חשבון אינפינטסימלי 2 | תש"ע מועד א'

פתרון המבחן | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

מרצה: שחר נבו

(לפי מיקוד תשפ"ב)

שאלה 1

ב) חשב $lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(cot(x)-\frac{1}{x}\right)$

(סעיף ב)

$$lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(cot(x)-\frac{1}{x}\right)=lim_{x\to 0}\left(\frac{cot(x)-\frac{1}{x}}{x}\right)$$

$$=lim_{x\to 0}\left(\frac{xcot(x)-1}{x^2}\right)$$

נראה שהמכנה והמונה שואפים לאפס, ונפעיל לופיטל.

$$lim_{x\to 0}xcot(x)-1=\left(lim_{x\to 0}\frac{cot(x)}{(\frac{1}{x})}\right)-1$$

נשתמש בלופיטל (המקרה "$\frac{\infty}{\infty}$"):

$$=\left(lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{-1}{sin^2(x)}\right)}{(\frac{-1}{x^2})}\right)-1=\left(lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{sin^2(x)}\right)\right)-1$$

נשתמש בלופיטל פעמיים (המקרה "$\frac{0}{0}$")

$$=\left(lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{2sin(x)cos(x)}\right)\right)-1=\left(lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{sin(2x)}\right)\right)-1$$

$$=\left(lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{2cos(2x)}\right)\right)-1=\left(lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{cos(2x)}\right)\right)-1=\frac{1}{1}-1=0$$

נפעיל לופיטל על הגבול שלנו,

$$lim_{x\to 0}\left(\frac{xcot(x)-1}{x^2}\right)=lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{sin(x)cos(x)-x}{sin^2(x)}}{2x}\right)$$

$$=lim_{x\to 0}\left(\frac{sin(x)cos(x)-x}{2xsin^2(x)}\right)=lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{sin(2x)}{2}-x}{2xsin^2(x)}\right)$$

נשים לב שוב

$$(sin(x)cos(x)-x)\underset{x\to 0}{\to}(0\cdot 1-0)=0$$

$$\left(2xsin^2(x)\right)\underset{x\to 0}{\to}0$$

ולכן נשתמש בלופיטל

$$=lim_{x\to 0}\frac{cos(2x)-1}{2sin^2(x)+2xsin(2x)}$$

שוב לופיטל

$$=lim_{x\to 0}\frac{-2sin(2x)}{4sin(2x)+4xcos(2x)}=lim_{x\to 0}\frac{-sin(2x)}{2sin(2x)+2xcos(2x)}$$

$$=lim_{x\to 0}\frac{-2cos(2x)}{4cos(2x)+2cos(2x)-4xsin(2x)}=\frac{-2}{4+2}=\boxed{\mathbf{-\frac{1}{3}}}$$

שאלה 2

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ וגזירה ב- $(0,1)$, המקיימת $f(0)=0, f(1)=1$ וכן $f'(x) \leq 3x^2$ לכל $0<x<1$. הוכח $f(x)=x^3$

(פתרון)

נגדיר $g(x) := f(x) - x^3$,
נראה שהפונקציה קבועה על 0.

$$g'(x) = f'(x) - 3x^2 \leq 3x^2 - 3x^2 \leq 0$$

קיבלנו שהפונקציה יורדת או קבועה.
נשים לב כי

$$g(0) = f(0) - 0 = 0, g(1) = f(1) - 1 = 0$$

ולכן הפונקציה קבועה על 0 וסך הכל $f(x) = x^3$

$$\blacksquare$$

שאלה 3

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-5x+14}dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{arctan(x)}{1+x^2}dx$$

(סעיף א)

ניעזר בהצבה הטריגונומטרית, נסמן $a := \sqrt{3}$

נציב הצבה הפוכה $x = asin(t)$ עבור $t \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (מונוטונית ממש, גזירה ועל).

$$t = arcsin(\frac{x}{a})$$

$$(dx = acos(t))$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int \sqrt{a^2-a^2sin^2t} \cdot acos(t)dt = \int a^2\sqrt{1-sin^2(t)} \cdot cos(t)dt$$

$$= \int a^2\sqrt{cos^2(t)} \cdot cos(t)dt = \int a^2 \cdot cos^2(t)dt$$

$$= a^2 \int \frac{cos(2t)+1}{2}dt = a^2\left(\frac{sin(2t)}{4} + \frac{1}{2}t\right) + c = a^2\left(\frac{2sin(arcsin(\frac{x}{a})) \cdot cos(arcsin(\frac{x}{a}))}{4} + \frac{arcsin(\frac{x}{a})}{2}\right) + c$$

$$= a^2\left(\frac{\frac{x}{a} \cdot cos(arcsin(\frac{x}{a}))}{2} + \frac{arcsin(\frac{x}{a})}{2}\right) + c$$

נשים לב כי

$$cos(arcsin(\frac{x}{a})) = \sqrt{1-sin^2(arcsin(\frac{x}{a}))} = \sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$$

ולכן סה"כ

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{ax\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}{2} + \frac{a^2 \cdot arcsin(\frac{x}{a})}{2}$$

לכן,

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}dx = \left[\frac{x\sqrt{3-x^2}}{2} + \frac{3 \cdot arcsin(\frac{x}{\sqrt{3}})}{2}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \left(0 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\boldsymbol{\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}}}$$

(סעיף ב)

$$\int \frac{x^2}{x^2-5x+14}dx = \int 1 + \frac{5x-14}{x^2-5x+14}dx$$

נגדיר $t := x^2-5x+14$ ונתקן את המונה להיות נגזרת של t,

$$dt = (2x-5)dx$$

$$dx = \frac{dt}{2x-5}$$

לכן

$$= \int 1 + \frac{5x-12.5}{x^2-5x+14} + \frac{-1.5}{x^2-5x+14}dx$$

פירקנו לשלושה אינטגרלים שאנחנו יודעים לפתור

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int \frac{5x-7.5}{t}\cdot\frac{dt}{2x-5} = \int \frac{2.5}{t}dt = 2.5log|t| + c = 2.5log|x^2-5x+14| + c$$

ולבסוף,

$$\int \frac{-1.5}{x^2-5x+14}dx$$

נביא למצב של t^2+1,

$$x^2-5x+14=(x-2.5)^2+7.75=7.75\left(\frac{(x-2.5)^2}{7.75}+1\right)$$

נגדיר $t:=\frac{x-2.5}{\sqrt{7.75}}$,

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{7.75}}$$

$$dx=\sqrt{7.75}dt$$

$$\int \frac{-1.5}{x^2-5x+14}dx=-1.5\int \frac{1}{7.75(t^2+1)}\cdot\sqrt{7.75}dt=\frac{-1.5\cdot\sqrt{7.75}}{7.75}\int\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{-3}{\sqrt{31}}arctan\left(\frac{2(x-2.5)}{\sqrt{4\cdot 7.75}}\right)+c$$

נקבל לבסוף,

$$\int \frac{x^2}{x^2-5x+14}dx=\boxed{\boldsymbol{x+2.5log|x^2-5x+14|-\frac{3}{\sqrt{31}}arctan\left(\frac{2x-5}{\sqrt{31}}\right)+c}}$$

(סעיף ג)

$$\int_0^\infty \frac{arctan(x)}{1+x^2}dx$$

נציב

$$t:=arctan(x)$$

$$dt=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$dx = (1+x^2)dt$$

ונקבל,

$$\int \frac{arctan(x)}{1+x^2}dx = \int \frac{t}{1+x^2} \cdot (1+x^2)dt = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{arctan^2(x)}{2} + c$$

ולבסוף,

$$\int_0^\infty \frac{arctan(x)}{1+x^2}dx = lim_{b\to\infty} \left[\frac{arctan^2(x)}{2}\right]_0^b = lim_{x\to\infty} \left(\frac{arctan^2(b)}{2}\right) = \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2} = \boxed{\boldsymbol{\frac{\pi^2}{8}}}$$

שאלה 4

נגדיר $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^{\alpha}}$.
א) הראו כי אם $\alpha > 1$ אז הטור מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$
ב) הראו כי אם $\alpha > 2$ אז ל$f(x)$ נגזרת רציפה ב$\mathbb{R}$

(סעיף א)

נגדיר $g_n(x) := \frac{cos(nx)}{n^{\alpha}}$, ונקבל $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ ונוכיח שהטור מתכנס במ"ש.
נשתמש במבחן החסם של ויירשטראס. יהי $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{cos(nx)}{n^{\alpha}}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$$

ונניח כי $\alpha > 1$, ולכן $\sum \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty$ לכן קיבלנו התכנסות במ"ש של הטור $\sum g_n(x)$,
כלומר $f(x)$ מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$

(סעיף ב)

מהתכנסות במ"ש של הטור שהראינו בסעיף הקודם, נוכל לבצע גזירה איבר איבר.

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^{\alpha}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cos(nx)}{n^{\alpha}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(cos(nx)\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \cdot (-nsin(nx)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-sin(nx)}{n^{\alpha-1}}$$

ושוב לפי מבחן החסם של ויירשטראס, נניח $\alpha > 2$ כלומר $\alpha - 1 > 1$

$$\left|\frac{-sin(nx)}{n^{\alpha-1}}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$, וידוע כי $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}} < \infty$ עבור $\alpha > 2$ ולכן גם $f'(x)$ מתכנסת במ"ש.

■

שאלה 5

א) מצאו רדיוס התכנסות r עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}}x^n$ ומצא את תחום ההתכנסות של הטור.
ב) חשב הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{log(x)^n}{n}\right)$

(סעיף א)

$$r = limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{\left|\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}}\right|}\right)} = limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{\left|\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}}\right|}\right)}$$

נחשב את הגבול במכנה, נראה שהוא 1.

$$= limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}{(n+\frac{1}{n})+\sqrt[n]{(n+\frac{1}{n})^2}}\right)$$

נפצל לגבולות, כולם מתכנסים ולכן נסיק את הגבול

$$lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\frac{1}{n}} = lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n^2} = 1$$

$$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = 1, lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2+\frac{1}{n^2}} = 1$$

סך הכל

$$r = 1$$

ונותר לבדוק את הקצוות, $x=\pm 1$.
עבור $x=1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n)^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty}n^{(n+\frac{1}{n}-n-2)} = \sum_{n=1}^{\infty}n^{2-\frac{1}{n}}$$

$$= 1+\sum_{n=2}^{\infty}n^{2-\frac{1}{n}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}n^{2-\frac{1}{n+1}} \le 1+\sum_{n=1}^{\infty}n^{1.5} < \infty$$

וקיבלנו התכנסות ממבחן ההשוואה.

עבור $x=-1$, מספיק להראות שהטור מתכנס בהחלט (המקרה $x=1$) וסיימנו.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}}(-1)^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n+2}}<\infty$$

לכן תחום ההתכנסות הוא $[-1,1]$.

(סעיף ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{log(x)^n}{n}\right)=?$$

ידוע כי

$$log(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-x^{n+1}}{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

רדיוס ההתכנסות של הטור הוא 1,

$$r=\frac{1}{limsup(\sqrt[n]{n})}=1$$

ובנוסף עבור $x=1$, מקבלים את ההרמוני, עבור $x=-1$ מלייבניץ.
לכן תחום התכנסות $[-1,1)$,
כעת נרצה להציב $log(x)$ וצריך לשנות את תחום ההתכנסות

$$-1\leq x<1$$

$$\frac{1}{e}\leq log(x)<e$$

ולכן מקבלים:

$$-log\,(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

ונציב $log(x)$

$$-log(1-log(x))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(log(x))^n}{n}$$

מקבלים

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(x)^n}{n} = -\log\left(1 - \log(x)\right)}$$

בתחום ההתכנסות $[\frac{1}{e}, e)$