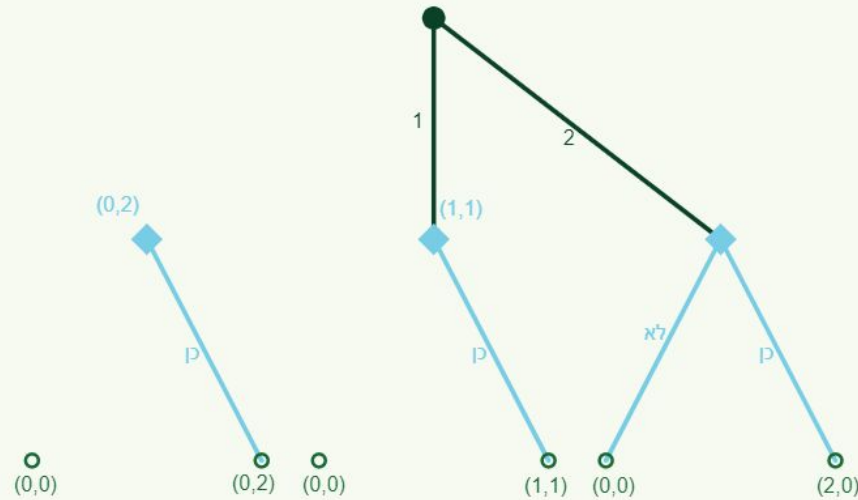
משחק האולימטום בצורה רחבה

ננתח את המשחק באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק בתתי המשחקים.
ראשית נמחק אסטרטגיות נשלטות חזק של השחקן השני.



משחק האולימטום בצורה רחבה

ננתח את המשחק באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק בתתי המשחקים.
ראשית נמחק אסטרטגיות נשלטות חזק של השחקן השני.
כעת נמחק אסטרטגיה נשלטת חזק של השחקן הראשון.





ראינו שכל משחק בצורה רחבה ניתן לתאר בצורה אסטרטגית.
אסטרטגיה של שחקן היא קבוצת הבחירות עבור כל אחד מהקודקודים.





ראינו שכל משחק בצורה רחבה ניתן לתאר בצורה אסטרטגית.
אסטרטגיה של שחקן היא קבוצת הבחירות עבור כל אחד מהקודקודים.
האם כל משחק אסטרטגי ניתן להציג בצורה רחבה?





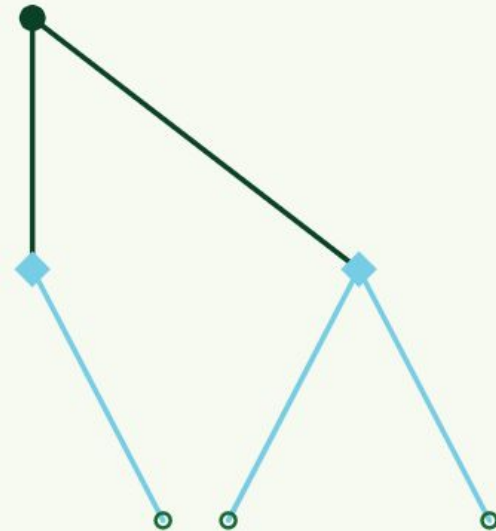
נביט במשחק אסטרטגי בין שני שחקנים, בו לכל אחד השחקנים שתי אסטרטגיות.
כיוון שלשחקן השני שתי אסטרטגיות, באחד מתתי המשחקים אין לו בחירה.





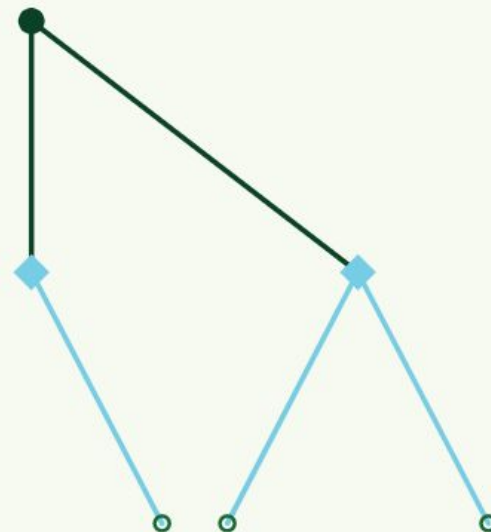
נביט במשחק אסטרטגי בין שני שחקנים, בו לכל אחד השחקנים שתי אסטרטגיות.

כיוון שלשחקן השני שתי אסטרטגיות, באחד מתתי המשחקים אין לו בחירה.





כלומר עבור אחת האסטרטגיות של השחקן הראשון, תוצאת המשחק קבועה לכל אסטרטגיה של השחקן השני.





כלומר עבור אחת האסטרטגיות של השחקן הראשון, תוצאת המשחק קבועה לכל אסטרטגיה של השחקן השני.
 זה וודאי לא חייב להיות המצב במשחק אסטרטגי כללי, לדוגמא נגדית:

שחקנית פרט	זוג	פרט
שחקן זוג	1	-1
פרט	-1	1



נביט במשחקים בצורה רחבה מסוג ספציפי:

- שני שחקנים
- התוצאות האפשרויות הן תיקו או ניצחון לאחד הצדדים
- המשחק נגמר בוודאות אחרי מספר סופי של צעדים



נביט במשחקים בצורה רחבה מסוג ספציפי:

- שני שחקנים
- התוצאות האפשרויות הן תיקו או ניצחון לאחד הצדדים
- המשחק נגמר בוודאות אחרי מספר סופי של צעדים

נקרא לאסטרטגיה של שחקן **אסטרטגית ניצחון** אם הוא לא יכול להפסיד כאשר הוא בוחר באסטרטגיה זו. שימו לב שהוא כן עשוי להגיע למצב של תיקו.



נביט במשחקים בצורה רחבה מסוג ספציפי:

- שני שחקנים
- התוצאות האפשרויות הן תיקו או ניצחון לאחד הצדדים
- המשחק נגמר בוודאות אחרי מספר סופי של צעדים

נקרא לאסטרטגיה של שחקן **אסטרטגית ניצחון** אם הוא לא יכול להפסיד כאשר הוא בוחר באסטרטגיה זו. שימו לב שהוא כן עשוי להגיע למצב של תיקו.

האם בהכרח לאחד משני השחקנים יש אסטרטגית ניצחון?



משפט: עבור המשחקים שהגדרנו בשקופית הקודמת, לפחות אחד השחקנים יכול להבטיח שלא יפסיד.

משפט: עבור המשחקים שהגדרנו בשקופית הקודמת, לפחות אחד השחקנים יכול להבטיח שלא יפסיד.

מסקנה: שח-מט הוא משחק כזה ולכן אחד בהכרח מתקיים אחד משלושת המשפטים הבאים:

- הלבן יכול לכפות ניצחון
- השחור יכול לכפות ניצחון
- שני הצדדים יכולים לכפות תיקו זה על זה

הוכחה:

נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).



הוכחה:

נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

עבור משחק עם אפס שלבים, זו בעצם תוצאה:

- אם היא תיקו, שני הצדדים הבטיחו שלא יפסידו.
- אם אחד השחקנים ניצח, הוא הבטיח שלא יפסיד.

הוכחה:

נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

עבור משחק עם אפס שלבים, זו בעצם תוצאה:

- אם היא תיקו, שני הצדדים הבטיחו שלא יפסידו.
- אם אחד השחקנים ניצח, הוא הבטיח שלא יפסיד.

בהנתן ח עד אליו הטענה נכונה, נוכיח שהטענה נכונה עבור ח.

הוכחה:

נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

עבור משחק עם אפס שלבים, זו בעצם תוצאה:

- אם היא תיקו, שני הצדדים הבטיחו שלא יפסידו.
- אם אחד השחקנים ניצח, הוא הבטיח שלא יפסיד.

בהנתן n עד אליו הטענה נכונה, נוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$.

יהי משחק עם $n+1$ מצבים. כל אחד מהמהלכים של השחקן הראשון יוביל לתת משחק עם פחות מצבים, המקיים את תנאי האינדוקציה.

הוכחה:

נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

עבור משחק עם אפס שלבים, זו בעצם תוצאה:

- אם היא תיקו, שני הצדדים הבטיחו שלא יפסידו.
- אם אחד השחקנים ניצח, הוא הבטיח שלא יפסיד.

בהנתן n עד אליו הטענה נכונה, נוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$.

יהי משחק עם $n+1$ מצבים. כל אחד מהמהלכים של השחקן הראשון יוביל לתת משחק עם פחות מצבים, המקיים את תנאי האינדוקציה.

אם באחד מתתי המשחקים הללו הוא יכול להבטיח שלא יפסיד, הרי שהוא יכול להבטיח שלא יפסיד במשחק המקורי ע"י שיבחר במהלך שהוביל לתת משחק זה.

הוכחה:

נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

עבור משחק עם אפס שלבים, זו בעצם תוצאה:

- אם היא תיקו, שני הצדדים הבטיחו שלא יפסידו.
- אם אחד השחקנים ניצח, הוא הבטיח שלא יפסיד.

בהנתן n עד אליו הטענה נכונה, נוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$.

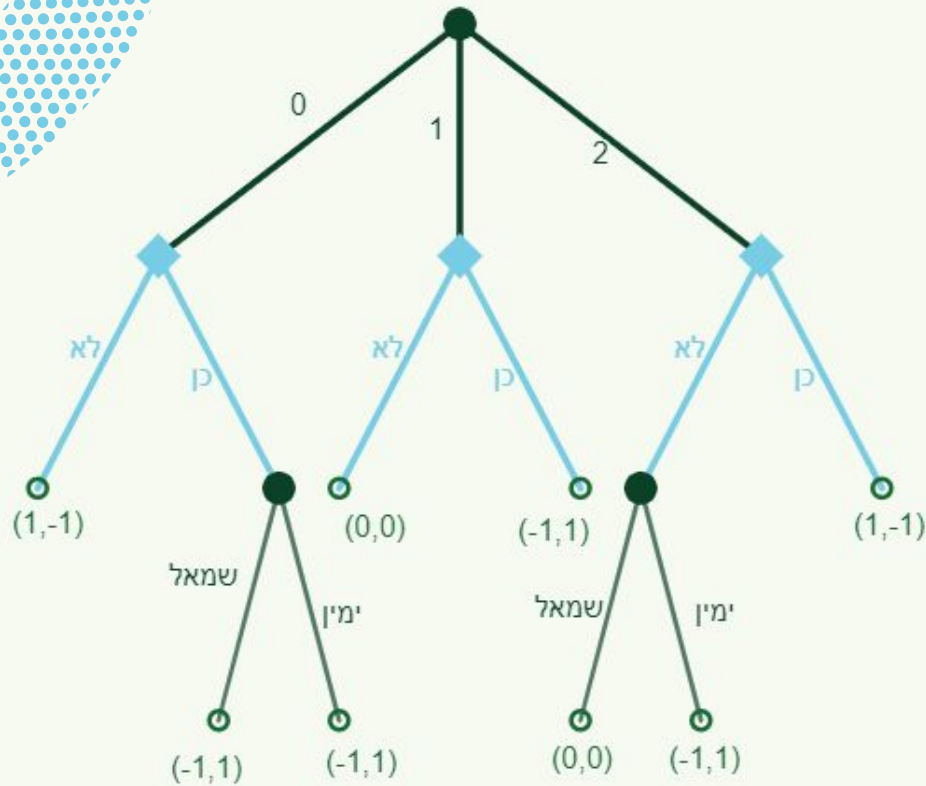
יהי משחק עם $n+1$ מצבים. כל אחד מהמהלכים של השחקן הראשון יוביל לתת משחק עם פחות מצבים, המקיים את תנאי האינדוקציה.

אם באחד מתתי המשחקים הללו הוא יכול להבטיח שלא יפסיד, הרי שהוא יכול להבטיח שלא יפסיד במשחק המקורי ע"י שיבחר במהלך שהוביל לתת משחק זה.

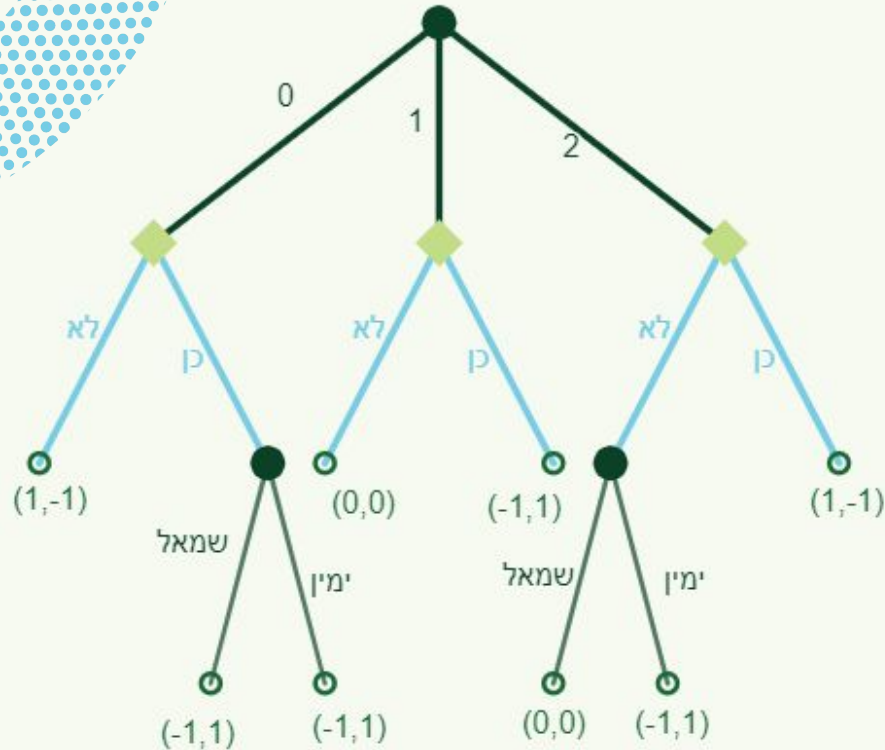
אם בכל תתי המשחקים הללו השחקן השני יכול להבטיח שלא יפסיד, אז הוא יכול להבטיח שלא יפסיד במשחק המקורי.

דוגמא למשפט צרמלו

מי ינצח במשחק הבא?



דוגמא למשפט צרמלו



מי ינצח במשחק הבא?

עבור כל אחד משלושת תתי המשחקים,

נרצה לדעת מי מנצח.

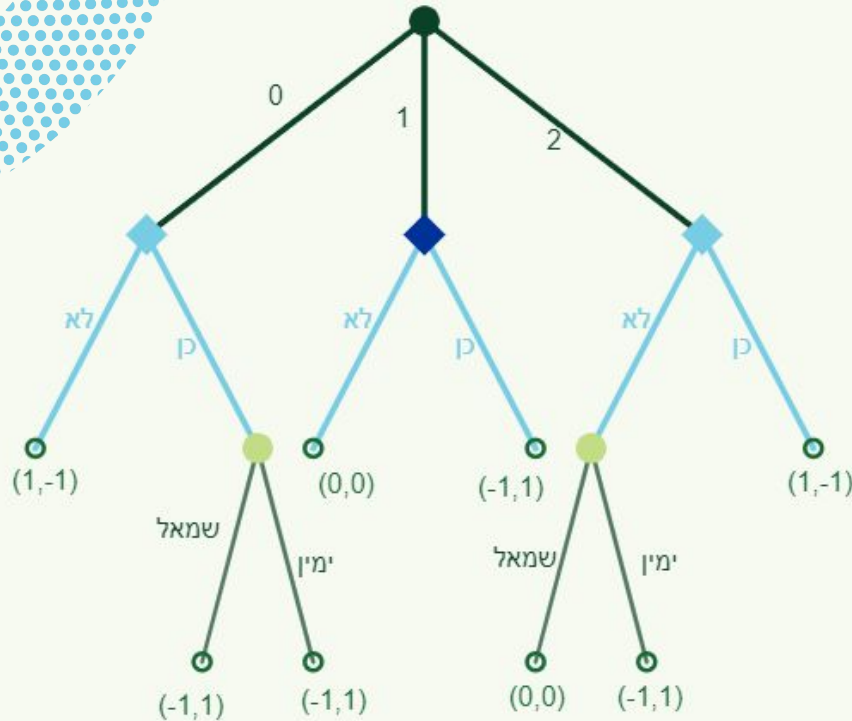
נסמן באדום ניצחון של השחקן הראשון,

בכחול ניצחון של השחקן השני, ובסגול

מצב בו שני הצדדים יכולים לא להפסיד.



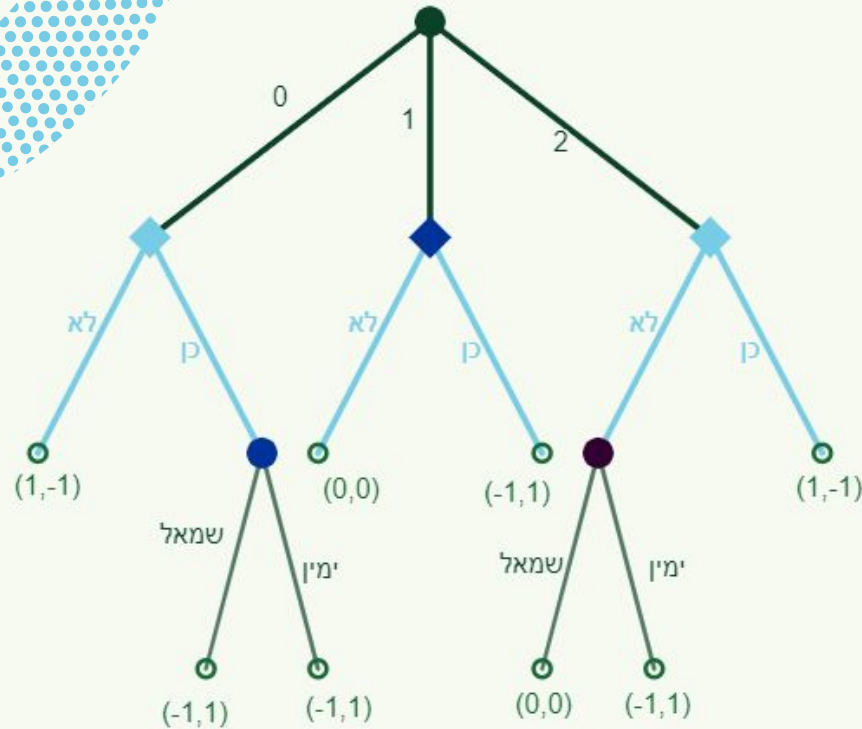
דוגמא למשפט צרמלו



בתת המשחק האמצעי השחקן השני מנצח, נותר לגלות מי מנצח בשני תתי המשחקים המסומנים.



דוגמא למשפט צרמלו

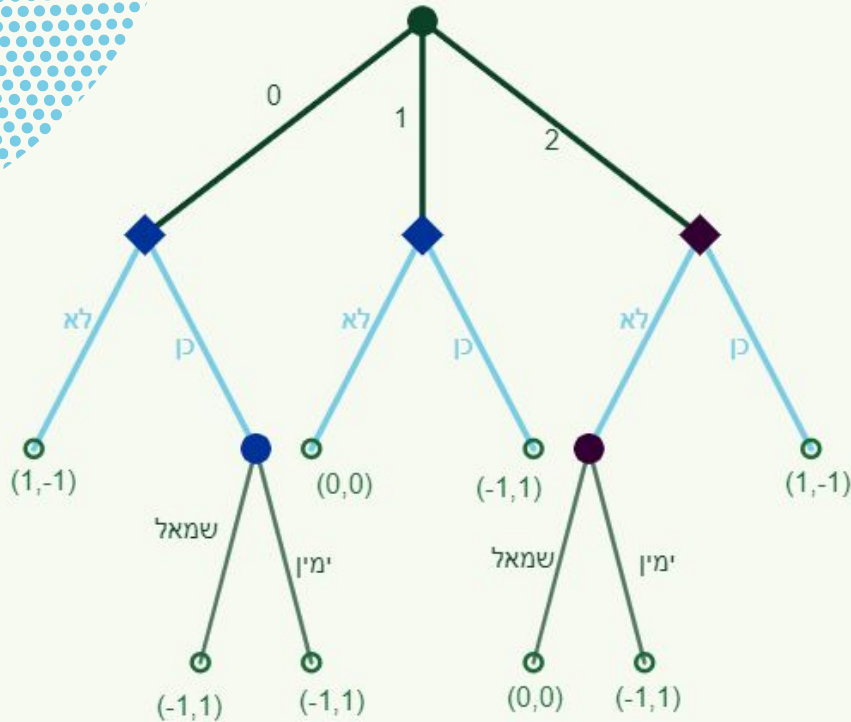


בתת המשחק האמצעי השחקן השני מנצח, נותר לגלות מי מנצח בשני תתי המשחקים המסומנים.

כעת אפשר להשלים את התשובה.



דוגמא למשפט צרמלו



שני השחקנים יכולים להבטיח שלא יפסידו, ומהלך המשחק הצפוי הוא:

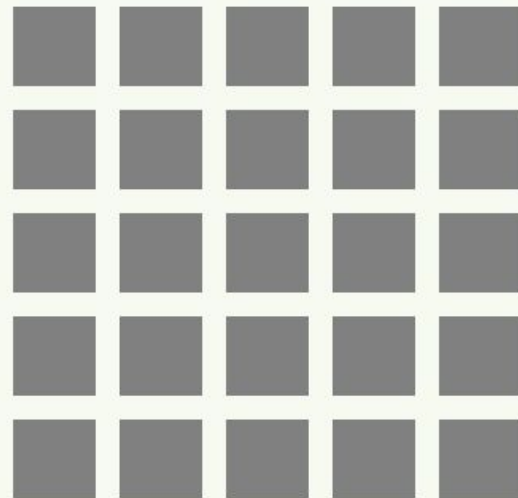
- 2 •
- לא •
- שמאל •



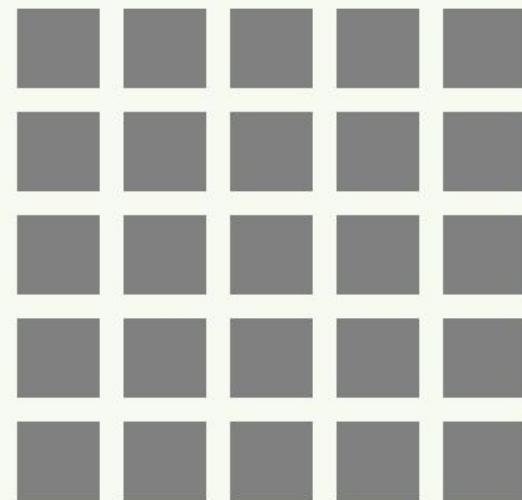


נתון לוח מלבני של משבצות, כל שחקן בתורו בוחר משבצת, ומוחק את כל המשבצות במלבן שנוצר בינה לבין המשבצת בפניה הימנית העליונה.

השחקן שלוחץ על המשבצת האחרונה, השמאלית התחתונה, מפסיד.

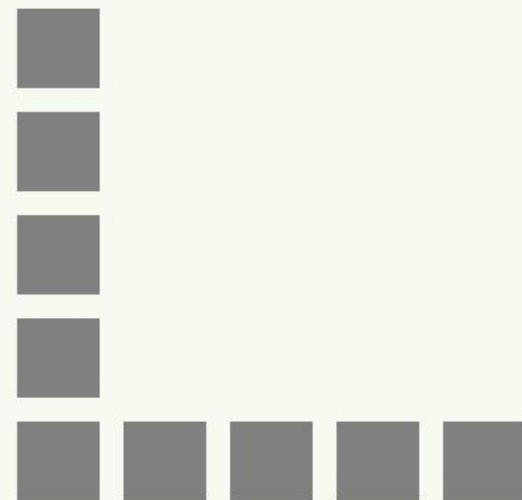


אם הלוח ריבועי, השחקן הראשון מנצח.



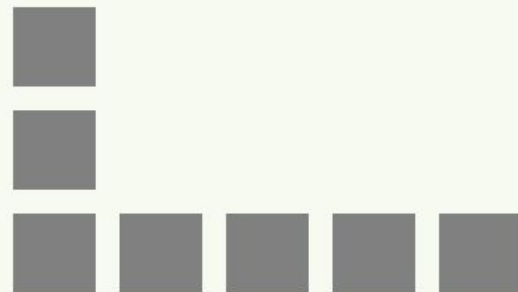


אם הלוח ריבועי, השחקן הראשון מנצח.
השחקן הראשון יבחר במשבצת בשורה הלפני אחרונה, ובעמודה השנייה משמאל.



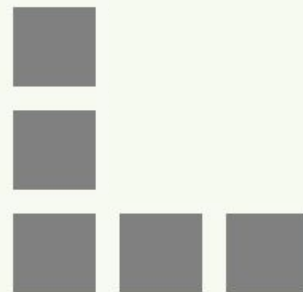


אם הלוח ריבועי, השחקן הראשון מנצח. השחקן הראשון יבחר במשבצת בשורה הלפני אחרונה, ובעמודה השנייה משמאל. כעת לכל מהלך של השחקן השני,



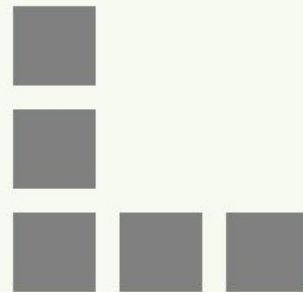


אם הלוח ריבועי, השחקן הראשון מנצח. השחקן הראשון יבחר במשבצת בשורה הלפני אחרונה, ובעמודה השנייה משמאל. כעת לכל מהלך של השחקן השני, השחקן הראשון יגיב באופן סימטרי.

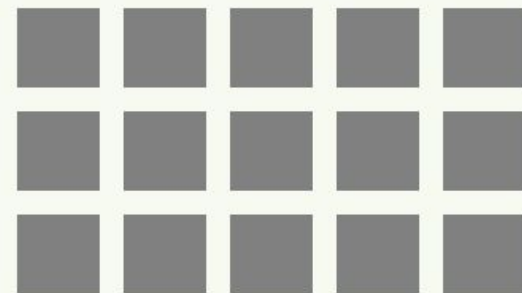




אם הלוח ריבועי, השחקן הראשון מנצח. השחקן הראשון יבחר במשבצת בשורה הלפני אחרונה, ובעמודה השנייה משמאל. כעת לכל מהלך של השחקן השני, השחקן הראשון יגיב באופן סימטרי. באופן זה, אחרי כל תור של השחקן השני, נותן לשחקן הראשון משבצת סימטרית ללחוץ עליה. לכן השחקן השני חייב ללחוץ על המשבצת האחרונה.

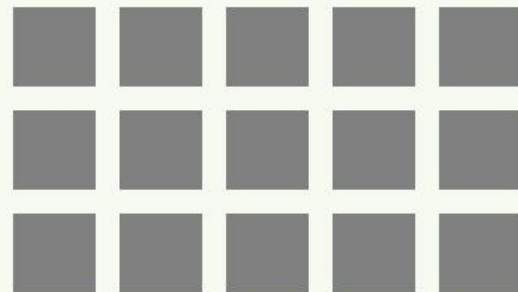


מה לגבי לוח מלבני שאינו ריבועי?



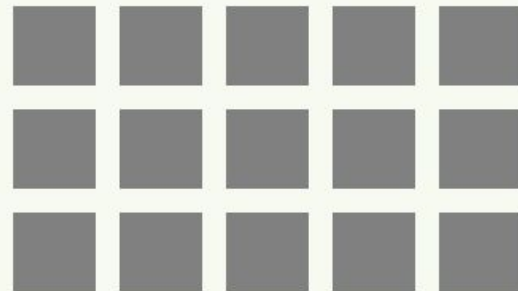


מה לגבי לוח שאינו מלבני?
לפי משפט צרמלו לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה נצחון (אין תיקו).
מי מהשחקנים מנצח?



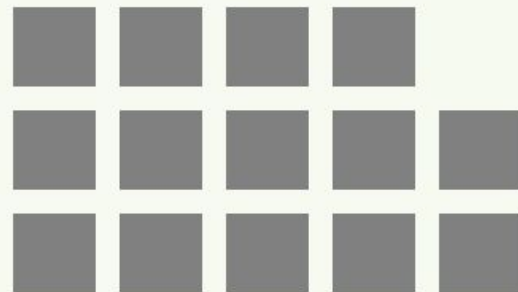


מה לגבי לוח שאינו מלבני?
לפי משפט צרמלו לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה נצחון (אין תיקו).
מי מהשחקנים מנצח?
נב"ש (נניח בשלילה) שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת. לכן לכל מהלך של השחקן הראשון, השחקן השני יכול לנצח.



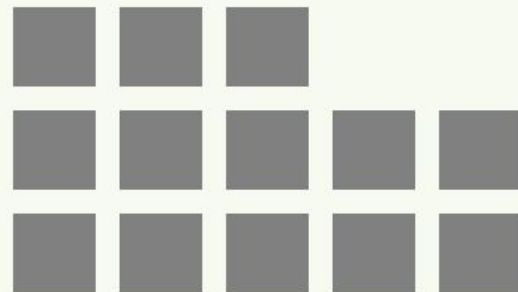


מה לגבי לוח שאינו מלבני?
לפי משפט צרמלו לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה נצחון (אין תיקו).
מי מהשחקנים מנצח?
נב"ש (נניח בשלילה) שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת. לכן לכל מהלך של השחקן הראשון, השחקן השני יכול לנצח.
השחקן הראשון ילחץ על המשבצת הימנית העליונה,





מה לגבי לוח שאינו מלבני?
לפי משפט צרמלו לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה נצחון (אין תיקו).
מי מהשחקנים מנצח?
נב"ש (נניח בשלילה) שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת. לכן לכל מהלך של השחקן הראשון, השחקן השני יכול לנצח.
השחקן הראשון ילחץ על המשבצת הימנית העליונה, והשחקן השני ילחץ במקום כלשהו שיבטיח עבורו ניצחון.





מה לגבי לוח שאינו מלבני?

לפי משפט צרמלו לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה נצחון (אין תיקו).

מי מהשחקנים מנצח?

נב"ש (נניח בשלילה) שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת. לכן לכל מהלך של השחקן

הראשון, השחקן השני יכול לנצח.

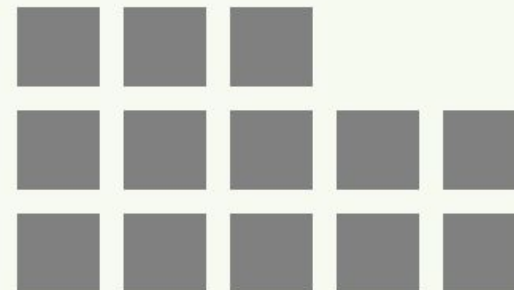
השחקן הראשון ילחץ על המשבצת הימנית העליונה, והשחקן השני ילחץ במקום

כלשהו שיבטיח עבורו ניצחון.

אבל אם השחקן הראשון היה לוחץ על המשבצת הזו מלכתחילה, הוא היה מקבל את

הלוח המנצח בעצמו! (הרי לחיצה על כל משבצת מוחקת את המשבצת הימנית

העליונה), בסתירה.





מה שמדהים הוא שאנחנו יודעים שהראשון מנצח, אך אין לנו מושג כיצד.

תוכלו לנצח את המחשב?

<https://chomp.math-wiki.com>

אם הצלחתם באתגר הראשון, האם תתמודדו עם השני?

<https://chomp.math-wiki.com/2>



אבא וביתו משחקים בגן שעשועים.

האב אומר לביתו שהגיע הזמן לחזור הבייתה, והבת אינה מעוניינת.

האב מאיים ומודיע "אם לא תבואי עכשיו, אני הולך".

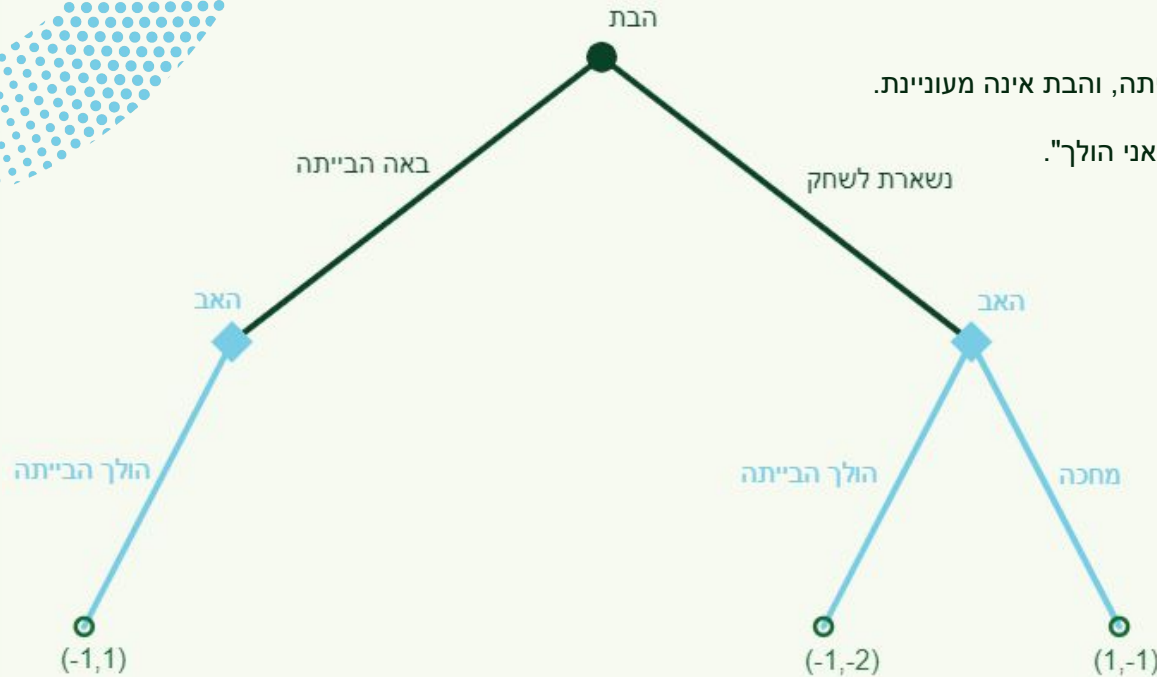


שיווי משקל משוכלל

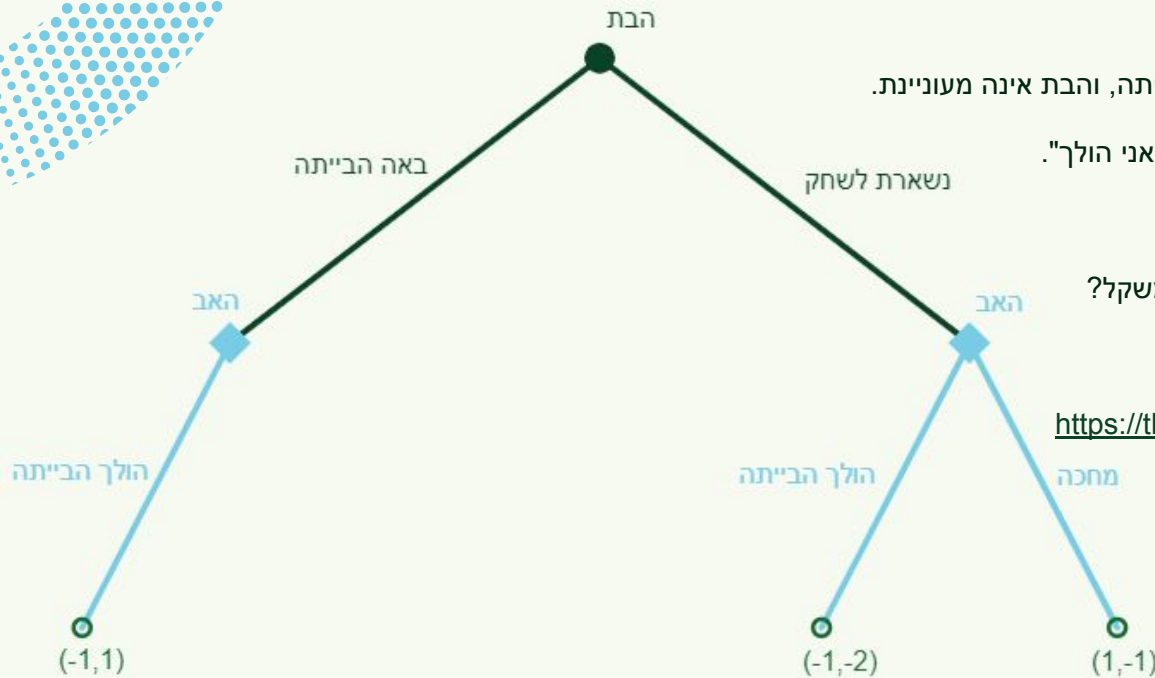
אבא וביתו משחקים בגן שעשועים.

האב אומר לביתו שהגיע הזמן לחזור הבייתה, והבת אינה מעוניינת.

האב מאיים ומודיע "אם לא תבואי עכשיו, אני הולך".



שיווי משקל משוכלל



אבא וביתו משחקים בגן שעשועים.

האב אומר לביתו שהגיע הזמן לחזור הבייתה, והבת אינה מעוניינת.

האב מאיים ומודיע "אם לא תבואי עכשיו, אני הולך".

(באה הבייתה, הולך הבייתה) היא שיווי משקל?

בואו נשחק, אתם תהיו הבנות:

<https://threat.math-wiki.com>

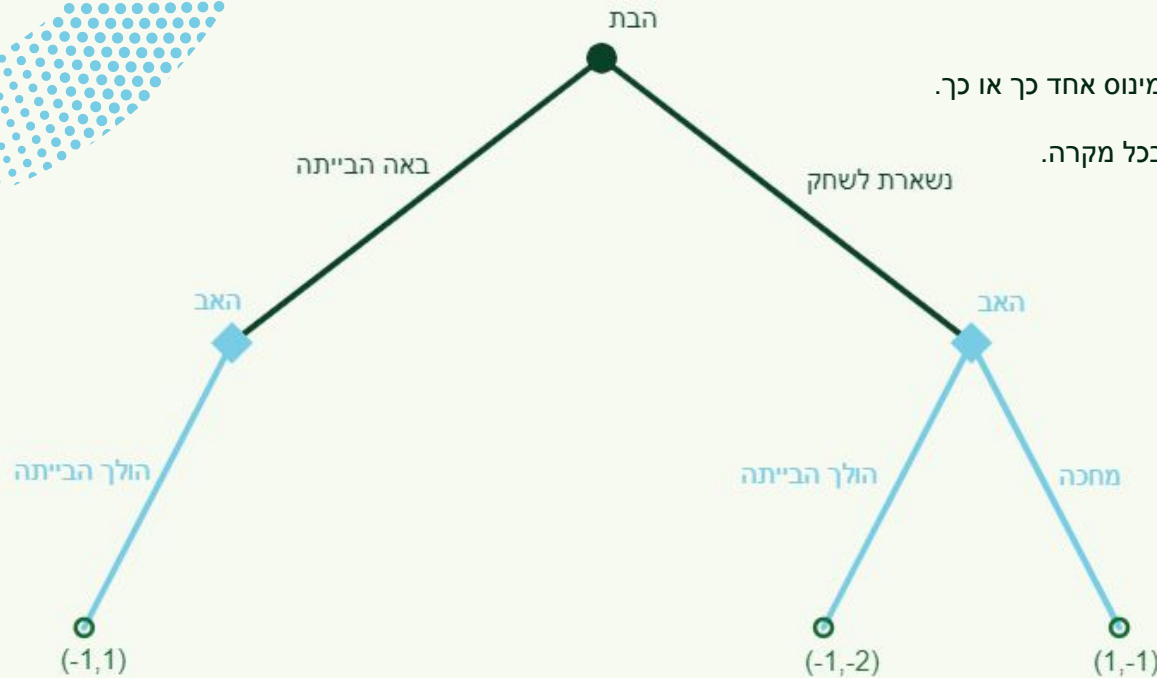


שיווי משקל משוכלל

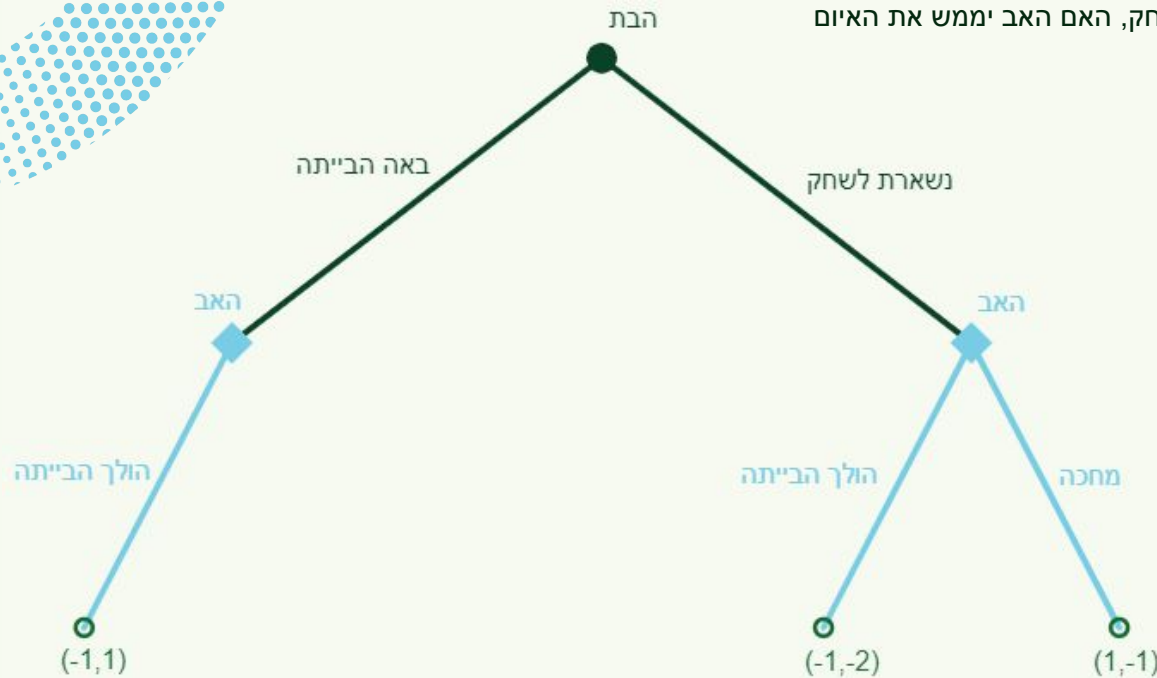
אכן הצעת האב היא נקודת שיווי משקל.

הרי אם הוא יעמוד במילתו, הבת תרוויח מינוס אחד כך או כך.

אם הבת תבוא הבייתה, הוא ירוויח אחד בכל מקרה.



שיווי משקל משוכלל



אבל מה יקרה אם בפועל הבת תבחר לשחק, האם האב יממש את האיום שלו?

אם הוא רציונאלי (ואבא סביר) אז לא.
זה נקרא איום בלתי אמין.

כיצד נמנע ממצבים לא יציבים אלו?





וקטור אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה נקרא שיווי משקל משוכלל אם הוא מהווה שיווי משקל בכל תת משחק של המשחק המקורי.





וקטור אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה נקרא שיווי משקל משוכלל אם הוא מהווה שיווי משקל בכל תת משחק של המשחק המקורי.

אם נביט בתת המשחק בו הבת נשארת לשחק, נגלה שהאסטרטגיה של האב ללכת הבייתה היא נשלטת חזק, והוא וודאי לא יבחר בה.





תורת המשחקים

שידוכים יציבים

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University





בסיום לימודי הרפואה, הבוגרים מתקבלים להתמחות בבתי חולים.

לבוגרים יש סולם עדיפויות, וכך גם לבתי החולים.



בסיום לימודי הרפואה, הבוגרים מתקבלים להתמחות בבתי חולים.

לבוגרים יש סולם עדיפויות, וכך גם לבתי החולים.

כיצד יתבצע השיבוץ? מהו שיבוץ "טוב"?



בסיום לימודי הרפואה, הבוגרים מתקבלים להתמחות בבתי חולים.

לבוגרים יש סולם עדיפויות, וכך גם לבתי החולים.

כיצד יתבצע השיבוץ? מהו שיבוץ "טוב"?

הוקמה מערכת מרכזית, מי עשוי להתנגד לה?



בסיום לימודי הרפואה, הבוגרים מתקבלים להתמחות בבתי חולים.

לבוגרים יש סולם עדיפויות, וכך גם לבתי החולים.

כיצד יתבצע השיבוץ? מהו שיבוץ "טוב"?

הוקמה מערכת מרכזית, מי עשוי להתנגד לה?

דוגמאות אמיתיות נוספות:

תרומת כליות.

שיבוץ ילדים לגנים.

כל גבר מתעדף את הנשים בסדר מסויים, וכך גם ההפך.

עבור כל זוג, העדפת הגבר את האישה רשומה משמאל, והעדפת האישה את הגבר רשומה מימין.

נשים גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גונן	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4



נניח והגברים יחליטו ביניהם על הזוגות: אהוד וגלית, בני ובר, גון ואלה, דני ודפנה

נשים גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גון	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4



נניח והגברים יחליטו ביניהם על הזוגות: אהוד וגלית, בני ובר, גון ואלה, דני ודפנה

האם הגברים יהיו מרוצים? האם הנשים? האם זו בכלל השאלה הנכונה?

נשים גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גון	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4



אהוד ואלה מעדיפים זה את זו על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם, ולכן יהיו שני גירושין וחתונה

נשים גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גונן	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4



אהוד ואלה מעדיפים זה את זו על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם, ולכן יהיו שני גירושין וחתונה

גונן וגלית לא יהיו מרוצים במיוחד...

נשים גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גונן	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4





הגדרה: שידוך נקרא יציב אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).





הגדרה: שידוך נקרא יציב אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).

האם קיים שידוך יציב?





הגדרה: שידוך נקרא יציב אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).

האם קיים שידוך יציב?

האם קיימים מספר שידוכים יציבים שונים?





הגדרה: שידוך נקרא יציב אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).

האם קיים שידוך יציב?

האם קיימים מספר שידוכים יציבים שונים?

איך ניתן להשוות בין שידוכים יציבים שונים?





הגדרה: שידוך נקרא יציב אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).

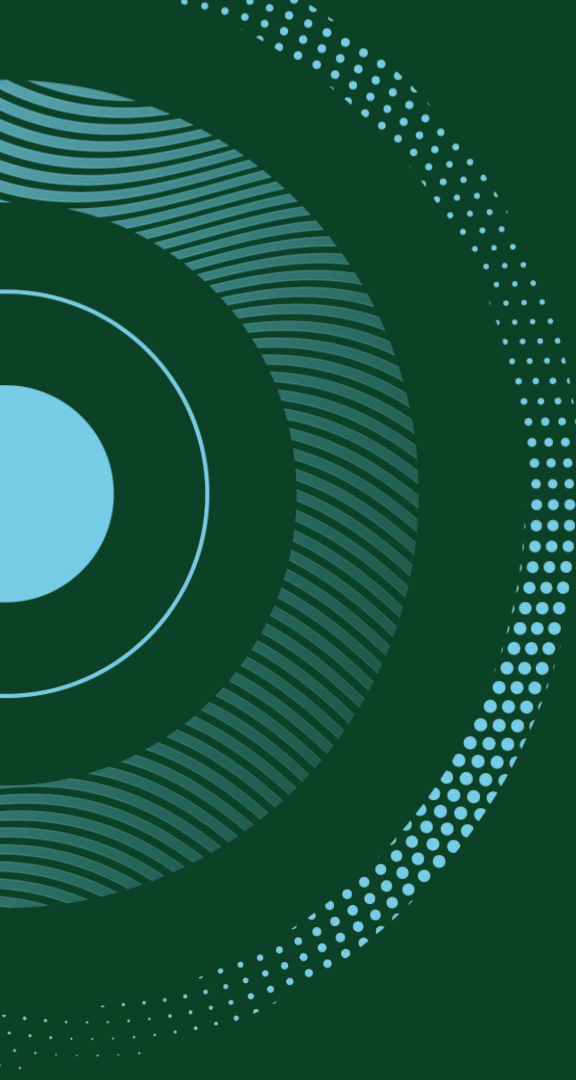
האם קיים שידוך יציב?

האם קיימים מספר שידוכים יציבים שונים?

איך ניתן להשוות בין שידוכים יציבים שונים?

כיצד נמצא שידוך?





תודה רבה!

אוניברסיטת
בר-אילן
Bar-Ilan University

