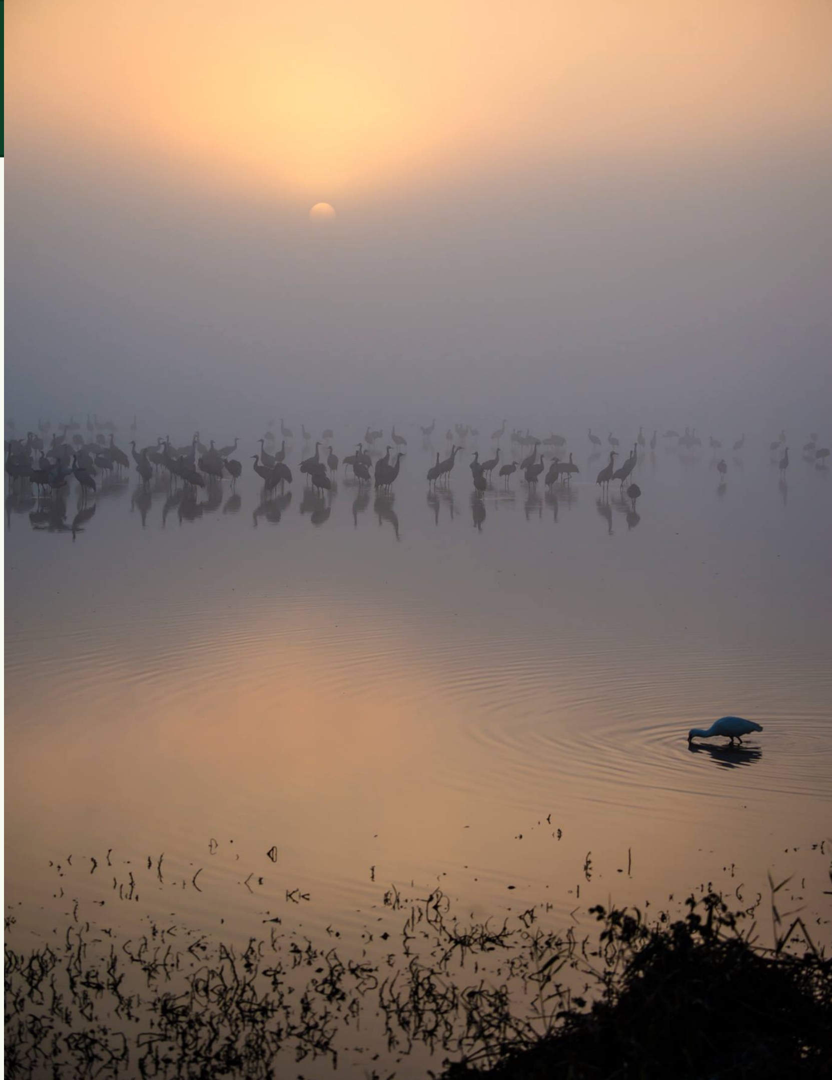
תורת המשחקים

דר ארז שיינר

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University

תוכן עניינים



תורת המשחקים

מבוא

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University

כעת נשחק את משחק האולטימטום; המחשב יחלק אתכם לזוגות.

- כל זוג ישחק שני תורות, כאשר הראשון מתחלף.
- בכל תור, זוג השחקנים יקבל 100 ש"ח וירטואליים.
- השחקנית הראשונה תציע לשחקן השני סכום מסויים, ואת השאר תשמור לעצמה.
- אם השחקן השני יסכים לחלוקה, שניהם יקבלו את הכסף.
- אם השחקן השני יסרב, שני השחקנים לא יקבלו כלום

https://game.math-wiki.com

לכאורה כל שחקן היה צריך להסכים לכל הצעה גדולה מאפס, לא משנה מה קרה עד עכשיו.

לפיכך, כל שחקנית הייתה צריכה להציע את הסכום המינימלי האפשרי שגדול מאפס.

מצד שני, כסף אינו השיקול היחיד בחיים. כלומר התועלת של כל שחקן אינו שווה בהכרח לתוצאת המשחק.

כמו כן, חשוב לדעת אם השחקן השני "רציונאלי" או לא. ייתכן שהשחקן השני יציע לך סכום כסף גדול יותר אם את תציעי לו סכום כסף גדול, באופן לא רציונאלי.
ייתכן שהוא יעשה זאת כיוון שהוגנות היא חלק מהתועלת שלו.

משחק הכבשים

https://sheep.math-wiki.com

דיון על המשחק

משחק ההשקעה

https://invest.math-wiki.com

דיון על המשחק

מה היא אסטרטגיה של שחקן?

אסטרטגיה

אסטרטגיה היא קבוצת החלטות של שחקן, כיצד לנהוג **בכל מצב** של המשחק.

לא חייבת להיות "חוקיות" מסויימת (כיצד כלל מגדירים חוקיות?), אלא סט של הוראות הפעלה לכל פעם בו נדרשת פעולת השחקן.

נראה בהמשך כי השחקן יכול להחליט כחלק מהאסטרטגיה שבמצב מסוים הוא יבצע פעולות שונות בהסתברויות מסוימות.

זה בלי קשר לכך שייתכן שהמהלכים האפשריים של השחקן תלויים בהסתברות כחלק מחוקי המשחק.

תורת המשחקים

משחקים בצורה אסטרטגית

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University

משחק בצורה אסטרטגית הוא שלשה של:

- מספר סופי של שחקנים
- לכל שחקן יש מספר סופי של אסטרטגיות (לאו דווקא כמויות שוות)
- לכל בחירת אסטרטגיות של כלל השחקנים, יש תוצאת משחק יחידה

שימו לב שכאן אין אלמנט של מזל או הסתברות - בחירת האסטרטגיות של השחקנים קובעת באופן מוחלט את התוצאה הסופית.

אבן, נייר ומספריים

ניתן לתאר משחק בצורה אסטרטגית בין שני שחקנים באמצעות טבלה (מטריצה).

לכל אסטרטגיה של השחקנית הראשונה מתאימה שורה, ולכל אסטרטגיה של השחקן השני מתאימה עמודה.

בהנתן בחירה של שורה ועמודה, נתונה תוצאת המשחק. התועלת של השחקנית הראשונה רשומה משמאל.

שחקן II / שחקנית I	אבן	נייר	מספריים
אבן	0,0	-1,1	1,-1
נייר	1,-1	0,0	-1,1
מספריים	-1,1	1,-1	0,0

אילו משחקים הם בצורה אסטרטגית?

האם המשחקים הבאים הם משחקים בצורה אסטרטגית?

- משחק האולטימטום
- איקס-עיגול
- שש-בש
- שח-מט

אילו משחקים הם בצורה אסטרטגית?

האם המשחקים הבאים הם משחקים בצורה אסטרטגית?

- **משחק האולטימטום** - כן, שחקנית מחליטה מראש איזו הצעה לקבל ואיזו הצעה לתת.
- **שח-מט, איקס-עיגול** - כן, כל שחקן מחליט כיצד לפעול בכל מצב של הלוח. אלא אם הוא מעוניין לבחור פעולות מסוימות בהסתברות מסוימת, ואז מדובר בסיפור אחר.
- **שש-בש** - לא. כיוון שכל תור מתחיל בהטלת קוביה, לא ניתן לדעת מהי תוצאת המשחק על פי אסטרטגיות השחקנים בלבד.

  אפילו אם נחשוב על הקוביות כשחקן, תוצאתן לא תלוייה רק במצב הלוח אלא בהסתברות.

דילמת האסיר

המשטרה עצרה שני חשודים בפשע ומפרידה אותם לחדרי חקירה שונים, ומציעה להם להודות בפשע ולהפוך לעדי מדינה.

- אם שניהם מודים, הם מקבלים 5 שנים בכלא כל אחד
- אם האחד מודה והשני לא, עד המדינה יוצא לחופשי והשני מקבל 15 שנים בכלא.
- אם שניהם אינם מודים, הם יקבלו שנה 1 בכלא כל אחד.

מה הם צריכים לעשות?
האם זה משנה אם הם הספיקו לדבר קודם בתא המעצר?

כנסו לקישור:
https://dilemma.math-wiki.com/?room=1

דילמת האסיר

נציג את ה"משחק" בטבלה:

חשוד II חשוד I	מודה	לא מודה
מודה	-5,-5	0,-15
לא מודה	-15,0	-1,-1

לדעת לחלוק

ילד II / ילדה I	חולק	לא חולק
חולקת	10,10	20,0
לא חולקת	0,20	0,0

תורת המשחקים

שליטה

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University

אסטרטגיה שולטת או נשלטת

במשחק בצורה אסטרטגית, אסטרטגיה s של שחקן i נקראת **נשלטת חזק** אם קיימת אסטרטגיה t של אותו השחקן כך שלכל בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, מתקיים שהשחקן הi יקבל תשלום גבוה יותר אם יבחר בt לעומת s.

במשחק בצורה אסטרטגית, אסטרטגיה s של שחקן i נקראת **נשלטת חזק** אם קיימת אסטרטגיה t של אותו השחקן כך שלכל בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, מתקיים שהשחקן ה i יקבל תשלום גבוה יותר אם יבחר ב t לעומת s.

האסטרטגיה s נקראת **נשלטת חלש** אם קיימת t עבורה התשלומים יהיו גבוהים או שווים לעומת הבחירה באסטרטגיה s לכל בחירת אסטרטגיות של האחרים, וכמו כן קיימת בחירה של האחרים בה התשלום עבור t גבוה ולא שווה לזה המתאים לs.

אסטרטגיה שולטת או נשלטת

במשחק בצורה אסטרטגית, אסטרטגיה s של שחקן i נקראת **שולטת חזק** אם לכל אסטרטגיה t של אותו השחקן מתקיים שלכל בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, השחקן ה i יקבל תשלום גבוה יותר אם יבחר בs לעומת t.

אסטרטגיה שולטת או נשלטת

במשחק בצורה אסטרטגית, אסטרטגיה s של שחקן i נקראת **שולטת חזק** אם לכל אסטרטגיה t של אותו השחקן מתקיים שלכל בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, השחקן הi יקבל תשלום גבוה יותר אם יבחר בs לעומת t.

האסטרטגיה s נקראת **שולטת חלש** אם לכל t התשלומים יהיו קטנים או שווים לעומת הבחירה באסטרטגיה s לכל בחירת אסטרטגיות של האחרים, וכמו כן קיימת בחירה של האחרים עבורה התשלום עבור s יהיה גבוה ולא שווה מאשר זה עבור t.

אסטרטגיה שולטת או נשלטת - סיכום

- אסטרטגיה נשלטת קטנה מאסטרטגיה **כלשהי**, לכל בחירה של האחרים
- אסטרטגיה שולטת גדולה **מכל** האסטרטגיות, לכל בחירה של האחרים
- שחקן רציונאלי לעולם לא יבחר באסטרטגיה נשלטת, ותמיד יבחר באסטרטגיה שולטת. (אם ישנן כאלה, כמובן.)

ניתוח דילמת האסיר

להודות היא אסטרטגיה שולטת חזק, ולכן שני השחקים יבחרו בה.

למרות שיש נקודה שעדיפה לשני השחקנים על הלוח, כל אחד מהם ירוויח מ'בגידה'.

שימו לב שאנחנו מניחים שהתשלומים בטבלה הם הסופיים.

אם כניסה של חברי לכלא פוגעת בי, עליי לעדכן את טבלת התשלומים של המשחק.

חשודה II / חשוד I	מודה	לא מודה
מודה	-5,-5	0,-15
לא מודה	-15,0	-1,-1

דילמת האסירים והשוטרים

נחזור לחשודים בפשע מדילמת האסיר.

נוסיף שבכל חדר עם חשוד יש גם שוטרת.

כל חשוד יכול להודות או לא להודות.

שני השוטרים יכולים גם לנהוג בדרך מסוימת:

- השוטרת הראשונה יכולה להיות ישרה או ערמומית
- השוטר השני יכול להיות טוב או רע

טבלת התשלומים מוצגת בשקופית הבאה לפי הסדר:

חשודה II, חשוד I, שוטר II, שוטרת I

דילמת האסירים והשוטרים

<table>
<tr><th>שוטר II
שוטרת I</th><th>טוב</th><th>רע</th></tr>
<tr><th>ערמומית</th>
<td><table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>1,1,-1,-1</td><td>15,10,0,-15</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>15,10,-10,0</td><td>5,5,5,5</td></tr>
</table></td>
<td><table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>2,2,-2,-2</td><td>15,10,0,-15</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>15,15,-15,0</td><td>5,6,-10,-1</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><th>ישרה</th>
<td><table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>8,8,-4,-4</td><td>10,10,0,-10</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>10,10,-10,0</td><td>0,0,0,0</td></tr>
</table></td>
<td><table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>8,8,-4,-4</td><td>15,15,0,-15</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>15,15,-15,0</td><td>2,2,-1,-1</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

כנסו לקישור הבא:

https://second.dilemma.math-wiki.com/?room=1&player=cop1

- אם השחקן הראשון רציונאלי, הוא לא יבחר באסטרטגיה נשלטת, ללא תלות בשחקנים האחרים.

- אם השחקן הראשון רציונאלי, הוא לא יבחר באסטרטגיה נשלטת, ללא תלות בשחקנים האחרים.
- השחקנית השנייה תמחק את האסטרטגיה הנשלטת, ונקבל משחק חדש, מצומצם יותר.

הנחת רציונליות

- אם השחקן הראשון רציונאלי, הוא לא יבחר באסטרטגיה נשלטת, ללא תלות בשחקנים האחרים.
- השחקנית השנייה תמחק את האסטרטגיה הנשלטת, ונקבל משחק חדש, מצומצם יותר.
- כלל השחקנים צריכים להניח שהשחקן הראשון רציונאלי, שהשחקנית השנייה רציונאלית ושהיא יודעת שהראשון רציונאלי.

הנחת רציונליות

- אם השחקן הראשון רציונאלי, הוא לא יבחר באסטרטגיה נשלטת, ללא תלות בשחקנים האחרים.
- השחקנית השנייה תמחק את האסטרטגיה הנשלטת, ונקבל משחק חדש, מצומצם יותר.
- כלל השחקנים צריכים להניח שהשחקן הראשון רציונאלי, שהשחקנית השנייה רציונאלית ושהיא יודעת שהראשון רציונאלי.
- כך הלאה, כלל השחקנים צריכים להוכיח שהאחרים רציונאלים, ויודעים שהם רציונאליים, ויודעים שהם יודעים שהם רציונאליים, מכל אורך של שרשרת ידיעה כזו עד לסוף המשחק.

ניתוח דילמת האסירים והשוטרים

שוטר II / שוטרת I	חשוד II / חשוד I	טוב		רע	
		מודה	לא מודה	מודה	לא מודה
ערמומית	מודה	1,1,-1,-1	15,10,0,-15	2,2,-2,-2	15,10,0,-15
	לא מודה	15,10,-10,0	5,5,5,5	15,15,-15,0	5,6,-10,-1
ישרה	מודה	8,8,-4,-4	10,10,0,-10	8,8,-4,-4	15,15,0,-15
	לא מודה	10,10,-10,0	0,0,0,0	15,15,-15,0	2,2,-1,-1

ניתוח דילמת האסירים והשוטרים

<table dir="rtl">
<tr><th>שוטר II
שוטרת I</th><th></th><th>רע</th></tr>
<tr><td>ערמומית</td><td>
<table>
<tr><th>חשוד II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><td>מודה</td><td>2,2,-2,-2</td><td>15,10,0,-15</td></tr>
<tr><td>לא מודה</td><td>15,15,-15,0</td><td>5,6,-10,-1</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>ישרה</td><td>
<table>
<tr><th>חשוד II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><td>מודה</td><td>8,8,-4,-4</td><td>15,15,0,-15</td></tr>
<tr><td>לא מודה</td><td>15,15,-15,0</td><td>2,2,-1,-1</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

ניתוח דילמת האסירים והשוטרים

<table>
<tr><th>שוטר II
שוטרת I</th><th></th><th>רע</th></tr>
<tr><td>ערמומית</td><td></td><td>
<table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th></tr>
<tr><td>מודה</td><td>2,2,-2,-2</td></tr>
<tr><td>לא מודה</td><td>15,15,-15,0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>ישרה</td><td></td><td>
<table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th></tr>
<tr><td>מודה</td><td>8,8,-4,-4</td></tr>
<tr><td>לא מודה</td><td>15,15,-15,0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

ניתוח דילמת האסירים והשוטרים

<table>
<tr><th>שוטר II
שוטרת I</th><th></th><th>רע</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ישרה</td><td></td><td>
<table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th></tr>
<tr><td>מודה</td><td>8,8,-4,-4</td></tr>
<tr><td>לא מודה</td><td>15,15,-15,0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

ניתוח דילמת האסירים והשוטרים

<table>
<tr><th>שוטר II
שוטרת I</th><th></th><th>רע</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ישרה</td><td></td><td><table><tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th></tr><tr><td>מודה</td><td>8,8,-4,-4</td></tr></table></td></tr>
</table>

האם הסדר בו אנחנו מסירים אסטרטגיות נשלטות עשוי להשפיע על המשחק אליו נגיע?

האם הסדר בו אנחנו מסירים אסטרטגיות נשלטות עשוי להשפיע על המשחק אליו נגיע?

אם נסלק אסטרטגיות נשלטות חזק, אחת אחרי השנייה עד שלא תיוותרנה אסטרטגיות נשלטות חזק, תמיד נגיד לאותו המשחק המצומצם.
זה לא מובן מאליו, שהרי כל סילוק אסטרטגיה משנה את המשחק.

סדר מחיקת אסטרטגיות נשלטות

האם הסדר בו אנחנו מסירים אסטרטגיות נשלטות עשוי להשפיע על המשחק אליו נגיע?

אם נסלק אסטרטגיות נשלטות חזק, אחת אחרי השנייה עד שלא תיוותרנה אסטרטגיות נשלטות חזק, תמיד נגיד לאותו המשחק המצומצם.
זה לא מובן מאליו, שהרי כל סילוק אסטרטגיה משנה את המשחק.

על מנת להוכיח את הטענה, ראשית נלמד על מושג האינדוקציה.
צפו בקישור הבא:

https://youtu.be/n6xkPhKmhQo

אסטרטגיה נשלטת חזק נשארת נשלטת חזק עד מחיקתה

תהי s1 נשלטת חזק, אזי לאחר n מחיקות של אסטרטגיות נשלטות אחרות היא עדיין נשלטת חזק.
(שימו לב שהאסטרטגיות יכולות להיות של שחקנים אחרים או נשלטות חלש.)

נוכיח זאת באינדוקציה, כאשר עבור n=0 ברור שזה נכון.

אסטרטגיה נשלטת חזק נשארת נשלטת חזק עד מחיקתה

בהנתן n עבורו הטענה נכונה, נוכיח עבור n+1

אחרי מחיקת n האסטרטגיות הראשונות s1 עדיין נשלטת חזק לפי הנחת האינדוקציה,
צריך להוכיח שזה המצב עבור האסטרטגיה האחרונה נקרא לה t1.

נסמן את האסטרטגיה שs1 נשלטת חזק על ידה ב-r. אם t1 שונה מ-r סיימנו.
אם t1=r, היא נמחקה מאסטרטגיה t2 שהתשלום עבורה גדול או שווה לזה של t1.
לכן בוודאי התשלום עבור האסטרטגיה t2 גדול ממש מזה של s1 ולכן היא עדיין נשלטת
חזק כפי שרצינו.

הוכחה שסדר מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק אינו משנה

נוכיח כעת שסדר מחיקת אסטרטגיה נשלטות חזק לא משנה.

ראשית ננסח במדויק את הטענה, על מנת להוכיחה באינדוקציה:

יהי משחק בצורה אסטרטגית, ונניח שסדרת המחיקות של אסטרטגיות נשלטות חזק $s_1,s_2,...,s_n$ הובילה למשחק בו אין אסטרטגיות נשלטות חזק.

אזי כל סדרת מחיקות של אסטרטגיות נשלטות חזק שתוביל למשחק בו אין אסטרטגיות נשלטות חזק חייבת להכיל בדיוק את n האסטרטגיות הללו, אולי בסדר אחר.

הערה: שימו לב שייתכן שמדובר באסטרטגיות של שחקנים שונים.

הוכחה שסדר מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק אינו משנה

עבור $n=1$: נניח שמחיקת האסטרטגיה הנשלטת חזק s_1 של שחקן i ומובילה למשחק ללא אסטרטגיות נשלטות חזק.

ראשית, לאף שחקן פרט לו i אין אסטרטגיה נשלטת חזק.

אכן, אם הייתה לו כזו t_1 שנשלטת על ידי t_2, גם לאחר מחיקת s_1 היא עדיין נשלטת חזק ע"י t_2.

הוכחה שסדר מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק אינו משנה

עבור n=1: נניח שמחיקת האסטרטגיה הנשלטת חזק s1 של שחקן i ומובילה למשחק ללא אסטרטגיות נשלטות חזקה.

ראשית, לאף שחקן פרט לו אין אסטרטגיה נשלטת חזק.

אכן, אם הייתה לו כזו t1 שנשלטת על ידי t2, גם לאחר מחיקת s1 היא עדיין נשלטת חזק ע"י t2.

שימו לב שטיעון זה אינו תקף עבור אסטרטגיות נשלטות חלש. כיוון שייתכן שרק כאשר שחקן i משחק s1 אז t2 תניב תשלום גבוה מt1 במצב כלשהו, ובשאר האסטרטגיות של שחקן i התשלומים של t1 וt2 שווים.

במצב כזה, בוודאי שלא ניתן לדעת מה השחקן השני יבחר מבין t1 לt2 ולמחוק אחת מהן.

הוכחה שסדר מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק אינו משנה

עבור $n=1$: נניח שמחיקת האסטרטגיה הנשלטת חזק s_1 של שחקן i ומובילה למשחק ללא אסטרטגיות נשלטות חזקה.

כעת, לא ייתכן שלשחקן הi יש אסטרטגיה נשלטת חזק פרט לs_1.

אם הייתה לו כזו, s_2, היא הייתה נשארת נשלטת חזק לאחר מחיקת s_1, בסתירה לכך שאין אסטרטגיות נשלטות חזק לאחר מחיקת s_1.

הוכחה שסדר מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק אינו משנה

עבור n=1: נניח שמחיקת האסטרטגיה הנשלטת חזק s1 של שחקן i מובילה למשחק ללא אסטרטגיות נשלטות חזקה.

סה"כ s1 היא האסטרטגיה הנשלטת חזק היחידה במשחק, כפי שרצינו.

כעת, בהנתן n עבורו הטענה נכונה, צ"ל עבור n+1.

תהי סדרת מחיקות

s1,s2,...,s_(n+1)

צריך להוכיח שכל סדרת מחיקות שמובילה למשחק ללא אסטרטגיה נשלטת חזק מכילה בדיוק את כל האסטרטגיות הללו, ולא אחרות.

הוכחה שסדר מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק אינו משנה

תהי סדרת מחיקות $t_1,\dots,t_k$.

ראשית,נשים לב כי s_1 היא אחת האסטרטגיות $t_i=s_1$ כיוון שהיא אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק המקורי, ותשאר כזו עד שתמחק.

כיוון שs_1 אסטרטגיה נשלטת חזק <u>במשחק המקורי</u>, ניתן למחוק אותה ראשונה והאסטרטגיות שהיו נשלטות חזק ישארו כאלה.

נקבל את סדרת המחיקות

$s_1,t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_k$

נביט במשחק ללא s_1, בו יש את סדרת המחיקות

$s_2,\dots,s_{n+1}$

המכילה n מחיקות, ולכן לפי הנחת האינדוקציה

$\{s_2,\dots,s_{n+1}\} = \{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_k\}$

כפי שרצינו.

מחיקת נשלטות חלש

https://dessert.math-wiki.com

ילד II ילדה I	אננס	תפוח	בננה
שוקולד	2,1	2,1	3,0
וניל	2,0	0,1	0,1
מסטיק	0,1	1,0	3,3

סדרת מחיקות I

ילד II / ילדה I	בננה	תפוח	אננס
שוקולד	3,0	2,1	2,1
וניל	0,1	0,1	2,0

סדרת מחיקות I

ילד II ילדה I		תפוח	
שוקולד		2,1	
וניל		0,1	

סדרת מחיקות I

ילד II ילדה I		תפוח	
שוקולד		2,1	

סדרת מחיקות II

ילד II / ילדה I	אננס	תפוח	בננה
שוקולד	2,1	2,1	3,0
וניל	2,0	0,1	0,1
מסטיק	0,1	1,0	3,3

סדרת מחיקות II

בננה	תפוח	אננס	ילד II ילדה I
3,0	2,1	2,1	שוקולד
3,3	1,0	0,1	מסטיק

סדרת מחיקות II

ילד II ילדה I	בננה		אננס
שוקולד	3,0		2,1
מסטיק	3,3		0,1

סדרת מחיקות II

ילד II ילדה I	אננס		בננה
שוקולד	2,1		3,0

סדרת מחיקות II

ילד II ילדה I	אננס		
שוקולד	2,1		

תורת המשחקים

שיווי משקל נאש

אוניברסיטת בר־אילן
Bar-Ilan University

וקטור אסטרטגיות במשחק בצורה אסטרטגית נקרא שיווי משקל נאש, אם אף שחקן לא ירוויח מלהפר אותו באופן אישי.

במדוייק, אם כל השחקנים פרט לשחקן הi ישחקו באסטרטגיות שיווי המשקל, התשלום לשחקן הi עבור כל אסטרטגיה יהיה קטן או שווה לאסטרטגיה משיווי המשקל.

מציאת שיווי משקל

לכל שחקן i עבור כל בחירה של שאר השחקנים, נסמן את התשלומים המקסימליים של השחקן ה-i.

משבצת בה כל התשלומים צבועים היא שיווי משקל נאש, לפי ההגדרה.

https://dessert.math-wiki.com

ילד II / ילדה I	אננס	תפוח	בננה
שוקולד	2,1	2,1	3,0
וניל	2,0	0,1	0,1
מסטיק	0,1	1,0	3,3

מציאת שיווי משקל

לכל שחקן i עבור כל בחירה של שאר השחקנים, נסמן את התשלומים המקסימליים של השחקן ה-i.

משבצת בה כל התשלומים צבועים היא שיווי משקל נאש, לפי ההגדרה.

ילד II / ילדה I	אננס	תפוח	בננה
שוקולד	2,1	2,1	3,0
וניל	2,0	0,1	0,1
מסטיק	0,1	1,0	3,3

מציאת שיווי משקל

קיבלנו שלושה שיווי משקל במשחק זה.

שימו לב - ניתוח המשחק לפי שיווי משקל הניב תוצאה שונה מאשר לפי מחיקת אסטרטגיות נשלטות חלש

ילד II / ילדה I	בננה	תפוח	אננס
שוקולד	3,0	2,1	2,1
וניל	0,1	0,1	2,0
מסטיק	3,3	1,0	0,1

דוגמא נוספת למציאת שיווי משקל

<table dir="rtl">
<tr><th>שוטר II
שוטרת I</th><th>טוב</th><th>רע</th></tr>
<tr><th>ערמומית</th><td>
<table dir="rtl">
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>1,1,-1,-1</td><td>15,10,0,-15</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>15,10,-10,0</td><td>5,5,5,5</td></tr>
</table>
</td><td>
<table dir="rtl">
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>2,2,-2,-2</td><td>15,10,0,-15</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>15,15,-15,0</td><td>5,6,-10,-1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><th>ישרה</th><td>
<table dir="rtl">
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>8,8,-4,-4</td><td>10,10,0,-10</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>10,10,-10,0</td><td>0,0,0,0</td></tr>
</table>
</td><td>
<table dir="rtl">
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>8,8,-4,-4</td><td>15,15,0,-15</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>15,15,-15,0</td><td>2,2,-1,-1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

דוגמא נוספת למציאת שיווי משקל

שוטר II / שוטרת I	טוב	רע
ערמומית	ראו טבלה 1	ראו טבלה 2
ישרה	ראו טבלה 3	ראו טבלה 4

ערמומית / טוב

חשוד II / חשוד I	מודה	לא מודה
מודה	1,1,-1,-1	15,10,0,-15
לא מודה	15,10,-10,0	5,5,5,5

ערמומית / רע

חשוד II / חשוד I	מודה	לא מודה
מודה	2,2,-2,-2	15,10,0,-15
לא מודה	15,15,-15,0	5,6,-10,-1

ישרה / טוב

חשוד II / חשוד I	מודה	לא מודה
מודה	8,8,-4,-4	10,10,0,-10
לא מודה	10,10,-10,0	0,0,0,0

ישרה / רע

חשוד II / חשוד I	מודה	לא מודה
מודה	8,8,-4,-4	15,15,0,-15
לא מודה	15,15,-15,0	2,2,-1,-1

דוגמא נוספת למציאת שיווי משקל

<table dir="rtl">
<tr><th>שוטר II
שוטרת I</th><th>טוב</th><th>רע</th></tr>
<tr><th>ערמומית</th>
<td>
<table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>1,1,-1,-1</td><td>15,10,0,-15</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>15,10,-10,0</td><td>5,5,5,5</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>2,2,-2,-2</td><td>15,10,0,-15</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>15,15,-15,0</td><td>5,6,-10,-1</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr><th>ישרה</th>
<td>
<table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>8,8,-4,-4</td><td>10,10,0,-10</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>10,10,-10,0</td><td>0,0,0,0</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><th>חשודה II
חשוד I</th><th>מודה</th><th>לא מודה</th></tr>
<tr><th>מודה</th><td>8,8,-4,-4</td><td>15,15,0,-15</td></tr>
<tr><th>לא מודה</th><td>15,15,-15,0</td><td>2,2,-1,-1</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

כיצד ינהגו שחקנים כאשר אין להם אפשרות לתקשר לפני המשחק?

נדגים באמצעות המשחק הבא;

https://coordination.math-wiki.com

כיצד ינהגו שחקנים כאשר אין להם אפשרות לתקשר לפני המשחק?

נדגים באמצעות המשחק הבא;

https://coordination.math-wiki.com

נקודות שיווי המשקל הן הנקודות בהן כל השחקנים בוחרים באותן האפשרויות.

גם ללא תקשורת מוקדמת, לעיתים בני אדם מזהים נקודות שיווי משקל **מתבלטות** (Focal point, Schelling point).

תורת המשחקים

משחקים רציפים

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University

משחקים רציפים

הגדרנו משחק בצורה אסטרטגית כשלשה של:

- מספר סופי של שחקנים
- לכל שחקן יש מספר סופי של אסטרטגיות (לאו דווקא כמויות שוות)
- לכל בחירת אסטרטגיות של כלל השחקנים, יש תוצאת משחק יחידה

משחק רציף מוגדר באופן דומה, אך לכל שחקן יש אינסוף אסטרטגיות, המיוצגות ע"י מספרים מקטע ממשי כלשהו [a,b]

דוגמא: נניח ששני צדדים משחקים במכרז על מסכת KN95 ששווה 10 ש"ח

כל שחקן יכול להציע סכום שהוא מספר בין 0 ל10.

אם יש הצעה גבוהה ביותר יחידה, השחקן שהציע אותה מקבל את המסכה עבור הסכום שהציע.

מה הם שיווי המשקל במשחק זה?

כל עוד אחד השחקנים מציע סכום שנמוך מ10, משתלם לשחקן השני לתת הצעה גבוהה יותר שנמוכה מ10. אם הצעתו כבר גבוהה יותר, ישתלם לו להנמיך אותה, כך שעדיין תשאר גבוהה יותר.

אם שני השחקנים יבחרו ב10 זו תהיה נקודת שיווי משקל, שכן בכל מקרה כל אחד מהשחקנים ירוויח אפס (יקבל מסכה תמורת השווי שלה, או לא יבצע רכישה כלל).

שתי חֲבֵרוֹת מקימות חברת סטארט-אפ ביחד.

כל חֲבֵרָה בוחרת את אחוז הזמן שלה, שהיא מוכנה להשקיע בפרוייקט כמספר בין 0 ל1.

שווי האקזיט נתון ע"י הנוסחא הבאה שתלוייה בהשקעה שלהן:

$$f(x,y) = x + y + axy$$

כאשר a הוא קבוע המתאר את איכות העבודה המשותפת של שתי השחקניות.

התשלום לשחקנית הוא חצי משווי האקזיט, ועוד הזמן הפנוי שנותר לה.

$$u_1(x,y) = \frac{f(x,y)}{2} + (1-x)^2$$

שימו לב, שהזמן הופך יקר יותר ככל שיש פחות ממנו. למשל אם נשאר לשחקנית חצי מהזמן פנוי, היא תקבל עבורו רק רבע בחזרה.

לדוגמא, מה יקרה אם שחקנית אחת לא תשקיע כלל?

לדוגמא, מה יקרה אם שחקנית אחת לא תשקיע כלל?

האקזיט יהיה שווה בדיוק לפי כמות ההשקעה של השחקנית השנייה, והתשלומים יהיו:

$$u_1(0,y) = \frac{y}{2} + 1 \qquad u_2(0,y) = \frac{y}{2} + (1-y)^2$$

לדוגמא, מה יקרה אם שחקנית אחת לא תשקיע כלל?

האקזיט יהיה שווה בדיוק לפי כמות ההשקעה של השחקנית השנייה, והתשלומים יהיו:

$$u_1(0,y) = \frac{y}{2} + 1 \qquad u_2(0,y) = \frac{y}{2} + (1-y)^2$$

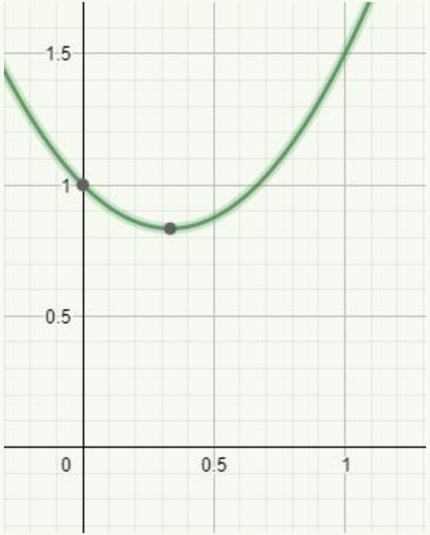
אם הקבוע a חיובי, ברור ששווי האקזיט יהיה גדול ביותר אם שתי השחקניות ישקיעו את כל זמנן.

האם בהכרח זה אומר שזה התשלום הגבוה ביותר עבור השחקניות?

אם שתי השחקניות תשקענה זמן שווה, ונניח a=1, כל אחת מהן תקבל תשלום של:

$$u(x,x) = x + \frac{x^2}{2} + (1-x)^2 = \frac{3x^2}{2} - x + 1$$

ואכן המקסימום, במקרה זה, יתקבל כאשר x=1.



מזהים את נקודת המינימום?

שימו לב שעד שלב מסויים, תוספת השקעה גורמת

להפסדים ולאחר מכן לצמיחה.

תגובות מיטביות

בהנתן בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, קבוצת התגובות המיטביות של שחקן היא קבוצת האסטרטגיות שיניבו עבורו תשלום מקסימלי.

במכרז הקורונה, מהי קבוצת התגובות המיטביות של השחקן השני אם השחקן הראשון הציע 9?

תגובות מיטביות

בהנתן בחירת אסטרטגיות של השחקנים האחרים, קבוצת התגובות המיטביות של שחקן היא קבוצת האסטרטגיות שיניבו עבורו תשלום מקסימלי.

במכרז הקורונה, מהי קבוצת התגובות המיטביות של השחקן השני אם השחקן הראשון הציע 9?

מדובר בקבוצה ריקה. אף אסטרטגיה לא תניב תשלום מקסימלי, לכל אסטרטגיה יש תגובה טובה יותר.

תגובות מיטביות במשחק הסטארט-אפ

בהנתן שהשחקנים השנייה בחרה בy, מה היא קבוצת האסטרטגיות המיטביות של השחקנית הראשונה?

בעצם y הוא פרמטר, ואנחנו מחפשים את ערכי x שיתנו את התשלום המקסימלי לשחקנית הראשונה.

תגובות מיטביות במשחק הסטארט-אפ

בהנתן שהשחקנים השנייה בחרה בעy, מה היא קבוצת האסטרטגיות המיטביות של השחקנית הראשונה?

בעצם y הוא פרמטר, ואנחנו מחפשים את ערכי x שיתנו את התשלום המקסימלי לשחקנית הראשונה.

נניח כי $a=1$, התשלום של השחקנית הראשונה הוא

$$u_1(x,y) = \frac{x+y+xy}{2} + (1-x)^2$$

בהנתן שהשחקנים השנייה בחרה בע, מה היא קבוצת האסטרטגיות המיטביות של השחקנית הראשונה?

בעצם y הוא פרמטר, ואנחנו מחפשים את ערכי x שיתנו את התשלום המקסימלי לשחקנית הראשונה.

נניח כי a=1, התשלום של השחקנית הראשונה הוא

$$u_1(x,y) = \frac{x+y+xy}{2} + (1-x)^2$$

נסדר את זה כפונקציה של x:

$$u_1(x,y) = x^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)x + 1 + \frac{y}{2}$$

בהנתן שהשחקנים השנייה בחרה בy, מה היא קבוצת האסטרטגיות המיטביות של השחקנית הראשונה?

בעצם y הוא פרמטר, ואנחנו מחפשים את ערכי x שיתנו את התשלום המקסימלי לשחקנית הראשונה.

נניח כי a=1, התשלום של השחקנית הראשונה הוא

$$u_1(x,y) = \frac{x+y+xy}{2} + (1-x)^2$$

נסדר את זה כפונקציה של x:

$$u_1(x,y) = x^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)x + 1 + \frac{y}{2}$$

זו פרבולה מחייכת! נקודות המקסימום יתקבלו באחד הקצוות או בשניהם.

נציב את שני הקצוות

$$u_1(1, y) = \frac{1}{2} + y \qquad u_1(0, y) = 1 + \frac{y}{2}$$

מה עדיף לשחקנית הראשונה?

נציב את שני הקצוות

$$u_1(1, y) = \frac{1}{2} + y \qquad u_1(0, y) = 1 + \frac{y}{2}$$

מה עדיף לשחקנית הראשונה?

נפתור את אי השיוויון

$$1 + \frac{y}{2} < \frac{1}{2} + y$$

ונקבל שעבור y גדול מאחד עדיף לשחקנית הראשונה להשקיע את המקסימום, עבור y קטן מחצי עדיף לשחקנית 1 לא להשקיע כלום.
ומעניין ביותר, שעבור y שווה בדיוק לאחד לא משנה לשחקנית 1 אם להשקיע או לא.

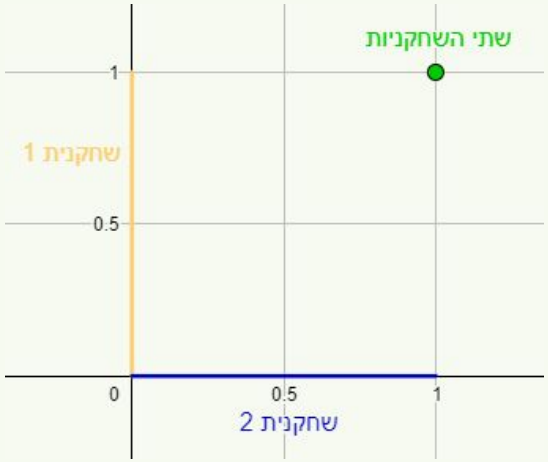
כלומר רק אם השחקנית השנייה משקיעה את כל זמנה, שווה לשחקנית הראשונה לתת את כל כולה, אחרת עדיף לה לא להכנס לעסק הזה.

שיווי משקל נאש במשחק הסטארט-אפ

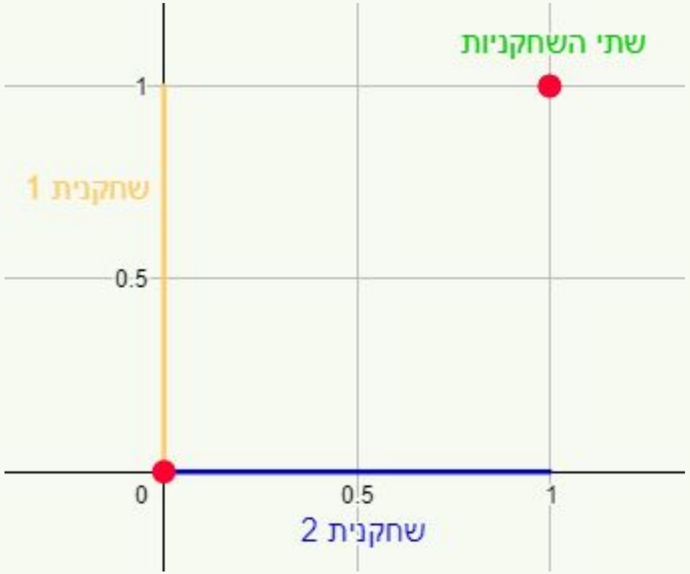
נשרטט על גרפים את התגובות המיטביות של כל שחקנית בהתאם לבחירת אסטרטגיות של האחרת.

למשל עבור השחקנית הראשונה נצייר את אוסף הנקודות בהן ערך ציר הא הוא תגובה מיטבית לערך ציר הy.

נקודת מפגש בין שני הגרפים היא נקודת שיווי משקל, כל כי שחקנית בחרה באסטרטגיה המיטבית ביחס לאסטרטגיה של השנייה, ולכן לא תרוויח מלשנות אסטרטגיה.



נסמן את נקודות שיווי המשקל



תורת המשחקים

אסטרטגיות מעורבות

אוניברסיטת בר־אילן
Bar-Ilan University

שיווי משקל באבן, נייר ומספריים

האם במשחק אבנירו-מספריים יש שיווי משקל נאש?

שחקן II / שחקנית I	אבן	נייר	מספריים
אבן	0,0	-1,1	1,-1
נייר	1,-1	0,0	-1,1
מספריים	-1,1	1,-1	0,0

שיווי משקל באבן, נייר ומספריים

לא.

אז מה נעשה על מנת לנתח את המשחק? האם יש דרך כלשהי?

שחקן II שחקנית I	מספריים	נייר	אבן
אבן	1,-1	-1,1	0,0
נייר	-1,1	0,0	1,-1
מספריים	0,0	1,-1	-1,1

זוג או פרט

נתחיל מלחשוב על משחק פשוט יותר;

בפועל, שחקן יבחר בצורה אקראית את המהלך שלו.

האמנם צורה אקראית עדיפה מהגרלה בהסתברות כלשהי?

שחקנית פרט / שחקן זוג	זוג	פרט
זוג	1,-1	-1,1
פרט	-1,1	1,-1

אסטרטגיות מעורבות

בהנתן משחק בצורה אסטרטגית, ניתן להגדיר משחק עם אסטרטגיות מעורבות.
עבור שחקן עם n אסטרטגיות, אסטרטגיה מעורבת היא בחירה של הסתברויות לכל אסטרטגיה, ובתנאי שסכום ההסתברויות הוא 1.

פונקצית התשלום היא התוחלת של התשלומים בהתאם להסתברויות.
כלומר לכל וקטור אסטרטגיות מעורבות, אנחנו סוכמים את התשלומים של כל וקטורי האסטרטגיות האפשריים, כפול ההסתברות שהם יתקיימו.

באופן זה, הפכנו משחק בצורה אסטרטגית למשחק רציף.

אסטרטגיות מעורבות זוג או פרט

למשל במשחק זוג או פרט, אסטרטגיה מעורבת של שחקן זוג היא לשחק זוג בהסתברות p ואחרת לשחק פרט. אסטרטגיה מעורבת של שחקנית פרט היא לשחק זוג בהסתברות q ואחרת לשחק פרט.

מה התשלום של כל אחד מהשחקנים עבור וקטור האסטרטגיות המעורבות?

ראשית, נחשב את ההסתברות לכל אחד מוקטורי האסטרטגיות:

שחקנית פרט שחקן זוג	זוג q	פרט
זוג p	pq	p(1-q)
פרט	(1-p)q	(1-p)(1-q)

אסטרטגיות מעורבות זוג או פרט

כעת, נסכום את התשלום של כל וקטור אסטרטגיות כפול ההסתברות שהוא יתרחש עבור השחקן הזוגי:

שחקנית פרט שחקן זוג	זוג q	פרט
זוג p	pq	p(1-q)
פרט	(1-p)q	(1-p)(1-q)

שחקנית פרט שחקן זוג	זוג	פרט
זוג	1,-1	-1,1
פרט	-1,1	1,-1

$$pq \cdot 1 + p(1-q) \cdot (-1) + (1-p)q \cdot (-1) + (1-p)(1-q) \cdot 1$$

אסטרטגיות מעורבות זוג או פרט

יוצא שפונקציות התשלומים של שני השחקנים באסטרטגיות מעורבות הן:

$$u_{\text{זוגי}}(p,q) = 4pq - 2p - 2q + 1$$

$$u_{\text{אי זוגי}}(p,q) = -4pq + 2p + 2q - 1$$

שיווי משקל בזוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

נחשב את קבוצת התגובות המיטביות של השחקן הזוגי לאסטרטגיה המעורבת q של השחקנית האי זוגית.

כלומר עלינו לבחור p עבור הפרמטר q כך שהתשלום של השחקן הזוגי יהיה מקסימלי.

שיווי משקל בזוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

נחשב את קבוצת התגובות המיטביות של השחקן הזוגי לאסטרטגיה המעורבת q של השחקנית האי זוגית.

כלומר עלינו לבחור p עבור הפרמטר q כך שהתשלום של השחקן הזוגי יהיה מקסימלי.

נציג את התשלום כפונקציה של p:

$$u_{\text{זוגי}}(p,q) = 4pq - 2p - 2q + 1 = (4q-2)p + (1-2q)$$

שיווי משקל בזוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

נחשב את קבוצת התגובות המיטביות של השחקן הזוגי לאסטרטגיה המעורבת q של השחקנית האי זוגית.

כלומר עלינו לבחור p עבור הפרמטר q כך שהתשלום של השחקן הזוגי יהיה מקסימלי.

נציג את התשלום כפונקציה של p:

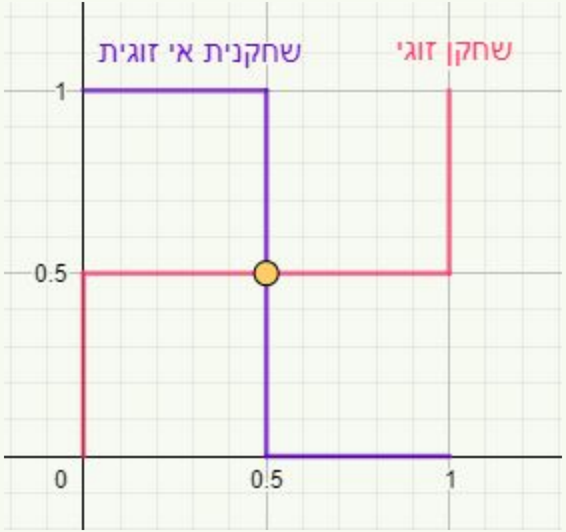
$$u_{\text{זוגי}}(p,q) = 4pq - 2p - 2q + 1 = (4q-2)p + (1-2q)$$

זהו קו ישר.
כאשר הוא עולה, המקסימום בקצה הימני, כאשר הוא יורד, המקסימום בקצה השמאלי,
וכאשר הוא מאוזן, המקסימום מתקבל בכל אחת מהנקודות!

סימן השיפוע תלוי באם q גדול, קטן או שווה לחצי.

שיווי משקל בזוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

נציג על גרף את התגובות המיטביות של שני השחקנים.
עבור כל שחקן, הגרף הוא אוסף הנקודות בהן ערך הנקודה האחד מהווה תגובה מיטבית לערך הנקודה השני.



בעיטות פנדל

בעיטת פנדל כל כך מהירה, שהשוער צריך להחליט לאן לקפוץ לפני הבעיטה.

השוער יכול לקפוץ ימינה, שמאלה או להשאר באמצע.

הבועט יכול לבעוט ימינה, שמאלה או לכיוון האמצע.

לכל שילוב אסטרטגיות יש סיכוי מסויים להבקעת שער, נציג זאת בטבלה.

בדוגמא זו נעזרתי בנתונים מהמאמר

Chiappori, P-A., Steven Levitt, and Timothy Groseclose. "Testing mixed-strategy equilibria when players are heterogeneous: The case of penalty kicks in soccer." *American Economic Review* 92.4 (2002): 1138-1151.

בכל שילוב אסטרטגיות בטבלה רשום הסיכוי להבקעה באחוזים

ימין	מרכז	שמאל	בועט / שוער
90%	80%	60%	שמאל
100%	0%	100%	מרכז
45%	80%	95%	ימין

האם יש שיווי משקל?

אין נקודת שיווי משקל במשחק, נעבור לאסטרטגיות מעורבות

בועט / שוער	שמאל	מרכז	ימין
שמאל	60%	80%	90%
מרכז	100%	0%	100%
ימין	95%	80%	45%

כעת תבעטו אתם מול המחשב שיהיה השוער

https://kicks.math-wiki.com

בהנחה שהשוער יקפוץ שמאלה בסיכוי p ולמרכז בסיכוי q נחשב את התשלום של הבועט בכל אחת מן האסטרטגיות הטהורות (כלומר שהוא בוחר אסטרטגיה אחת בסיכוי 1).

בועט / שוער	0.6p+q+0.95(1-p-q)	**0.8p+0.8(1-p-q)**	**0.9p+q+0.45(1-p-q)**
שמאל	60%	80%	90%
מרכז	100%	0%	100%
ימין	95%	80%	45%

נחפש נקודת שיווי משקל בה התשלום של הבועט שווה בשלושת האסטרטגיות.

זה לא אומר שאין נקודות שיווי משקל בהן אחת משלושת האסטרטגיות פחות שווה משתי האחרות.

אך בוודאות אין נקודות שיווי משקל בה התשלום גבוהה ביותר באסטרטגיה יחידה, כי ראינו שבהנתן שהבועט יבעט לכיוון מסויים, התגובה המיטבית של השוער לא מובילה לשיווי משקל.

נחפש נקודת שיווי משקל בה התשלום של הבועט שווה בשלושת האסטרטגיות.

זה לא אומר שאין נקודות שיווי משקל בהן אחת משלושת האסטרטגיות פחות שווה משתי האחרות.

אך בוודאות אין נקודות שיווי משקל בה התשלום גבוהה ביותר באסטרטגיה יחידה, כי ראינו שבהנתן שהבועט יבעט לכיוון מסויים, התגובה המיטבית של השוער לא מובילה לשיווי משקל.

אנו רוצים למצוא פתרון למערכת המשוואות

$$0.6p+q+0.95(1-p-q)=0.8p+0.8(1-p-q)=0.9p+q+0.45(1-p-q)$$

נקבל כי כאשר השוער קופץ שמאלה בהסתברות $p=0.58$, למרכז בהסברות $q=0.06$ ולצד ימין בהסתברות 0.35, כל אסטרטגיה מעורבת של הבועט מניבה את אותו התשלום.

תשלום זה הינו הבקעת שער בסיכוי 74.9%.

נחשב באופן דומה הסתברויות עבור השוער.

נניח שהבועט מכוון לשמאל בהסתברות p, ולמרכז בהסתברות q.

נשווה את תשלומי השוער בשלושת האסטרטגיות.

$$0.4p+0.2q+0.1(1-p-q)=q=0.05p+0.2q+0.55(1-p-q)$$

נקבל שהבועט צריך לבעוט שמאלה בסיכוי 0.42, למרכז בסיכוי 0.25 וימינה בסיכוי 0.33.

בנקודה זו נקבל את שיווי המשקל.

בעיטות פנדל

נביט בסטטיסטיקה האמיתית של בעיטות הפנדלים שנסקרו במאמר.

מתוך 459 בעיטות פנדל, 44% נבעטו שמאלה, 17% למרכז ו38% נבעטו ימינה.

ב56% מהן השוער קפץ לשמאל, ב2% נשאר במרכז וב41% קפץ לימין.

סה"כ 74.9% מהבעיטות הסתיימו בהבקעת שער.

שימו לב שתוצאות אלו מאד קרובות לשיווי המשקל שחזינו.

תורת המשחקים

מקסמין

אוניברסיטת בר־אילן
Bar-Ilan University

נשחק את המשחק הבא בין חברת ביטוח למבוטח

https://insurance.math-wiki.com

מבטחת מבוטח	לבטח	לא לבטח
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0

ראשית ננתח את המשחק ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות

מבטחת מבוטח	לבטח	לא לבטח
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0

ראשית ננתח את המשחק ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות

מבטחת / מבוטח	לבטח	לא לבטח
לנהוג באחריות	-10,10	0,0

ראשית ננתח את המשחק ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות

מבטחת מבוטח	לבטח	
לנהוג באחריות	-10,10	

כעת נמצא שיווי משקל

מבטחת / מבוטח	לבטח	לא לבטח
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0

הן ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות, והן ע"י מציאת נקודות שיווי משקל הגענו לפתרון היחיד לפיו חברת הביטוח תבטח, והמבוטח יהיה אחראי וישמור על רכושו.

יחד עם זאת, בהנתן שחברת הביטוח תבטח, המבוטח אינו נושא באחריות למעשיו. חברת הביטוח תפגע משמעותית אם האדם ינהג בחוסר אחריות.

הן ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות, והן ע"י מציאת נקודות שיווי משקל הגענו לפתרון היחיד לפיו חברת הביטוח תבטח, והמבוטח יהיה אחראי וישמור על רכושו.

יחד עם זאת, בהנתן שחברת הביטוח תבטח, המבוטח אינו נושא באחריות למעשיו. חברת הביטוח תפגע משמעותית אם האדם ינהג בחוסר אחריות.

עולות שתי שאלות:

1. כיצד ניתן לנתח משחק באופן שיגן על השחקן ממצב מסוכן שכזה?
2. האם ניתן לתקן את המשחק ולנטרל את הבעייה?

על מנת לתקן את הבעייה, נהוג להוסיף השתתפות עצמית בביטוחים.

כלומר המשחק ישתנה ויראה כך:

מבטחת / מבוטח	לבטח	לא לבטח
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-20,-80	-100,0

כעת אסטרטגית חוסר האחריות נשלטת חזק, ולכן המבוטח לעולם לא יבחר בה.

במציאות, כיוון שגם אנשים אחראיים נפגעים לפעמים, העיוות הזה פוגע בהם.

העיוות שנגרם כתוצאה מכך שאדם שלא נושא באחריות עשוי לקחת סיכון מיותר,

נקראת סיכון מוסרי

כעת נלמד כיצד יכלנו לנתח את המשחק באופן שמגן על השחקן מפני סיכונים.

שחקן יחשב בכל אסטרטגיה את התשלום המינימלי שהוא עשוי להקבל אם יבחר באסטרטגיה זו.

אסטרטגית מקסמין

כעת נלמד כיצד יכלנו לנתח את המשחק באופן שמגן על השחקן מפני סיכונים.
שחקן יחשב בכל אסטרטגיה את התשלום המינימלי שהוא עשוי להקבל אם יבחר באסטרטגיה זו.

אסטרטגית מקסמין היא אסטרגיה שהערך המינימלי שהיא מבטיחה הוא הגבוה ביותר מבין כל הערכים המינימליים של האסטרטגיות האחרות.

כעת נלמד כיצד יכלנו לנתח את המשחק באופן שמגן על השחקן מפני סיכונים.
שחקן יחשב בכל אסטרטגיה את התשלום המינימלי שהוא עשוי להקבל אם יבחר באסטרטגיה זו.

אסטרטגית מקסמין היא אסטרגיה שהערך המינימלי שהיא מבטיחה הוא הגבוה ביותר מבין כל הערכים המינימליים של האסטרטגיות האחרות.

הערך המינימלי של אסרטגית המקסמין נקרא ערך המקסמין של השחקן. השחקן יכול, אם ירצה, להבטיח שהוא יקבל לפחות את המקסמין.

כעת נלמד כיצד יכלנו לנתח את המשחק באופן שמגן על השחקן מפני סיכונים.
שחקן יחשב בכל אסטרטגיה את התשלום המינימלי שהוא עשוי להקבל אם יבחר באסטרטגיה זו.

אסטרטגית מקסמין היא אסטרגיה שהערך המינימלי שהיא מבטיחה הוא הגבוה ביותר מבין כל הערכים המינימליים של האסטרטגיות האחרות.

הערך המינימלי של אסרטגית המקסמין נקרא ערך המקסמין של השחקן. השחקן יכול, אם ירצה, להבטיח שהוא יקבל לפחות את המקסמין.

זו שיטת ניתוח משחק שמתאימה לשחקן שמעדיף להמנע מסיכונים, גם על חשבון רווחים אפשריים.

נחשב לדוגמא את ערך המקסמין של חברת הביטוח

מבטחת / מבוטח	לבטח	לא לבטח
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0

מקסמין במשחק הביטוח

נחשב לדוגמא את ערך המקסמין של חברת הביטוח

אם החברה תבטח את המבוטח, המינימום שתקבל הוא מינוס תשעים

מבטחת מבוטח	לבטח	לא לבטח
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0

נחשב לדוגמא את ערך המקסמין של חברת הביטוח

אם החברה תבטח את המבוטח, המינימום שתקבל הוא מינוס תשעים

אם החברה לא תבטח את המבוטח, המינימום שתקבל הוא אפס

מבטחת / מבוטח	לבטח	לא לבטח
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0

נחשב לדוגמא את ערך המקסמין של חברת הביטוח

אם החברה תבטח את המבוטח, המינימום שתקבל הוא מינוס תשעים

אם החברה לא תבטח את המבוטח, המינימום שתקבל הוא אפס

לכן ערך המקסמין הוא אפס, והאסטרטגיה שתבטיח אותו היא לא לבטח

מבטחת / מבוטח	לבטח	לא לבטח
לנהוג באחריות	-10,10	0,0
לנהוג ברשלנות	-10,-90	-100,0

נזכר במשחק הסטארט-אפ בו שתי שחקניות מקימות חברה, ומחליטות כמה להשקיע בה מ0 עד 1. התשלום לשחקנית הראשונה הוא

$$u_1(x,y) = \frac{x+y+xy}{2} + (1-x)^2$$

עבור בחירת אסטרטגיה כלשהי של השחקנית הראשונה, אנחנו רוצים לדעת מהו הערך המינימלי שהיא עשוייה לקבל.

כלומר הפעם x הוא קבוע, ואנחנו מחפשים את ערך y שייתן תוצאה מינימלית. ערך y עצמו לא באמת מעניין אותנו <u>אלא התשלום</u> בערך זה.

נציג את התשלום כפונקציה של y.

$$u_1(x,y) = \left(\frac{1+x}{2}\right)y + 1 - \frac{3}{2}x + x^2$$

נציג את התשלום כפונקציה של y.

$$u_1(x,y) = \left(\frac{1+x}{2}\right)y + 1 - \frac{3}{2}x + x^2$$

זהו קו ישר עם שיפוע חיובי, המינימום הוא בקצה השמאלי y=0.

נציג את התשלום כפונקציה של y.

$$u_1(x,y) = \left(\frac{1+x}{2}\right)y + 1 - \frac{3}{2}x + x^2$$

זהו קו ישר עם שיפוע חיובי, המינימום הוא בקצה השמאלי y=0.

לכן התשלום המינימלי לשחקנית הראשונה בהנתן שתשקיע x הוא

$$x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

נציג את התשלום כפונקציה של y.

$$u_1(x,y) = \left(\frac{1+x}{2}\right)y + 1 - \frac{3}{2}x + x^2$$

זהו קו ישר עם שיפוע חיובי, המינימום הוא בקצה השמאלי y=0.

לכן התשלום המינימלי לשחקנית הראשונה בהנתן שתשקיע x הוא

$$x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

כעת השחקנית הראשונה רוצה לבחור את ערך x עבורו התשלום המינימלי הוא הגבוה ביותר ביחס לאסטרטגיות אחרות

מדובר בפרבולה מחייכת, ולכן הערך המקסימלי שלה הוא באחד הקצוות.

אם השחקנית הראשונה תשקיע את מלוא הזמן (x=1) מובטח לה תשלום של חצי.

אם השחקנית הראשונה לא תשקיע מאמץ כלל (x=0) מובטח לה תשלום של 1.

לכן ערך המקסמין שלה הוא 1, ואסטרטגית המקסמין היא לא להכנס לסטראט-אפ מלכתחילה.

תורת המשחקים

משחקי סכום אפס

אוניברסיטת בר־אילן
Bar-Ilan University

משחק סכום אפס הוא משחק אסטרטגי בין שני שחקנים, כך שסכום התשלומים שלהם בכל וקטור אסטרטגיות הוא אפס.

במילים פשוטות, התשלום של השחקן השני הוא תמיד מינוס התשלום של השחקן הראשון.

במשחקים אלה נרשום בטבלה רק את התשלום של השחקן הראשון.

משחק סכום אפס הוא משחק אסטרטגי בין שני שחקנים, כך שסכום התשלומים שלהם בכל וקטור אסטרטגיות הוא אפס.

במילים פשוטות, התשלום של השחקן השני הוא תמיד מינוס התשלום של השחקן הראשון.

במשחקים אלה נרשום בטבלה רק את התשלום של השחקן הראשון.

לדוגמא:

פרט	זוג	שחקנית פרט שחקן זוג
-1	1	זוג
1	-1	פרט

מקסמין במשחק סכום אפס

נסמן את פונקצית התשלום של השחקן הראשון בu.

ערך המקסמין של השחקן הראשון, נקרא ערך המקסמין של המשחק.

מקסמין במשחק סכום אפס

נסמן את פונקצית התשלום של השחקן הראשון בu.

ערך המקסמין של השחקן הראשון, נקרא ערך המקסמין של המשחק.

עבור השחקן השני, התשלום המינימלי עבור אסטרטגיה מסוימת יתקבל כאשר פונקצית התשלום u תהיה מקסימלית. הרי ככל שהשחקן הראשון מרוויח, השחקן השני מפסיד.

מקסמין במשחק סכום אפס

נסמן את פונקצית התשלום של השחקן הראשון בu.

ערך המקסמין של השחקן הראשון, נקרא ערך המקסמין של המשחק.

עבור השחקן השני, התשלום המינימלי עבור אסטרטגיה מסוימת יתקבל כאשר פונקצית התשלום u תהיה מקסימלית. הרי ככל שהשחקן הראשון מרוויח, השחקן השני מפסיד.

מבין האסטרטגיות של השחקן השני הוא יעדיף את זו בה התשלום המקסימלי הוא הנמוך ביותר. הרי אם השחקן הראשון יקבל תשלום מינימלי, השחקן השני ירוויח.

מקסמין במשחק סכום אפס

נסמן את פונקצית התשלום של השחקן הראשון בu.

ערך המקסמין של השחקן הראשון, נקרא ערך המקסמין של המשחק.

עבור השחקן השני, התשלום המינימלי עבור אסטרטגיה מסוימת יתקבל כאשר פונקצית התשלום u תהיה מקסימלית. הרי ככל שהשחקן הראשון מרוויח, השחקן השני מפסיד.

מבין האסטרטגיות של השחקן השני הוא יעדיף את זו בה התשלום המקסימלי הוא הנמוך ביותר. הרי אם השחקן הראשון יקבל תשלום מינימלי, השחקן השני ירוויח.

ערך התשלום המינימלי של u מבין התשלומים המקסימליים של האסטרטגיות של השחקן השני נקרא ערך המינמקס של המשחק.

בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

נציג את משחק בעיטות הפנדל כמשחק סכום אפס.

התשלום לשוער הוא 50 אחוז פחות הסיכוי להבקעת שער.

בועט / שוער	שמאל	מרכז	ימין
שמאל	-10	-30	-40
מרכז	-50	50	-50
ימין	-45	-30	5

בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

נציג את משחק בעיטות הפנדל כמשחק סכום אפס.

התשלום לשוער הוא 50 אחוז פחות הסיכוי להבקעת שער.

בועט / שוער	שמאל	מרכז	ימין	מינ'
שמאל	-10	-30	-40	-40
מרכז	-50	50	-50	-50
ימין	-45	-30	5	-45
מקס'				

בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

נציג את משחק בעיטות הפנדל כמשחק סכום אפס.

התשלום לשוער הוא 50 אחוז פחות הסיכוי להבקעת שער.

מינ'	ימין	מרכז	שמאל	בועט / שוער
-40	-40	-30	-10	שמאל
-50	-50	50	-50	מרכז
-45	5	-30	-45	ימין
	5	50	-10	מקס'

בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

נציג את משחק בעיטות הפנדל כמשחק סכום אפס.

התשלום לשוער הוא 50 אחוז פחות הסיכוי להבקעת שער.

בועט / שוער	שמאל	מרכז	ימין	מינ'
שמאל	-10	-30	-40	-40
מרכז	-50	50	-50	-50
ימין	-45	-30	5	-45
מקס'	-10	50	5	-40 -10

בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

כלומר ערך המקסמין של המשחק הוא מינוס 40, ואילו ערך המינמקס הוא מינוס 10.

בועט / שוער	שמאל	מרכז	ימין	מינ'
שמאל	-10	-30	-40	-40
מרכז	-50	50	-50	-50
ימין	-45	-30	5	-45
מקס'	-10	50	5	-40 -10

בעיטות פנדל כמשחק סכום אפס

כלומר ערך המקסמין של המשחק הוא מינוס 40, ואילו ערך המינמקס הוא מינוס 10.

הבועט יכול להבטיח לעצמו הבקעה ב60 אחוז, והשוער יכול להבטיח שהבועט לא יבקיע ביותר מ90 אחוז.

בועט / שוער	שמאל	מרכז	ימין	מינ'
שמאל	-10	-30	-40	-40
מרכז	-50	50	-50	-50
ימין	-45	-30	5	-45
מקס'	-10	50	5	-40 -10

השחקן הראשון יכול להבטיח שהוא יקבל **לפחות** את ערך המקסמין.

שיווי משקל במשחקי סכום אפס

השחקן הראשון יכול להבטיח שהוא יקבל **לפחות** את ערך המקסמין.

השחקן השני יכול להבטיח שהשחקן הראשון יקבל **הכי הרבה** את ערך המינמקס.

שיווי משקל במשחקי סכום אפס

השחקן הראשון יכול להבטיח שהוא יקבל **לפחות** את ערך המקסמין.

השחקן השני יכול להבטיח שהשחקן הראשון יקבל **הכי הרבה** את ערך המינמקס.

לכן ערך המקסמין קטן או שווה לערך המינמקס.

שיווי משקל במשחקי סכום אפס

השחקן הראשון יכול להבטיח שהוא יקבל **לפחות** את ערך המקסמין.

השחקן השני יכול להבטיח שהשחקן הראשון יקבל **הכי הרבה** את ערך המינמקס.

לכן ערך המקסמין קטן או שווה לערך המינמקס.

האם יש קשר בין ערכי המקסמין ומינמקס לשיווי משקל?

שיווי משקל במשחקי סכום אפס

טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינמקס.

שיווי משקל במשחקי סכום אפס

טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינמקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בא.
עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

שיווי משקל במשחקי סכום אפס

טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינמקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בx.
עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

שיווי משקל במשחקי סכום אפס

טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינמקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בא.
עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

מכאן, x גדול או שווה לערך המינמקס, הרי ערך המינמקס הוא הערך הנמוך ביותר מבין הערכים המקסימליים של u עבור אסטרטגיות של השחקן השני.

טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינמקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בx.
עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

מכאן, x גדול או שווה לערך המינמקס, הרי ערך המינמקס הוא הערך הנמוך ביותר מבין הערכים המקסימליים של u עבור אסטרטגיות של השחקן השני.

עבור אסטרטגיה זו של השחקן הראשון, השחקן השני לא יכול להשיג תשלום נמוך יותר.
הרי מטרתו להשיג ערך נמוך ככל הניתן של u, וזו נקודת שיווי משקל.

שיווי משקל במשחקי סכום אפס

טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינמקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בx.
עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

מכאן, x גדול או שווה לערך המינמקס, הרי ערך המינמקס הוא הערך הנמוך ביותר מבין הערכים המקסימליים של u עבור אסטרטגיות של השחקן השני.

עבור אסטרטגיה זו של השחקן הראשון, השחקן השני לא יכול להשיג תשלום נמוך יותר.
הרי מטרתו להשיג ערך נמוך ככל הניתן של u, וזו נקודת שיווי משקל.

כלומר x הוא הערך המינימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן הראשון.

טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינמקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל בx.
עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

מכאן, x גדול או שווה לערך המינמקס, הרי ערך המינמקס הוא הערך הנמוך ביותר מבין הערכים המקסימליים של u עבור אסטרטגיות של השחקן השני.

עבור אסטרטגיה זו של השחקן הראשון, השחקן השני לא יכול להשיג תשלום נמוך יותר.
הרי מטרתו להשיג ערך נמוך ככל הניתן של u, וזו נקודת שיווי משקל.

כלומר x הוא הערך המינימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן הראשון.
ומכאן x קטן או שווה מערך המקסמין.

שיווי משקל במשחקי סכום אפס

טענה: אם למשחק יש שיווי משקל, אזי ערך המקסמין שווה לערך המינמקס.

הוכחה: נסמן את התשלום u בנקודת שיווי המשקל באx.
עבור אסטרטגיה זו של השחקן השני השחקן הראשון לא יכול להשיג תשלום גבוה יותר.

כלומר x הוא הערך המקסימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן השני.

מכאן, x גדול או שווה לערך המינמקס, הרי ערך המינמקס הוא הערך הנמוך ביותר מבין הערכים המקסימליים של u עבור אסטרטגיות של השחקן השני.

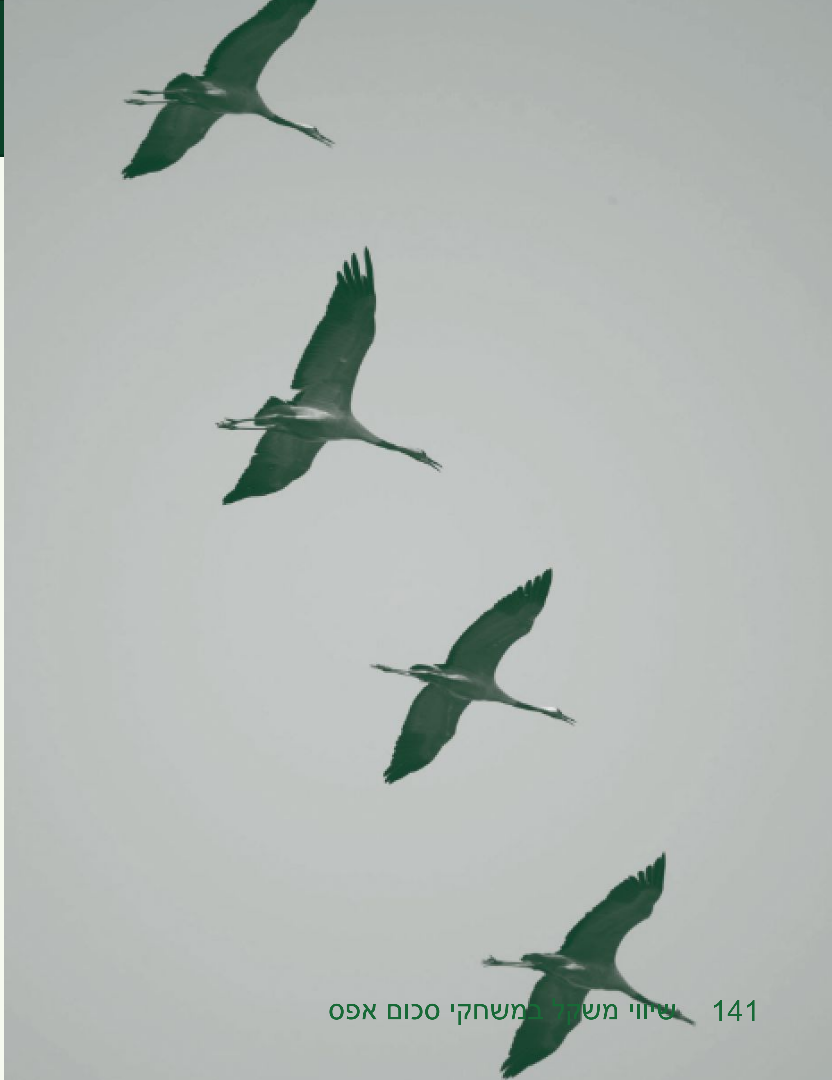
עבור אסטרטגיה זו של השחקן הראשון, השחקן השני לא יכול להשיג תשלום נמוך יותר.
הרי מטרתו להשיג ערך נמוך ככל הניתן של u, וזו נקודת שיווי משקל.

כלומר x הוא הערך המינימלי של u עבור האסטרטגיה של השחקן הראשון.
ומכאן x קטן או שווה מערך המקסמין.

סה"כ x גדול או שווה למינמקס, שגדול או שווה למקסמין שגדול או שווה לx.
לכן שלושתם שווים.

שיווי משקל במשחקי סכום אפס

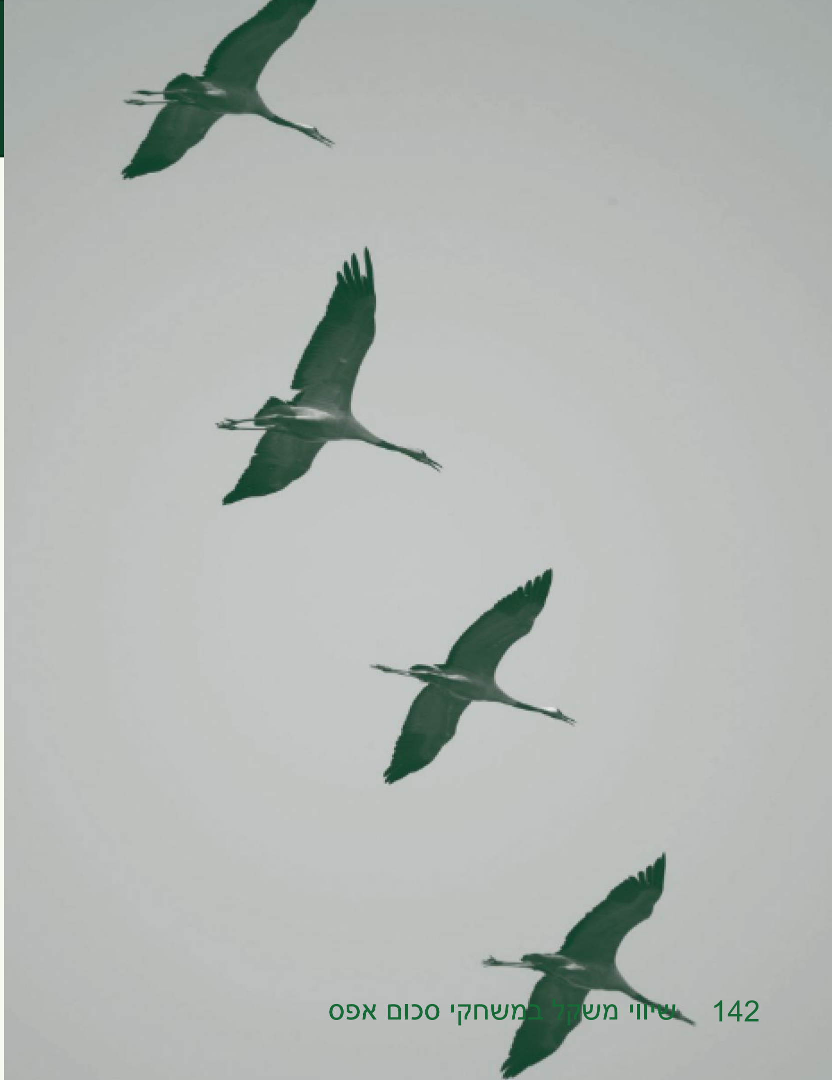
טענה: אם ערך המינמקס שווה לערך המקסמין אזי יש נקודת שיווי משקל



שיווי משקל במשחקי סכום אפס

טענה: אם ערך המינמקס שווה לערך המקסמין אזי יש נקודת שיווי משקל

הוכחה: נסמן בא את התשלום u כאשר השחקן הראשון משחק את אסטרטגית המקסמין, והשחקן השני משחק את אסטרטגיית המינמקס.

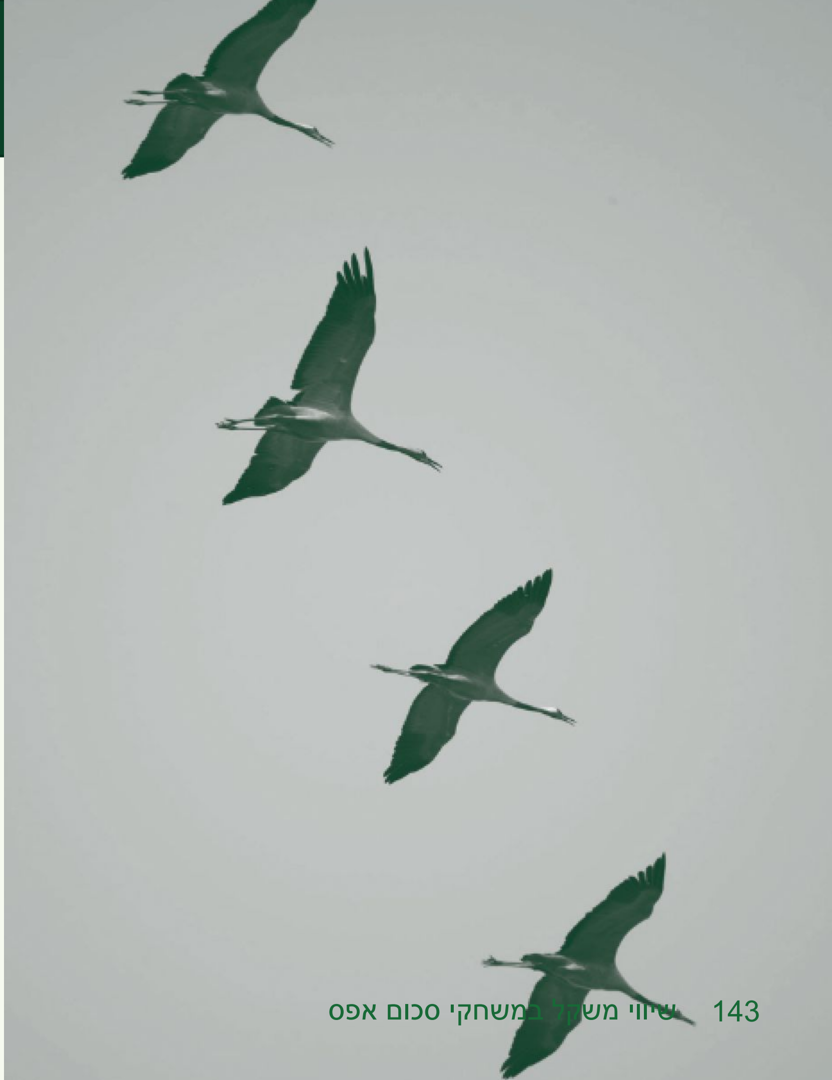


שיווי משקל במשחקי סכום אפס

טענה: אם ערך המינמקס שווה לערך המקסמין אזי יש נקודת שיווי משקל

הוכחה: נסמן בא את התשלום u כאשר השחקן הראשון משחק את אסטרטגית המקסמין, והשחקן השני משחק את אסטרטגיית המינמקס.

השחקן הראשון הבטיח לעצמו לפחות את ערך המקסמין, והשחקן השני הבטיח שהשחקן הראשון לא יקבל יותר מהמינמקס. כיוון ששני הערכים שווים, יוצא שא שווה לשניהם.



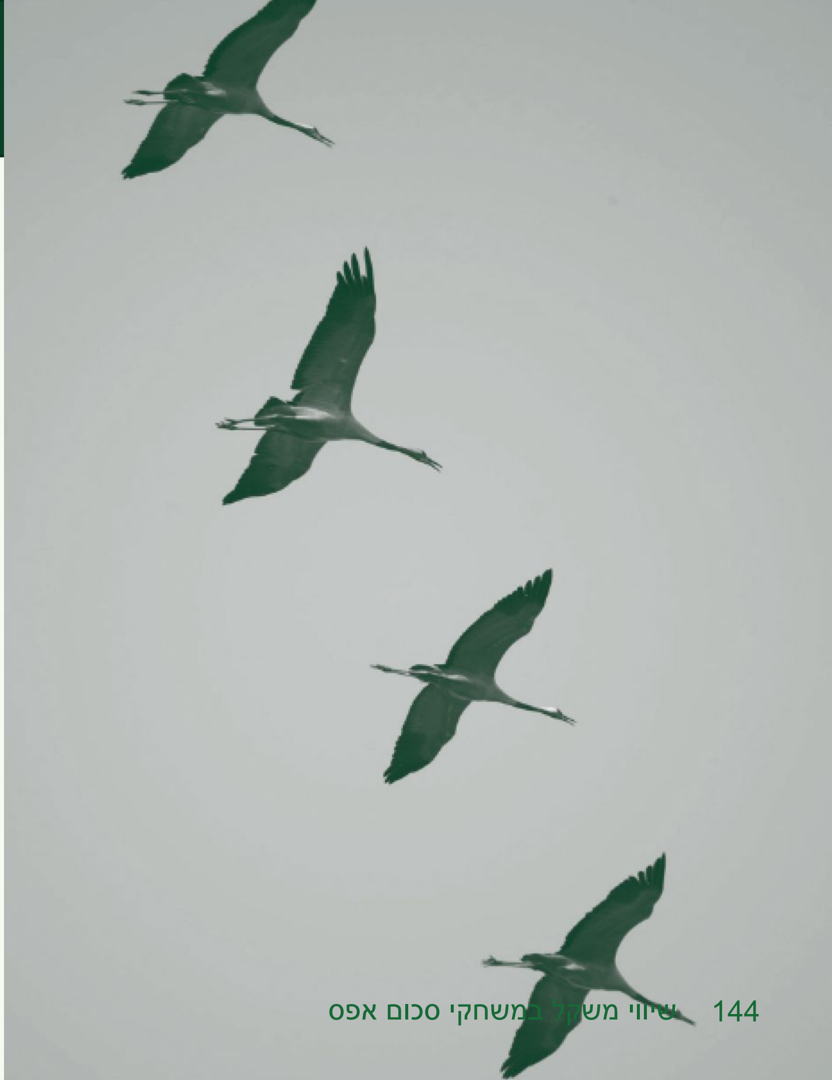
שיווי משקל במשחקי סכום אפס

טענה: אם ערך המינמקס שווה לערך המקסמין אזי יש נקודת שיווי משקל

הוכחה: נסמן בא את התשלום u כאשר השחקן הראשון משחק את אסטרטגית המקסמין, והשחקן השני משחק את אסטרטגיית המינמקס.

השחקן הראשון הבטיח לעצמו לפחות את ערך המקסמין, והשחקן השני הבטיח שהשחקן הראשון לא יקבל יותר מהמינמקס. כיוון ששני הערכים שווים, יוצא שx שווה לשניהם.

כיוון שהשחקן השני הבטיח שהשחקן הראשון לא יכול להרוויח יותר מערך זה, והשחקן הראשון הבטיח שהשחקן השני לא יכול לגרום לו להרוויח פחות מערך זה, מדובר בנקודת שיווי משקל.



מסקנה:

במשחק סכום אפס יש שיווי משקל אם ורק אם ערך המקסמין שווה לערך המינמקס.

ערך של משחק סכום אפס

מסקנה:

במשחק סכום אפס יש שיווי משקל אם ורק אם ערך המקסמין שווה לערך המינמקס.

משחק סכום אפס נקרא משחק עם ערך כאשר יש לו נקודת שיווי משקל. ערך המשחק שווה למקסמין ולמינמקס, והוא התשלום בנקודת שיווי המשקל.

מוכר וקונה

נשחק במשחק הקונה והמוכר.

https://sale.math-wiki.com

מוכר / קונה	מחיר גבוה	מחיר הוגן	מחיר נמוך
מתמקחת	-5	10	0
מסכימה	-9	0	10
מציעה עוד	-10	-15	-11

מוכר וקונה

נמצא את ערך המקסמין, וערך המינמקס

מוכר / קונה	מחיר גבוה	מחיר הוגן	מחיר נמוך	מינ'
מתמקחת	-5	10	0	-5
מסכימה	-9	0	10	-9
מציעה עוד	-10	-15	-11	-15
מקס'	-5	10	10	

מוכר וקונה

למשחק יש ערך, ולכן יש לו נקודת שיווי משקל.

מוכר / קונה	מחיר גבוה	מחיר הוגן	מחיר נמוך	מינ'
מתמקחת	-5	10	0	-5
מסכימה	-9	0	10	-9
מציעה עוד	-10	-15	-11	-15
מקס'	-5	10	10	-5

מוכר וקונה

לא כל משבצת בה התשלום שווה לערך המשחק היא נקודת שיווי משקל

מינ'	מחיר נמוך	מחיר הוגן	מחיר גבוה	מוכר / קונה
-5	0	10	-5	מתמקחת
-9	10	0	-9	מסכימה
-15	-5	-15	-10	מציעה עוד
-5	10	10	-5	מקס'

תורת המשחקים

משחקים בצורה רחבה

אוניברסיטת בר־אילן
Bar-Ilan University

משחק בצורה רחבה מוגדר לרוב באמצעות עץ (סוג של גרף). נגדיר אותו כאן בצורה רקורסיבית.

בהנתן מספר סופי של שחקנים נגדיר משחק בצורה רחבה כמשחק בו אחד השחקנים יכול לבחור בין מספר סופי של משחקים בצורה רחבה, או שלאף שחקן אין בחירה אך יש תשלום לכלל השחקנים והמשחק נגמר.

משחק בצורה רחבה מוגדר לרוב באמצעות עץ (סוג של גרף). נגדיר אותו כאן בצורה רקורסיבית.

בהנתן מספר סופי של שחקנים נגדיר משחק בצורה רחבה כמשחק בו אחד השחקנים יכול לבחור בין מספר סופי של משחקים בצורה רחבה, או שלאף שחקן אין בחירה אך יש תשלום לכלל השחקנים והמשחק נגמר.

לדוגמא, משחק האולטימטום הוא משחק בצורה רחבה.

משחקים בצורה רחבה

משחק בצורה רחבה מוגדר לרוב באמצעות עץ (סוג של גרף). נגדיר אותו כאן בצורה רקורסיבית.

בהנתן מספר סופי של שחקנים נגדיר משחק בצורה רחבה כמשחק בו אחד השחקנים יכול לבחור בין מספר סופי של משחקים בצורה רחבה, או שלאף שחקן אין בחירה אך יש תשלום לכלל השחקנים והמשחק נגמר.

לדוגמא, משחק האולטימטום הוא משחק בצורה רחבה.
בשלב ראשון השחקן הראשון בוחן מספר בין 0 ל100.

משחק בצורה רחבה מוגדר לרוב באמצעות עץ (סוג של גרף). נגדיר אותו כאן בצורה רקורסיבית.

בהנתן מספר סופי של שחקנים נגדיר משחק בצורה רחבה כמשחק בו אחד השחקנים יכול לבחור בין מספר סופי של משחקים בצורה רחבה, או שלאף שחקן אין בחירה אך יש תשלום לכלל השחקנים והמשחק נגמר.

לדוגמא, משחק האולטימטום הוא משחק בצורה רחבה.
בשלב ראשון השחקן הראשון בוחן מספר בין 0 ל100.
בשלב שני אנו שוב במשחק בצורה רחבה, אך הפעם תורו של השחקן השני לבחור להסכים או שלא להסכים.

משחק בצורה רחבה מוגדר לרוב באמצעות עץ (סוג של גרף). נגדיר אותו כאן בצורה רקורסיבית.

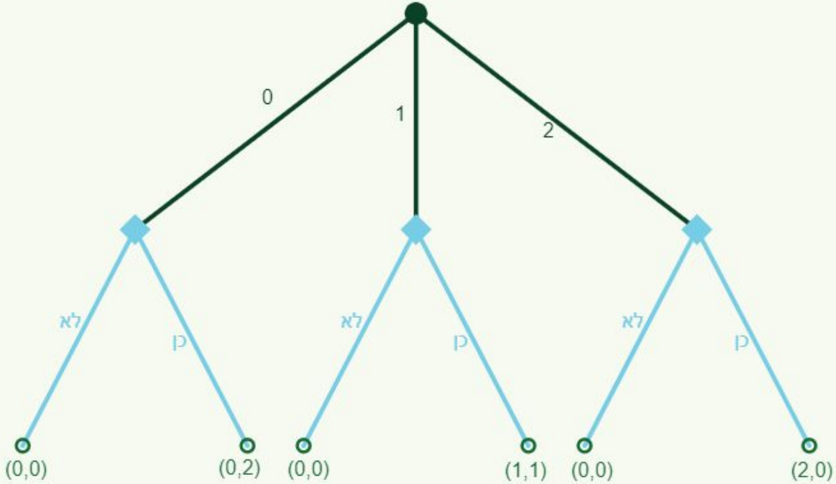
בהנתן מספר סופי של שחקנים נגדיר משחק בצורה רחבה כמשחק בו אחד השחקנים יכול לבחור בין מספר סופי של משחקים בצורה רחבה, או שלאף שחקן אין בחירה אך יש תשלום לכלל השחקנים והמשחק נגמר.

לדוגמא, משחק האולטימטום הוא משחק בצורה רחבה.
בשלב ראשון השחקן הראשון בוחן מספר בין 0 ל100.
בשלב שני אנו שוב במשחק בצורה רחבה, אך הפעם תורו של השחקן השני לבחור להסכים או שלא להסכים.
בשלב השלישי אנחנו מגיעים לסוף המשחק בו מתואר התשלום לשני השחקנים.

משחק האולטימטום בצורה רחבה

נציג את עץ משחק האולטימטום בצורה רחבה.

לצורך הפשטות, נניח שהמשחק הוא במספרים שלמים ועד 2.

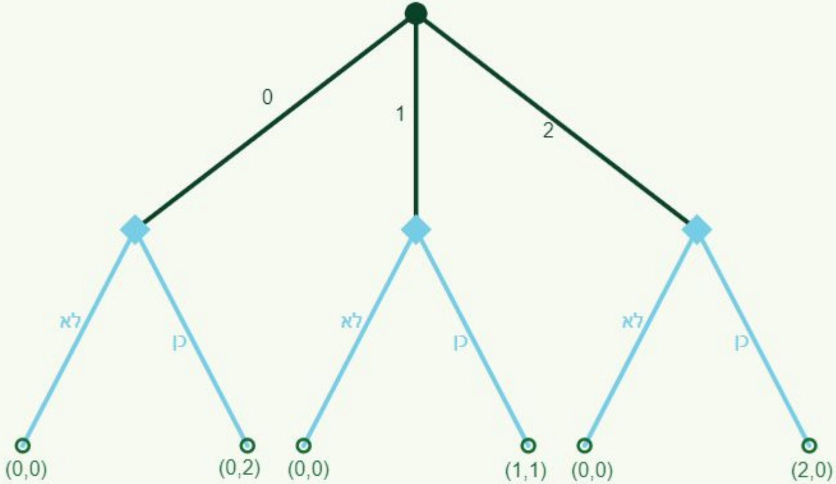


משחק האולטימטום בצורה רחבה

נציג את עץ משחק האולטימטום בצורה רחבה.

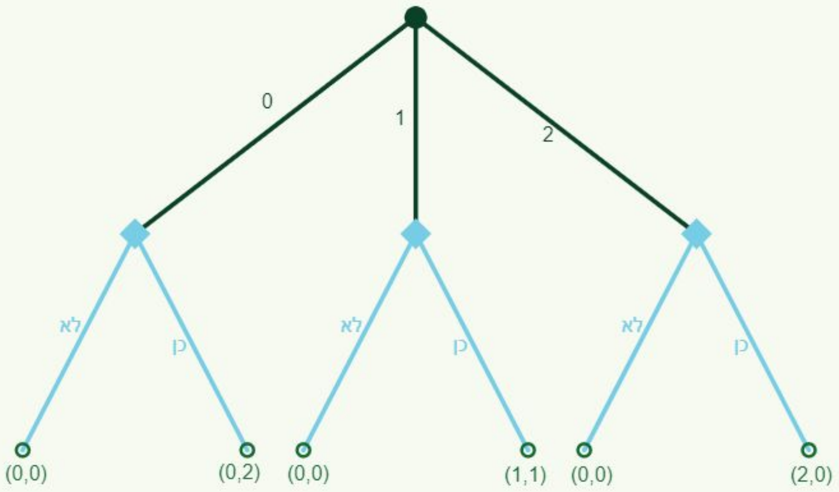
לצורך הפשטות, נניח שהמשחק הוא במספרים שלמים ועד 2.

לשחקן הראשון ישנן שלוש אסטרטגיות, ואילו לשחקן השני יש שמונה אסטרטגיות - להחליט מראש כן או לא בכל אפשרות.



משחק האולטימטום בצורה רחבה

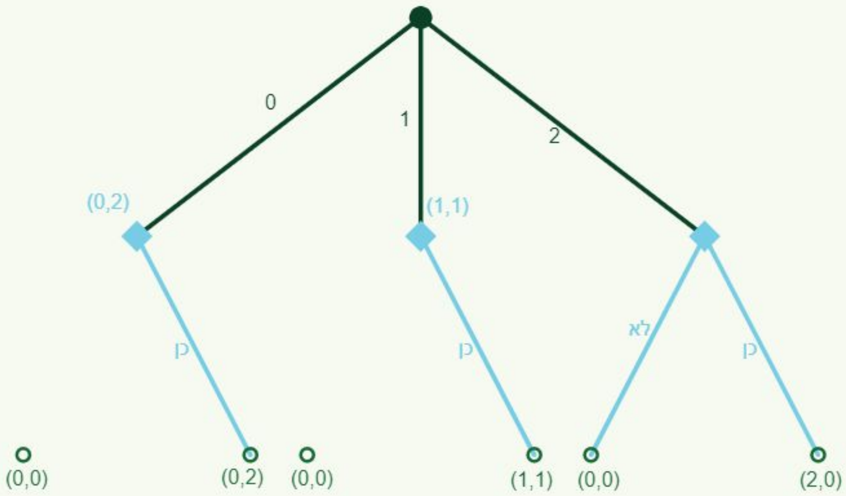
ננתח את המשחק באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק בתתי המשחקים.



משחק האולטימטום בצורה רחבה

ננתח את המשחק באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק בתתי המשחקים.

ראשית נמחק אסטרטגיות נשלטות חזק של השחקן השני.

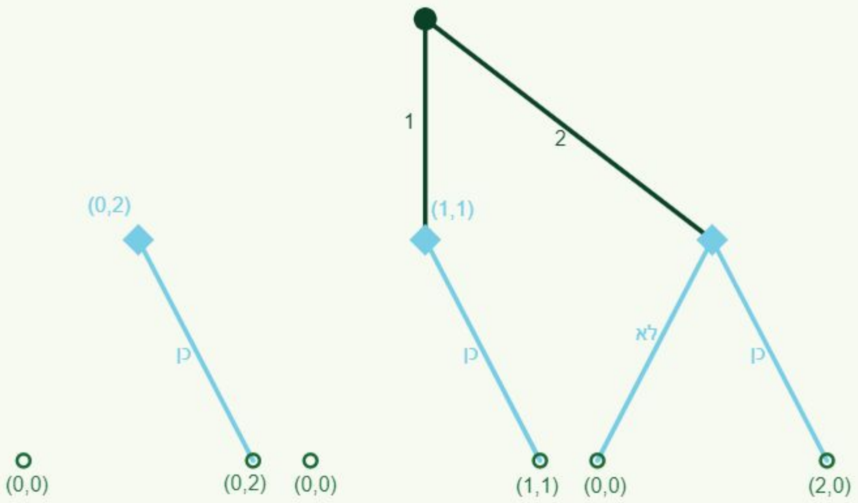


משחק האולטימטום בצורה רחבה

ננתח את המשחק באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק בתתי המשחקים.

ראשית נמחק אסטרטגיות נשלטות חזק של השחקן השני.

כעת נמחק אסטרטגיה נשלטת חזק של השחקן הראשון.



ראינו שכל משחק בצורה רחבה ניתן לתאר בצורה אסטרטגית.

אסטרטגיה של שחקן היא קבוצת הבחירות עבור כל אחד מהקודקודים.

ראינו שכל משחק בצורה רחבה ניתן לתאר בצורה אסטרטגית.

אסטרטגיה של שחקן היא קבוצת הבחירות עבור כל אחד מהקודקודים.

האם כל משחק אסטרטגי ניתן להציג בצורה רחבה?

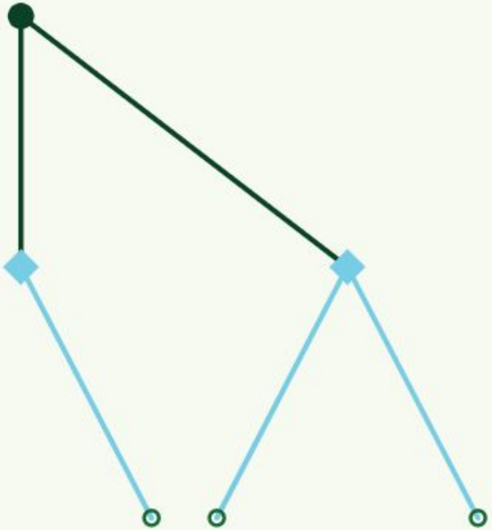
הקשר בין צורה אסטרטגית לרחבה

נביט במשחק אסטרטגי בין שני שחקנים, בו לכל אחד השחקנים שתי אסטרטגיות.

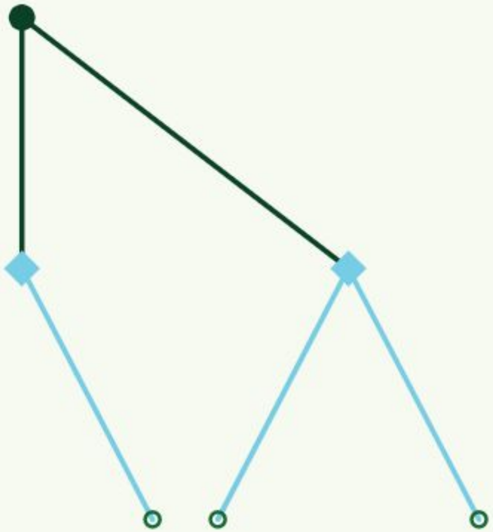
כיוון שלשחקן השני שתי אסטרטגיות, באחד מתתי המשחקים אין לו בחירה.

נביט במשחק אסטרטגי בין שני שחקנים, בו לכל אחד השחקנים שתי אסטרטגיות.

כיוון שלשחקן השני שתי אסטרטגיות, באחד מתתי המשחקים אין לו בחירה.



כלומר עבור אחת האסטרטגיות של השחקן הראשון, תוצאת המשחק קבועה לכל אסטרטגיה של השחקן השני.



כלומר עבור אחת האסטרטגיות של השחקן הראשון, תוצאת המשחק קבועה לכל אסטרטגיה של השחקן השני.

זה וודאי לא חייב להיות המצב במשחק אסטרטגי כללי, לדוגמא נגדית:

שחקנית פרט שחקן זוג	זוג	פרט
זוג	1	-1
פרט	-1	1

נביט במשחקים בצורה רחבה מסוג ספציפי:

- שני שחקנים
- התוצאות האפשרויות הן תיקו או ניצחון לאחד הצדדים
- המשחק נגמר בוודאות אחרי מספר סופי של צעדים

משחקי ניצחון/תיקו/הפסד

נביט במשחקים בצורה רחבה מסוג ספציפי:

- שני שחקנים
- התוצאות האפשרויות הן תיקו או ניצחון לאחד הצדדים
- המשחק נגמר בוודאות אחרי מספר סופי של צעדים

נקרא לאסטרטגיה של שחקן **אסטרטגית ניצחון** אם הוא לא יכול להפסיד כאשר הוא בוחר באסטרטגיה זו.

שימו לב שהוא כן עשוי להגיע למצב של תיקו.

משחקי ניצחון/תיקו/הפסד

נביט במשחקים בצורה רחבה מסוג ספציפי:

- שני שחקנים
- התוצאות האפשרויות הן תיקו או ניצחון לאחד הצדדים
- המשחק נגמר בוודאות אחרי מספר סופי של צעדים

נקרא לאסטרטגיה של שחקן **אסטרטגית ניצחון** אם הוא לא יכול להפסיד כאשר הוא בוחר באסטרטגיה זו.

שימו לב שהוא כן עשוי להגיע למצב של תיקו.

האם בהכרח לאחד משני השחקנים יש אסטרטגית ניצחון?

משפט: עבור המשחקים שהגדרנו בשקופית הקודמת, לפחות אחד השחקנים יכול להבטיח שלא יפסיד.

משפט: עבור המשחקים שהגדרנו בשקופית הקודמת, לפחות אחד השחקנים יכול להבטיח שלא יפסיד.

מסקנה: שח-מט הוא משחק כזה ולכן אחד בהכרח מתקיים אחד משלושת המשפטים הבאים:

- הלבן יכול לכפות ניצחון
- השחור יכול לכפות ניצחון
- שני הצדדים יכולים לכפות תיקו זה על זה

הוכחה:

נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

הוכחה:
נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

עבור משחק עם אפס שלבים, זו בעצם תוצאה:

- אם היא תיקו, שני הצדדים הבטיחו שלא יפסידו.
- אם אחד השחקנים ניצח, הוא הבטיח שלא יפסיד.

הוכחה:

נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

עבור משחק עם אפס שלבים, זו בעצם תוצאה:

- אם היא תיקו, שני הצדדים הבטיחו שלא יפסידו.
- אם אחד השחקנים ניצח, הוא הבטיח שלא יפסיד.

בהנתן n עד אליו הטענה נכונה, נוכיח שהטענה נכונה עבור n.

הוכחה:
נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

עבור משחק עם אפס שלבים, זו בעצם תוצאה:

- אם היא תיקו, שני הצדדים הבטיחו שלא יפסידו.
- אם אחד השחקנים ניצח, הוא הבטיח שלא יפסיד.

בהנתן n עד אליו הטענה נכונה, נוכיח שהטענה נכונה עבור n.

יהי משחק עם n מצבים. כל אחד מההמהלכים של השחקן הראשון יוביל לתת משחק עם פחות מצבים, המקיים את תנאי האינדוקציה.

הוכחה:

נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

עבור משחק עם אפס שלבים, זו בעצם תוצאה:

- אם היא תיקו, שני הצדדים הבטיחו שלא יפסידו.
- אם אחד השחקנים ניצח, הוא הבטיח שלא יפסיד.

בהנתן ח עד אליו הטענה נכונה, נוכיח שהטענה נכונה עבור ח.

יהי משחק עם ח מצבים. כל אחד מהמהלכים של השחקן הראשון יוביל לתת משחק עם פחות מצבים, המקיים את תנאי האינדוקציה.

אם באחד מתתי המשחקים הללו הוא יכול להבטיח שלא יפסיד, הרי שהוא יכול להבטיח שלא יפסיד במשחק המקורי ע"י שיבחר במהלך שהוביל לתת משחק זה.

הוכחה:

נעשה אינדוקציה על מספר מצבי המשחק האפשריים (כאן מניחים שהוא סופי).

עבור משחק עם אפס שלבים, זו בעצם תוצאה:

- אם היא תיקו, שני הצדדים הבטיחו שלא יפסידו.
- אם אחד השחקנים ניצח, הוא הבטיח שלא יפסיד.

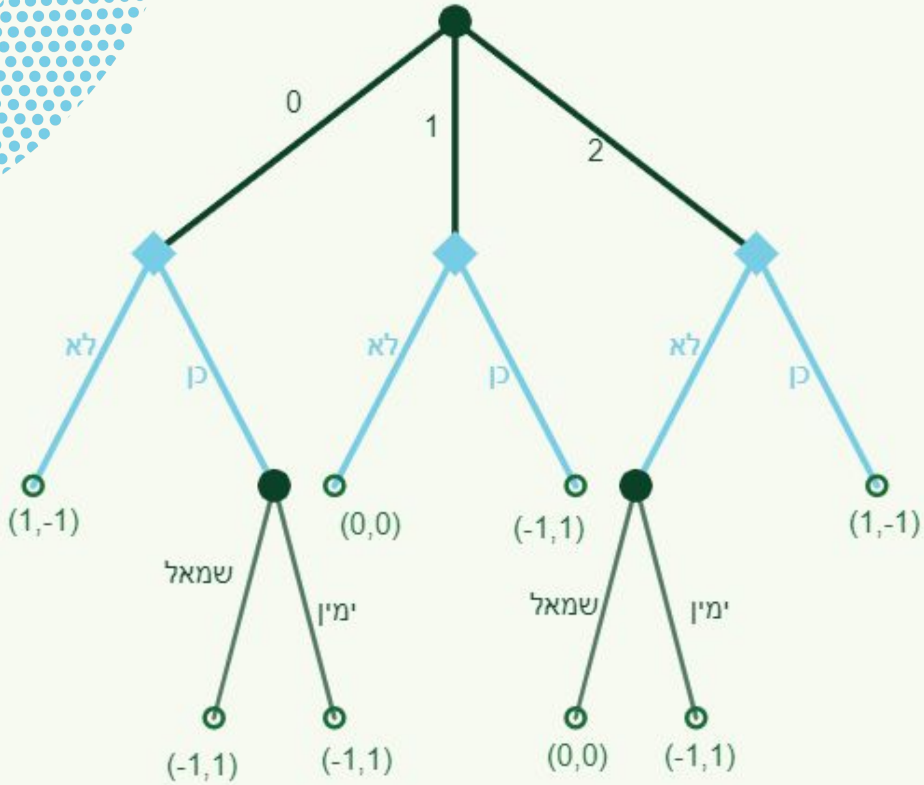
בהנתן n עד אליו הטענה נכונה, נוכיח שהטענה נכונה עבור n.

יהי משחק עם n מצבים. כל אחד מהמהלכים של השחקן הראשון יוביל לתת משחק עם פחות מצבים, המקיים את תנאי האינדוקציה.

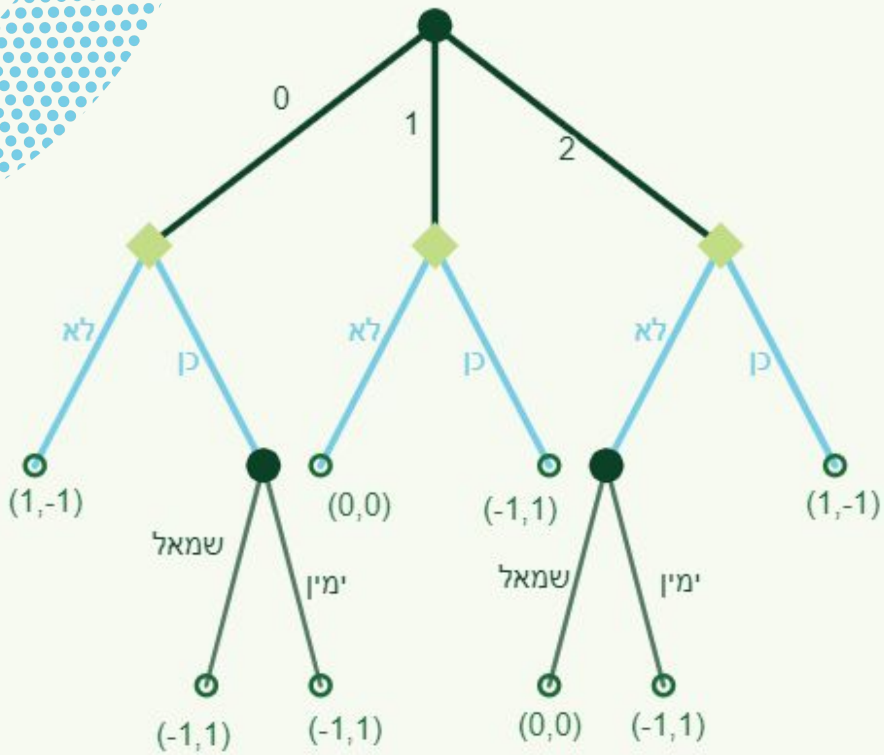
אם באחד מתתי המשחקים הללו הוא יכול להבטיח שלא יפסיד, הרי שהוא יכול להבטיח שלא יפסיד במשחק המקורי ע"י שיבחר במהלך שהוביל לתת משחק זה.
אם בכל תתי המשחקים הללו השחקן השני יכול להבטיח שלא יפסיד, אז הוא יכול להבטיח שלא יפסיד במשחק המקורי.

דוגמא למשפט צרמלו

מי ינצח במשחק הבא?



דוגמא למשפט צרמלו



מי ינצח במשחק הבא?

עבור כל אחד משלושת תתי המשחקים,

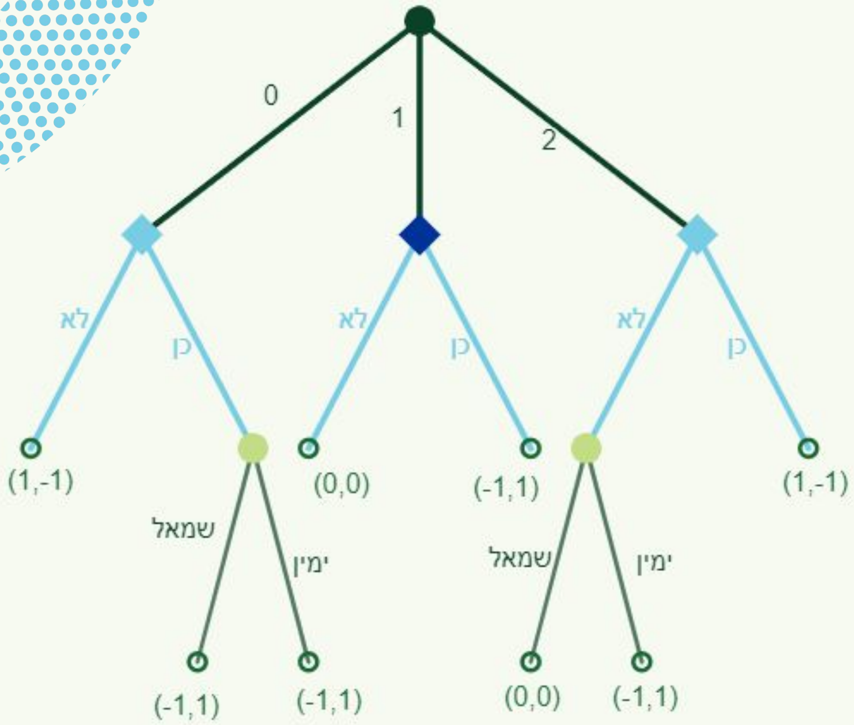
נרצה לדעת מי מנצח.

נסמן באדום ניצחון של השחקן הראשון,

בכחול ניצחון של השחקן השני, ובסגול

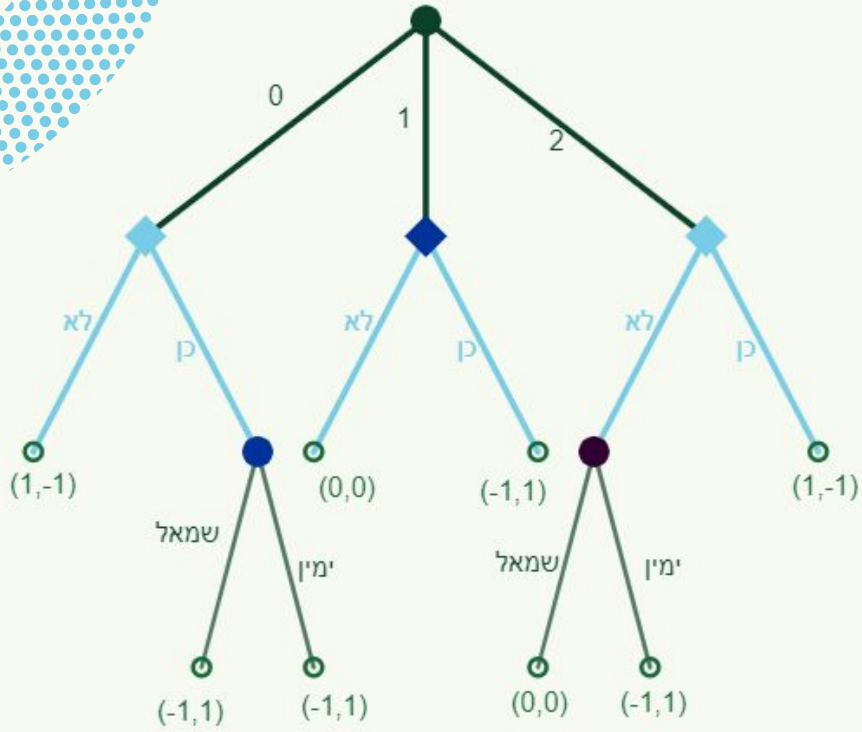
מצב בו שני הצדדים יכולים לא להפסיד.

דוגמא למשפט צרמלו



בתת המשחק האמצעי השחקן השני
מנצח, נותר לגלות מי מנצח בשני תתי
המשחקים המסומנים.

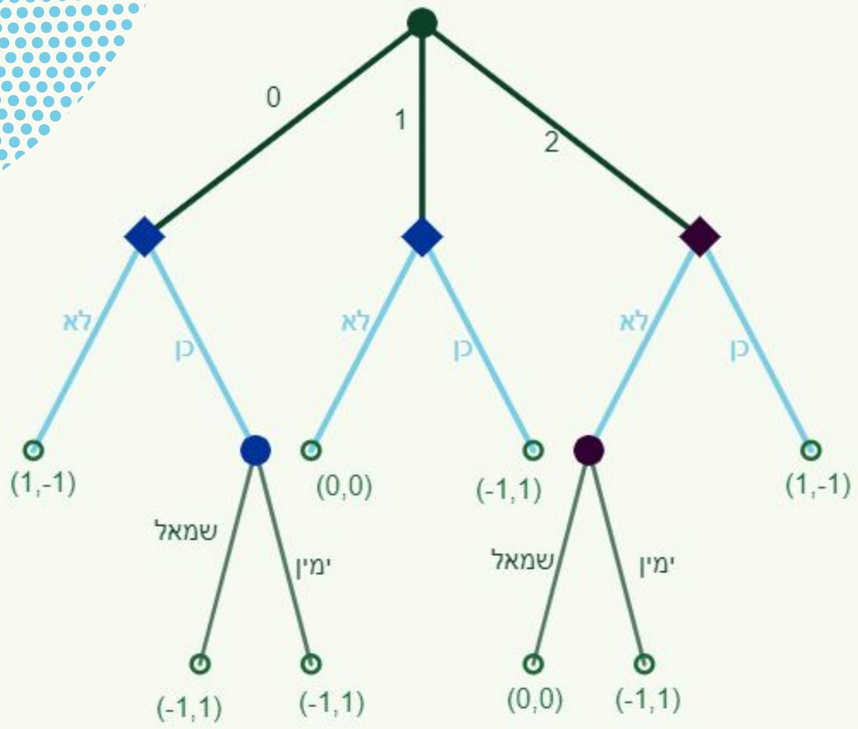
דוגמא למשפט צרמלו



בתת המשחק האמצעי השחקן השני מנצח, נותר לגלות מי מנצח בשני תתי המשחקים המסומנים.

כעת אפשר להשלים את התשובה.

דוגמא למשפט צרמלו



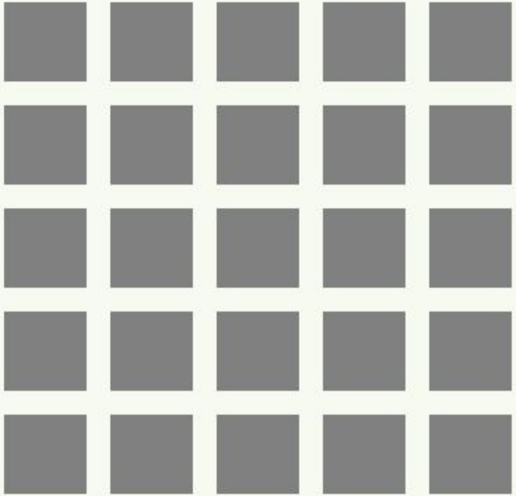
שני השחקנים יכולים להבטיח שלא יפסידו, ומהלך המשחק הצפוי הוא:

- 2
- לא
- שמאל

צ'ומפ - המשחק של דייויד גייל

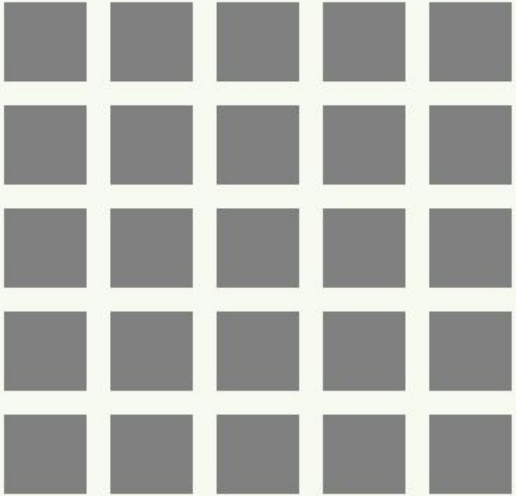
נתון לוח מלבני של משבצות, כל שחקן בתורו בוחר משבצת, ומוחק את כלל המשבצות במלבן שנוצר בינה לבין המשבצת בפינה הימנית העליונה.

השחקן שלוחץ על המשבצת האחרונה, השמאלית התחתונה, מפסיד.



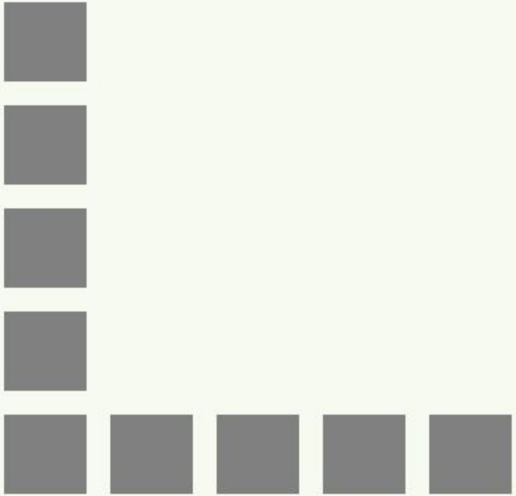
צ'ומפ - המשחק של דייויד גייל

אם הלוח ריבועי, השחקן הראשון מנצח.



אם הלוח ריבועי, השחקן הראשון מנצח.

השחקן הראשון יבחר במשבצת בשורה הלפני אחרונה, ובעמודה השנייה משמאל.



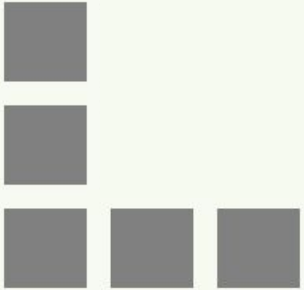
אם הלוח ריבועי, השחקן הראשון מנצח.

השחקן הראשון יבחר במשבצת בשורה הלפני אחרונה, ובעמודה השנייה משמאל.

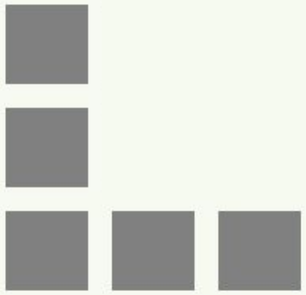
כעת לכל מהלך של השחקן השני,

צ'ומפ - המשחק של דייויד גייל

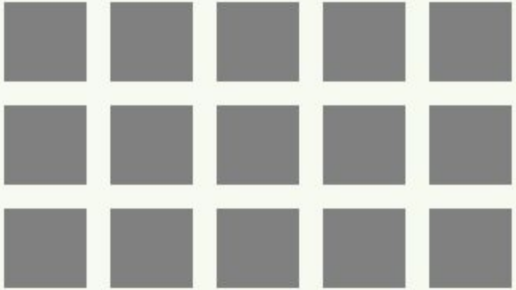
אם הלוח ריבועי, השחקן הראשון מנצח.
השחקן הראשון יבחר במשבצת בשורה הלפני אחרונה, ובעמודה השנייה משמאל.
כעת לכל מהלך של השחקן השני, השחקן הראשון יגיב באופן סימטרי.



אם הלוח ריבועי, השחקן הראשון מנצח.
השחקן הראשון יבחר במשבצת בשורה הלפני אחרונה, ובעמודה השנייה משמאל.
כעת לכל מהלך של השחקן השני, השחקן הראשון יגיב באופן סימטרי.
באופן זה, אחרי כל תור של השחקן השני, נותן לשחקן הראשון משבצת סימטרית ללחוץ עליה. לכן השחקן השני חייב ללחוץ על המשבצת האחרונה.



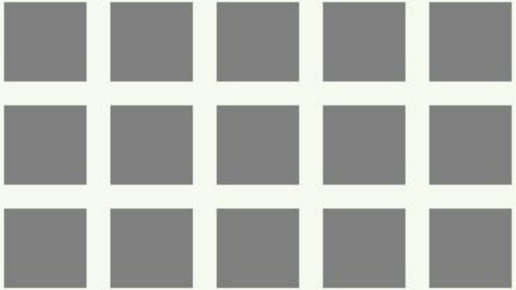
מה לגבי לוח מלבני שאינו ריבועי?



מה לגבי לוח שאינו מלבני?

לפי משפט צרמלו לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה נצחון (אין תיקו).

מי מהשחקנים מנצח?

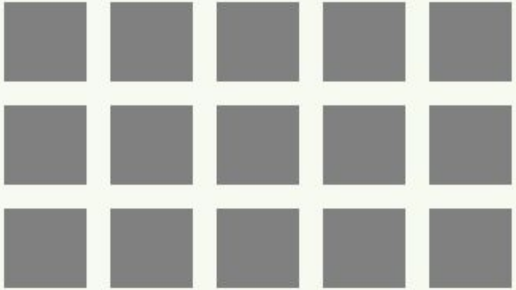


מה לגבי לוח שאינו מלבני?

לפי משפט צרמלו לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה נצחון (אין תיקו).

מי מהשחקנים מנצח?

נב"ש (נניח בשלילה) שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת. לכן לכל מהלך של השחקן הראשון, השחקן השני יכול לנצח.



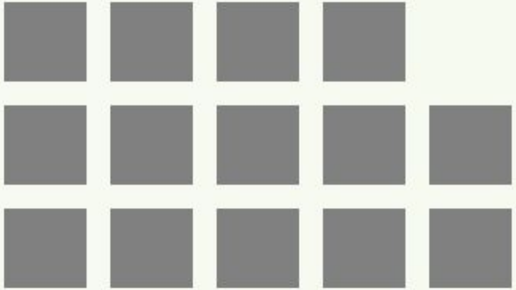
מה לגבי לוח שאינו מלבני?

לפי משפט צרמלו לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה נצחון (אין תיקו).

מי מהשחקנים מנצח?

נב"ש (נניח בשלילה) שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת. לכן לכל מהלך של השחקן הראשון, השחקן השני יכול לנצח.

השחקן הראשון ילחץ על המשבצת הימנית העליונה,



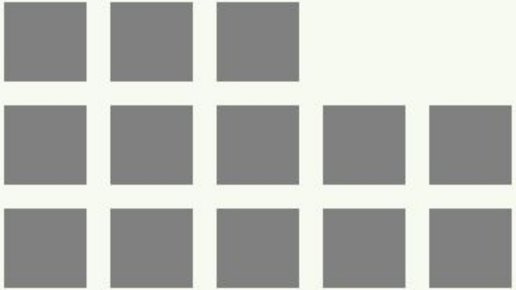
מה לגבי לוח שאינו מלבני?

לפי משפט צרמלו לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה נצחון (אין תיקו).

מי מהשחקנים מנצח?

נב"ש (נניח בשלילה) שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת. לכן לכל מהלך של השחקן הראשון, השחקן השני יכול לנצח.

השחקן הראשון ילחץ על המשבצת הימנית העליונה, והשחקן השני ילחץ במקום כלשהו שיבטיח עבורו ניצחון.



מה לגבי לוח שאינו מלבני?

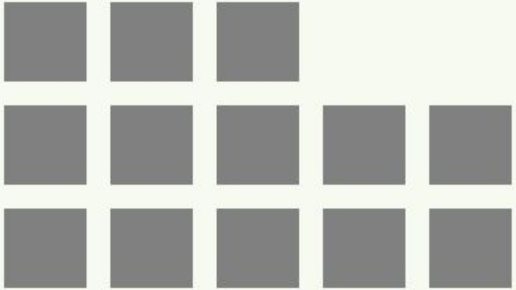
לפי משפט צרמלו לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה נצחון (אין תיקו).

מי מהשחקנים מנצח?

נב"ש (נניח בשלילה) שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת. לכן לכל מהלך של השחקן הראשון, השחקן השני יכול לנצח.

השחקן הראשון ילחץ על המשבצת הימנית העליונה, והשחקן השני ילחץ במקום כלשהו שיבטיח עבורו ניצחון.

אבל אם השחקן הראשון היה לוחץ על המשבצת הזו מלכתחילה, הוא היה מקבל את הלוח המנצח בעצמו! (הרי לחיצה על כל משבצת מוחקת את המשבצת הימנית העליונה), בסתירה.



אתגר הצ'ומפ

מה שמדהים הוא שאנחנו יודעים שהראשון מנצח, אך אין לנו מושג כיצד.

תוכלו לנצח את המחשב?

https://chomp.math-wiki.com

אם הצלחתם באתגר הראשון, האם תתמודדו עם השני?

https://chomp.math-wiki.com/2

אבא וביתו משחקים בגן שעשועים.

האב אומר לביתו שהגיע הזמן לחזור הבייתה, והבת אינה מעוניינת.

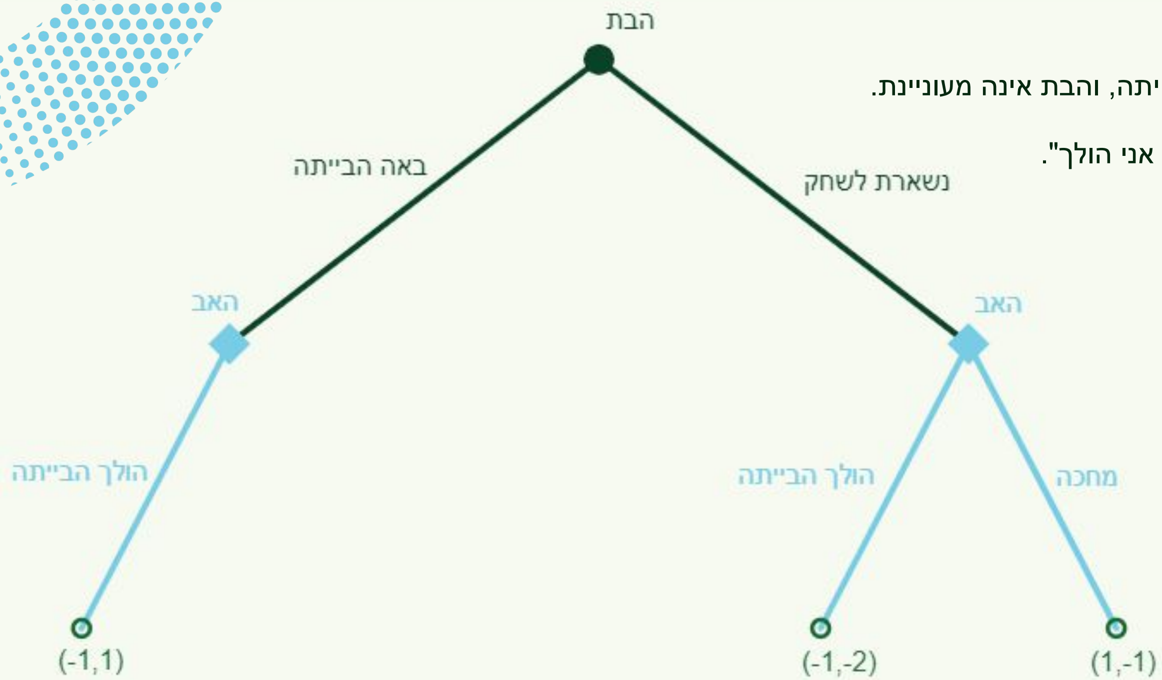
האב מאיים ומודיע "אם לא תבואי עכשיו, אני הולך".

שיווי משקל משוכלל

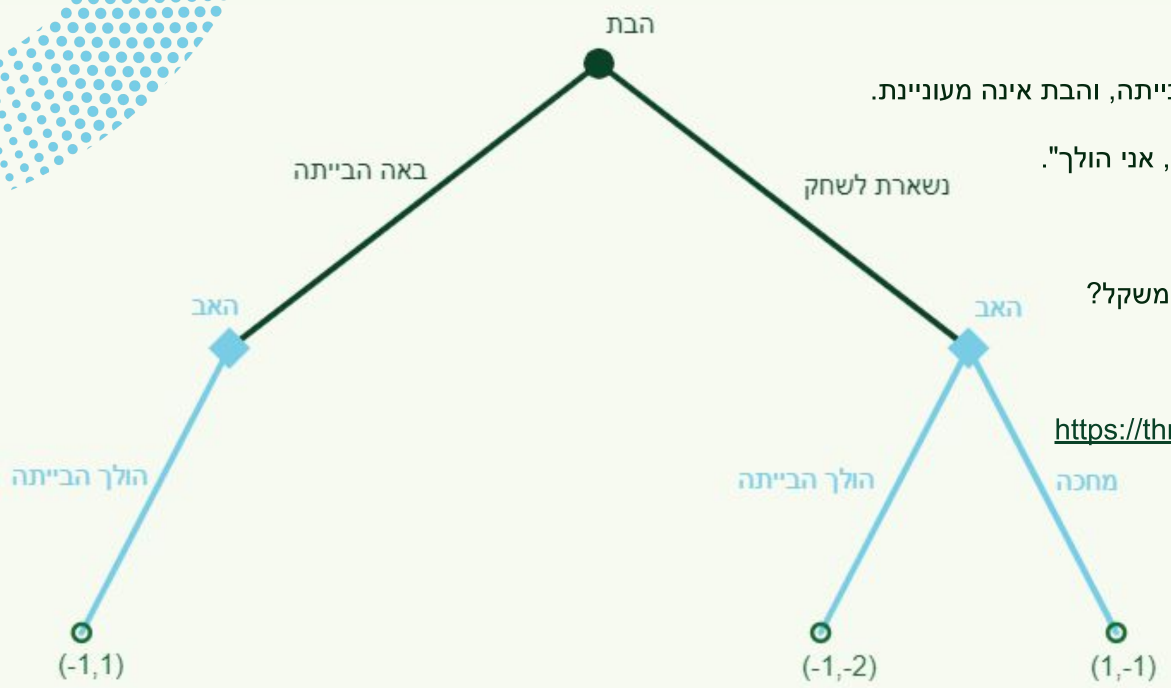
אבא וביתו משחקים בגן שעשועים.

האב אומר לביתו שהגיע הזמן לחזור הבייתה, והבת אינה מעוניינת.

האב מאיים ומודיע "אם לא תבואי עכשיו, אני הולך".



שיווי משקל משוכלל



אבא וביתו משחקים בגן שעשועים.

האב אומר לביתו שהגיע הזמן לחזור הבייתה, והבת אינה מעוניינת.

האב מאיים ומודיע "אם לא תבואי עכשיו, אני הולך".

(באה הבייתה, הולך הבייתה) היא שיווי משקל?

בואו נשחק, אתם תהיו הבנות:

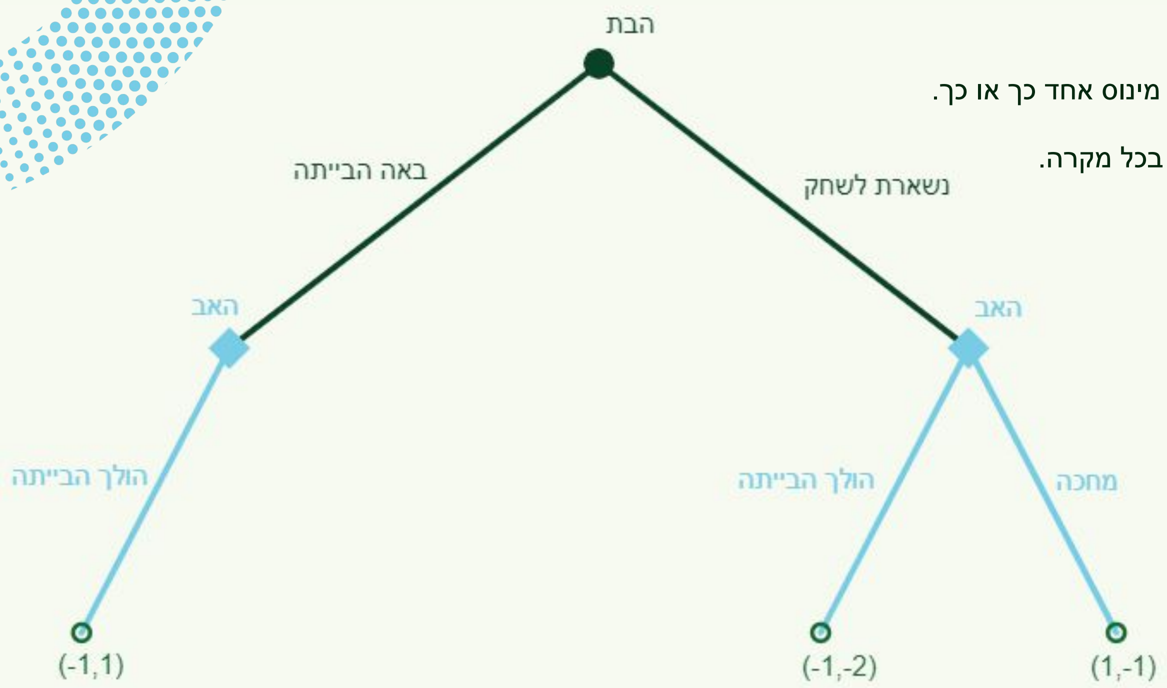
https://threat.math-wiki.com

שיווי משקל משוכלל

אכן הצעת האב היא נקודת שיווי משקל.

הרי אם הוא יעמוד במילתו, הבת תרוויח מינוס אחד כך או כך.

אם הבת תבוא הבייתה, הוא ירוויח אחד בכל מקרה.



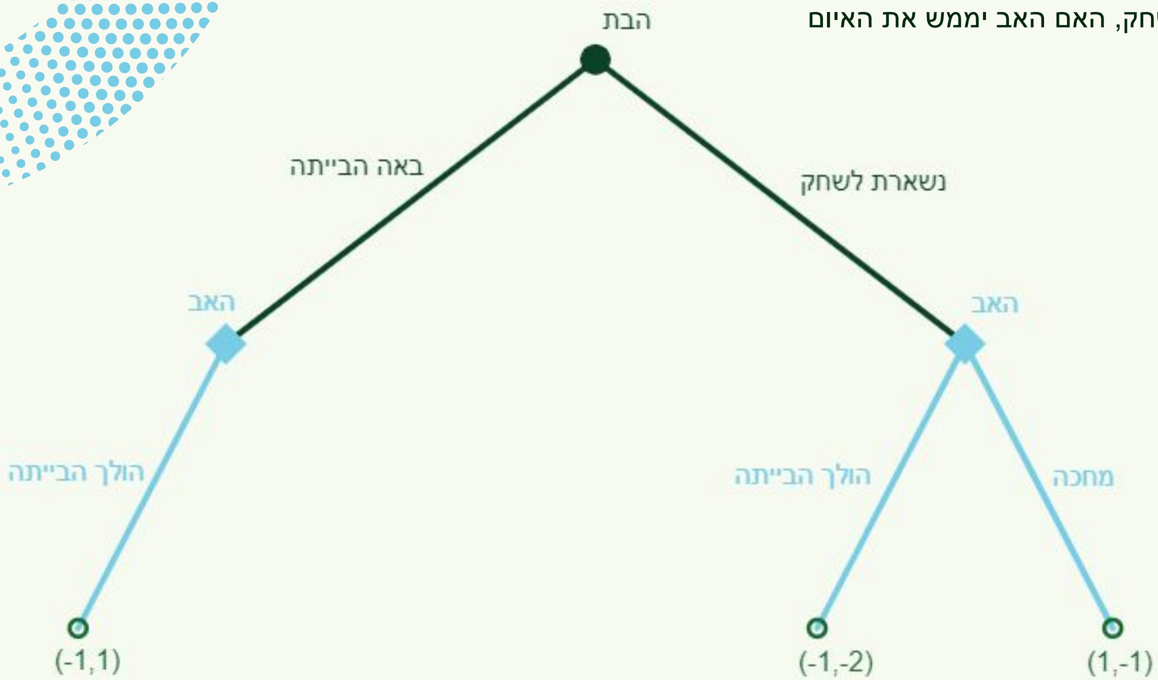
שיווי משקל משוכלל

אבל מה יקרה אם בפועל הבת תבחר לשחק, האם האב יממש את האיום שלו?

אם הוא רציונאלי (ואבא סביר) אז לא.

זה נקרא איום בלתי אמין.

כיצד נמנע ממצבים לא יציבים אלו?



וקטור אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה נקרא שיווי משקל משוכלל אם הוא מהווה שיווי משקל בכל תת משחק של המשחק המקורי.

וקטור אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה נקרא <u>שיווי משקל משוכלל</u> אם הוא מהווה שיווי משקל בכל תת משחק של המשחק המקורי.

אם נביט בתת המשחק בו הבת נשארת לשחק, נגלה שהאסטרטגיה של האב ללכת הביתה היא נשלטת חזק, והוא וודאי לא יבחר בה.

תורת המשחקים

שידוכים יציבים

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University

שידוכים

בסיום לימודי הרפואה, הבוגרים מתקבלים להתמחות בבתי חולים.

לבוגרים יש סולם עדיפויות, וכך גם לבתי החולים.

בסיום לימודי הרפואה, הבוגרים מתקבלים להתמחות בבתי חולים.

לבוגרים יש סולם עדיפויות, וכך גם לבתי החולים.

כיצד יתבצע השיבוץ? מהו שיבוץ "טוב"?

שידוכים

בסיום לימודי הרפואה, הבוגרים מתקבלים להתמחות בבתי חולים.

לבוגרים יש סולם עדיפויות, וכך גם לבתי החולים.

כיצד יתבצע השיבוץ? מהו שיבוץ "טוב"?

הוקמה מערכת מרכזית, מי עשוי להתנגד לה?

שידוכים

בסיום לימודי הרפואה, הבוגרים מתקבלים להתמחות בבתי חולים.

לבוגרים יש סולם עדיפויות, וכך גם לבתי החולים.

כיצד יתבצע השיבוץ? מהו שיבוץ "טוב"?

הוקמה מערכת מרכזית, מי עשוי להתנגד לה?

דוגמאות אמיתיות נוספות:
תרומת כליות.
שיבוץ ילדים לגנים.

העדפות

כל גבר מתעדף את הנשים בסדר מסויים, וכך גם ההפך.

עבור כל זוג, העדפת הגבר את האישה רשומה משמאל, והעדפת האישה את הגבר רשומה מימין.

דפנה	גלית	בר	אלה	נשים / גברים
3,3	2,3	4,1	1,3	אהוד
2,1	4,2	1,3	3,1	בני
2,3	3,4	4,2	1,4	גונן
1,4	3,1	2,4	4,2	דני

העדפות

נניח והגברים יחליטו ביניהם על הזוגות: אהוד וגלית, בני ובר, גונן ואלה, דני ודפנה

נשים / גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גונן	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4

העדפות

נניח והגברים יחליטו ביניהם על הזוגות: אהוד וגלית, בני ובר, גונן ואלה, דני ודפנה

האם הגברים יהיו מרוצים? האם הנשים? האם זו בכלל השאלה הנכונה?

נשים / גברים	דפנה	גלית	בר	אלה
אהוד	3,3	2,3	4,1	1,3
בני	2,1	4,2	1,3	3,1
גונן	2,3	3,4	4,2	1,4
דני	1,4	3,1	2,4	4,2

העדפות

אהוד ואלה מעדיפים זה את זו על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם, ולכן יהיו שני גירושין וחתונה

נשים / גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גונן	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4

העדפות

אהוד ואלה מעדיפים זה את זו על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם, ולכן יהיו שני גירושין וחתונה

גונן וגלית לא יהיו מרוצים במיוחד...

נשים / גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גונן	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4

הגדרה: שידוך נקרא יציב אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).

הגדרה: שידוך נקרא יציב אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).

האם קיים שידוך יציב?

הגדרה: שידוך נקרא יציב אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).

האם קיים שידוך יציב?

האם קיימים מספר שידוכים יציבים שונים?

הגדרה: שידוך נקרא יציב אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).

האם קיים שידוך יציב?

האם קיימים מספר שידוכים יציבים שונים?

איך ניתן להשוות בין שידוכים יציבים שונים?

הגדרה: שידוך נקרא יציב אם לא קיים זוג המעדיפים אחד את השנייה והשנייה את האחד על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם (רווק תמיד יעדיף זוגיות).

האם קיים שידוך יציב?

האם קיימים מספר שידוכים יציבים שונים?

איך ניתן להשוות בין שידוכים יציבים שונים?

כיצד נמצא שידוך?

נניח שיש לנו n גברים וm נשים.

אלגוריתם חיזור גברים גייל-שפלי

נניח שיש לנו n גברים וm נשים.

- ביום הראשון, כל גבר ניצב בדלתה של בחירתו הראשונה.

אלגוריתם חיזור גברים גייל-שפלי

נניח שיש לנו n גברים וm נשים.

- ביום הראשון, כל גבר ניצב בדלתה של בחירתו הראשונה.
- כל אישה משאירה את הגבר שהיא מעדיפה מבין מי שהגיע, ושולחת את האחרים לביתם.

נניח שיש לנו n גברים וm נשים.

- ביום הראשון, כל גבר ניצב בדלתה של בחירתו הראשונה.
- כל אישה משאירה את הגבר שהיא מעדיפה מבין מי שהגיע, ושולחת את האחרים לביתם.
- למחרת, כל גבר דחוי הולך לבחירתו הבאה, ושוב הנשים משאירות רק גבר אחד.

אלגוריתם חיזור גברים גייל-שפלי

נניח שיש לנו n גברים וm נשים.

- ביום הראשון, כל גבר ניצב בדלתה של בחירתו הראשונה.
- כל אישה משאירה את הגבר שהיא מעדיפה מבין מי שהגיע, ושולחת את האחרים לביתם.
- למחרת, כל גבר דחוי הולך לבחירתו הבאה, ושוב הנשים משאירות רק גבר אחד.
- לאחר שכל גבר נדחה בפעם האחרונה, האלגוריתם נגמר.

דוגמא לחיזור גברים

- יום ראשון:
  - אלה - אהוד וגונן
  - בר - בני
  - דפנה - דני
- יום שני
  - אלה - אהוד
  - בר - בני
  - דפנה - דני וגונן

נשים / גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גונן	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4

דוגמא לחיזור גברים

- יום שלישי:
  - אלה - אהוד
  - בר - בני ודני
  - דפנה - גונן
- יום רביעי
  - אלה - אהוד
  - בר - בני
  - דפנה - גונן
  - גלית - דני

גברים \ נשים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גונן	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4

דוגמא לחיזור גברים

נשים גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גונן	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4

- יום שלישי:
  - אלה - אהוד
  - בר - בני ודני
  - דפנה - גונן
- יום רביעי
  - אלה - אהוד
  - בר - בני
  - דפנה - גונן
  - גלית - דני

תוצאת אלגוריתם החיזור

טענה: אלגוריתם חיזור הגברים נגמר בשידוך יציב

תוצאת אלגוריתם החיזור

טענה: אלגוריתם חיזור הגברים נגמר בשידוך יציב

הוכחה:

נב"ש כי יש זוג אנשים המעדיפים אחד את השנייה על פני בני הזוג אליהם שודכו.

נקרא לאישה אלה ולגבר אהוד.

תוצאת אלגוריתם החיזור

טענה: אלגוריתם חיזור הגברים נגמר בשידוך יציב

הוכחה:
נב"ש כי יש זוג אנשים המעדיפים אחד את השנייה על פני בני הזוג אליהם שודכו.
נקרא לאישה אלה ולגבר אהוד.

כיוון שאהוד מעדיף את אלה על בני בת הזוג הנוכחית שלו, סימן שהוא היה אצלה והיא דחתה אותו.

תוצאת אלגוריתם החיזור

טענה: אלגוריתם חיזור הגברים נגמר בשידוך יציב

הוכחה:
נב"ש כי יש זוג אנשים המעדיפים אחד את השנייה על פני בני הזוג אליהם שודכו.
נקרא לאישה אלה ולגבר אהוד.

כיוון שאהוד מעדיף את אלה על בני בת הזוג הנוכחית שלו, סימן שהוא היה אצלה והיא דחתה אותו.

מדוע שאלה תדחה את אהוד? רק עבור מישהו מוצלח יותר.

בכל צעד, אלה רק תתקדם, ותחליף כל גבר רק עבור גרסא משודרגת.

תוצאת אלגוריתם החיזור

טענה: אלגוריתם חיזור הגברים נגמר בשידוך יציב

הוכחה:

נב"ש כי יש זוג אנשים המעדיפים אחד את השנייה על פני בני הזוג אליהם שודכו.
נקרא לאישה אלה ולגבר אהוד.

כיוון שאהוד מעדיף את אלה על בני בת הזוג הנוכחית שלו, סימן שהוא היה אצלה והיא דחתה אותו.

מדוע שאלה תדחה את אהוד? רק עבור מישהו מוצלח יותר.

בכל צעד, אלה רק תתקדם, ותחליף כל גבר רק עבור גרסא משודרגת.

מכאן, אלה מעדיפה את בן הזוג הנוכחי על פני אהוד, בסתירה.

למי השידוך טוב?

למי טוב אלגוריתם חיזור הגברים?

לכאורה, הנשים יושבות רגל על רגל ומסננות את הגבר הטוב ביותר עבורן.

למי טוב אלגוריתם חיזור הגברים?

לכאורה, הנשים יושבות רגל על רגל ומסננות את הגבר הטוב ביותר עבורן.

בפועל, בשידוך המתקבל מאלגוריתם חיזור גברים כל גבר נמצא עם האישה **הטובה** ביותר שהוא יכול להיות משודך לה בשידוך יציב כלשהו.

למי השידוך טוב?

למי טוב אלגוריתם חיזור הגברים?

לכאורה, הנשים יושבות רגל על רגל ומסננות את הגבר הטוב ביותר עבורן.

בפועל, בשידוך המתקבל מאלגוריתם חיזור גברים כל גבר נמצא עם האישה **הטובה** ביותר שהוא יכול להיות משודך לה בשידוך יציב כלשהו.

והנשים? כל אישה משודכת לגבר **הגרוע** ביותר שהיא יכולה להיות משודכת אליו בשידוך יציב כלשהו.

דוגמא לחיזור נשים

- יום ראשון:
  - אהוד - בר
  - בני - אלה ודפנה
  - דני - גלית
- יום שני:
  - אהוד - בר
  - בני - דפנה
  - דני - גלית ואלה

דפנה	גלית	בר	אלה	נשים / גברים
3,3	2,3	4,1	1,3	אהוד
2,1	4,2	1,3	3,1	בני
2,3	3,4	4,2	1,4	גונן
1,4	3,1	2,4	4,2	דני

דוגמא לחיזור נשים

- יום שלישי:
  - אהוד - בר ואלה
  - בני - דפנה
  - דני - גלית
- יום שני:
  - אהוד - אלה
  - בני - דפנה
  - דני - גלית
  - גונן - בר

נשים / גברים	דפנה	גלית	בר	אלה
אהוד	3,3	2,3	4,1	1,3
בני	2,1	4,2	1,3	3,1
גונן	2,3	3,4	4,2	1,4
דני	1,4	3,1	2,4	4,2

דוגמא לחיזור נשים

- יום שלישי:
  - אהוד - בר ואלה
  - בני - דפנה
  - דני - גלית
- יום שני:
  - אהוד - אלה
  - בני - דפנה
  - דני - גלית
  - גונן - בר

נשים / גברים	אלה	בר	גלית	דפנה
אהוד	1,3	4,1	2,3	3,3
בני	3,1	1,3	4,2	2,1
גונן	1,4	4,2	3,4	2,3
דני	4,2	2,4	3,1	1,4

ראשית נוכיח כי אכן כל גבר מקבל את האישה העדיפה ביותר שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב.

ראשית נוכיח כי אכן כל גבר מקבל את האישה העדיפה ביותר שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב.

נב"ש כי באלגוריתם שידוך גברים אחד הגברים נדחה על ידי אישה שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב כלשהו.

למי השידוך טוב?

ראשית נוכיח כי אכן כל גבר מקבל את האישה העדיפה ביותר שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב.

נב"ש כי באלגוריתם שידוך גברים אחד הגברים נדחה על ידי אישה שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב כלשהו.

נעקוב אחרי האלגוריתם, ונביט <u>בפעם הראשונה</u> בה אישה דחתה גבר שיכול להיות משודך אליה, נקרא לאישה זו אלה, לגבר שדחתה נקרא אהוד, ולגבר החדש שקיבלה נקרא בני.

למי השידוך טוב?

ראשית נוכיח כי אכן כל גבר מקבל את האישה העדיפה ביותר שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב.

נב"ש כי באלגוריתם שידוך גברים אחד הגברים נדחה על ידי אישה שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב כלשהו.

נעקוב אחרי האלגוריתם, ונביט <u>בפעם הראשונה</u> בה אישה דחתה גבר שיכול להיות משודך אליה, נקרא לאישה זו אלה, לגבר שדחתה נקרא אהוד, ולגבר החדש שקיבלה נקרא בני.

כמובן שאלה מעדיפה את בני, מה לגבי בני?

למי השידוך טוב?

ראשית נוכיח כי אכן כל גבר מקבל את האישה העדיפה ביותר שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב.

נב"ש כי באלגוריתם שידוך גברים אחד הגברים נדחה על ידי אישה שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב כלשהו.

נעקוב אחרי האלגוריתם, ונביט בפעם הראשונה בה אישה דחתה גבר שיכול להיות משודך אליה, נקרא לאישה זו אלה, לגבר שדחתה נקרא אהוד, ולגבר החדש שקיבלה נקרא בני.

כמובן שאלה מעדיפה את בני, מה לגבי בני?

עד כה בני נדחה על ידי נשים שהוא לא יכול להיות משודך אליהן בשידוך יציב.

למי השידוך טוב?

ראשית נוכיח כי אכן כל גבר מקבל את האישה העדיפה ביותר שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב.

נב"ש כי באלגוריתם שידוך גברים אחד הגברים נדחה על ידי אישה שהוא יכול להיות משודך אליה בשידוך יציב כלשהו.

נעקוב אחרי האלגוריתם, ונביט בפעם הראשונה בה אישה דחתה גבר שיכול להיות משודך אליה, נקרא לאישה זו אלה, לגבר שדחתה נקרא אהוד, ולגבר החדש שקיבלה נקרא בני.

כמובן שאלה מעדיפה את בני, מה לגבי בני?

עד כה בני נדחה על ידי נשים שהוא לא יכול להיות משודך אליהן בשידוך יציב.

כלומר בכל מקרה לאהוד אין סיכוי עם אלה, כי בכל שידוך יציב בני מעדיף את אלה על פני בת הזוג הנוכחית שלו, ואלה מעדיפה את בני. סתירה.

כעת נוכיח כי כל אישה מקבלת את האפשרות הגרועה ביותר באלגוריתם חיזור גברים.

כעת נוכיח כי כל אישה מקבלת את האפשרות הגרועה ביותר באלגוריתם חיזור גברים.

נב"ש שיכול להיות גרוע יותר, כלומר אלה שודכה לאוהד בשידוך גברים, אך בשידוך אחר היא משודכת לבני שהיא פחות מעדיפה.

כעת נוכיח כי כל אישה מקבלת את האפשרות הגרועה ביותר באלגוריתם חיזור גברים.

נב"ש שיכול להיות גרוע יותר, כלומר אלה שודכה לאוהד בשידוך גברים, אך בשידוך אחר היא משודכת לבני שהיא פחות מעדיפה.

כיוון שאוהד קיבל את האישה הטובה ביותר האפשרית, בכל שידוך יציב הוא מעדיף את אלה על פני בת הזוג שלו.

כעת נוכיח כי כל אישה מקבלת את האפשרות הגרועה ביותר באלגוריתם חיזור גברים.

נב"ש שיכול להיות גרוע יותר, כלומר אלה שודכה לאוהד בשידוך גברים, אך בשידוך אחר היא משודכת לבני שהיא פחות מעדיפה.

כיוון שאוהד קיבל את האישה הטובה ביותר האפשרית, בכל שידוך יציב הוא מעדיף את אלה על פני בת הזוג שלו.

אלה מעדיפה את אוהד על פני בני.

כעת נוכיח כי כל אישה מקבלת את האפשרות הגרועה ביותר באלגוריתם חיזור גברים.

נב"ש שיכול להיות גרוע יותר, כלומר אלה שודכה לאוהד בשידוך גברים, אך בשידוך אחר היא משודכת לבני שהיא פחות מעדיפה.

כיוון שאוהד קיבל את האישה הטובה ביותר האפשרית, בכל שידוך יציב הוא מעדיף את אלה על פני בת הזוג שלו.

אלה מעדיפה את אוהד על פני בני.

לכן לא ייתכן שידוך יציב בו אלה ובני הם זוג.

אם ישנם יותר גברים מנשים, חלקם ישארו רווקים באלגוריתם חיזור גברים.

אם ישנם יותר גברים מנשים, חלקם ישארו רווקים באלגוריתם חיזור גברים.

האם ייתכן שהם ימצאו בת זוג בשידוך יציב אחר כלשהו?

אם ישנם יותר גברים מנשים, חלקם ישארו רווקים באלגוריתם חיזור גברים.

האם ייתכן שהם ימצאו בת זוג בשידוך יציב אחר כלשהו?

לא, הם קיבלו את הטוב ביותר שיכלו באלגוריתם חיזור גברים, והטוב ביותר שהם יכולים להשיג זה לבד.

אם ישנם יותר גברים מנשים, חלקם ישארו רווקים באלגוריתם חיזור גברים.

האם ייתכן שהם ימצאו בת זוג בשידוך יציב אחר כלשהו?

לא, הם קיבלו את הטוב ביותר שיכלו באלגוריתם חיזור גברים, והטוב ביותר שהם יכולים להשיג זה לבד.

כיוון שכמות הרווקים קבועה, נובע שבכל שידוך רווק נשאר רווק.

בכל זאת, אולי הרווק ינמיך סטנדרטים וכך ימצא בת זוג?

בכל זאת, אולי הרווק ינמיך סטנדרטים וכך ימצא בת זוג?

לא, שינוי ההעדפות של הרווקים לא יכול להשפיע על מר גורלם.

בכל זאת, אולי הרווק ינמיך סטנדרטים וכך ימצא בת זוג?

לא, שינוי ההעדפות של הרווקים לא יכול להשפיע על מר גורלם.

אכן, באלגוריתם חיזור נשים, אף אישה לא מגיע אל דלת ביתם, אחרת היה שידוך יציב בו הם לא רווקים.

בכל זאת, אולי הרווק ינמיך סטנדרטים וכך ימצא בת זוג?

לא, שינוי ההעדפות של הרווקים לא יכול להשפיע על מר גורלם.

אכן, באלגוריתם חיזור נשים, אף אישה לא מגיע אל דלת ביתם, אחרת היה שידוך יציב בו הם לא רווקים.

כיוון שאף אישה לא מגיעה אליהם, ההעדפות שלהם כלל לא משנות.

בכל זאת, אולי הרווק ינמיך סטנדרטים וכך ימצא בת זוג?

לא, שינוי ההעדפות של הרווקים לא יכול להשפיע על מר גורלם.

אכן, באלגוריתם חיזור נשים, אף אישה לא מגיע אל דלת ביתם, אחרת היה שידוך יציב בו הם לא רווקים.

כיוון שאף אישה לא מגיעה אליהם, ההעדפות שלהם כלל לא משנות.

כיוון שהם ישארו רווקים באלגוריתם חיזור נשים גם לאחר שינוי העדפותיהם, הם ישארו רווקים בכל שידוך יציב, הרי רווק נשאר רווק בכל שידוך יציב.

תודה רבה!

אוניברסיטת בר־אילן
Bar-Ilan University