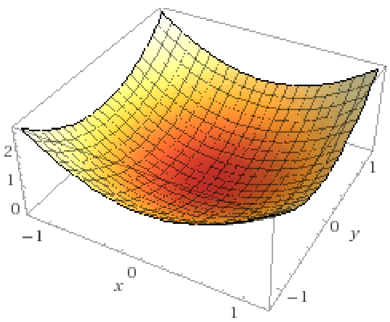
חשבון אינפיניטסימלי 3

מההרצאות של פרופ' מרק אגרנובסקי
חשבון אינפיניטסימלי 3 88-230
סמסטר א' התשעד
הקליד וערך: בנימין לוין

הרצאה 1

דוגמא:

$$t = f(x,y,z)$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$\Gamma_f = \{(x,y,z : z = f(x,y)\}$$



$$f(x_1,\dots,x_n), \big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big)$$

פרק 1

מרחב $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R} = \{(x_1,\dots,x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1,\dots,n\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z): x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

הגדרה

$\mathbb{R}^{n\in\mathbb{N}}$ הוא מרחב ליניארי מעל $\mathbb{R}$.

$$x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n)$$
$$x + y = (x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n)$$
$$\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \lambda x = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

תכונות

אסוציאטיביות $x + y = y + x$

קומוטטיביות $x + (y + z) = (x + y) + z$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$
$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$$
$$\exists 0 = (0,\dots,0)$$
$$x + 0 = 0 + x = -x = (-x_1,\dots,-x_n)$$

גאומטריה ב$\mathbb{R}^n$

מכפילה פנימית

$$< x, y >\in \mathbb{R}$$

1) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

3) $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, \lambda y\rangle$

4) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\langle x, x\rangle \geq 0$

מכפלה פנימית סטנדרטית ב$\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

אי שוויון קושי

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \boxed{|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}}$$

יש שוויון אם"ם x.y ת"ל.

הוכחה

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \varphi(\lambda) \coloneqq \langle y - \lambda x, y - \lambda y\rangle = \langle y, y\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle x, x\rangle \geq 0$$

$$\varphi(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$
$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$$

והשאר טריוויאלי.

זווית

$$x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

$-1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}} \leq 1$ לפי אי שוויון קושי

$$\exists \varphi \in [0, \pi] : cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}}$$
$$\varphi \coloneqq \widehat{\langle x, y\rangle}$$
$$\langle x, y\rangle = \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}cos\varphi$$

נורמה

$$||x||$$

מקיים:

1) $||x|| \geq 0$
$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = x$
2) $||ax|| = |a|||x||$
3) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

נורמה אוקלידית

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$||x|| \coloneqq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

אי שוויון קושי

$$|\langle x,y\rangle| \leq ||x||||y||$$

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

הוכחה

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leq ||x|| + 2||x||||y|| + ||y|| = (||x|| + ||y||)^2$$

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

נורמות ב$\mathbb{R}^n$

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$||x||_\infty \coloneqq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

נורמ-l_p

$$x = (x_1, \dots, x_n) \ \ p \geq 1$$

$$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

תרגיל בית

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_{p\to\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$$

משפט:

$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ נורמה

הוכחה

$$||x||_p \geq 0$$

$$||x||_p \Leftrightarrow ||x||_p = 0$$

$$||\lambda x||_p = |\lambda|||x||_p$$

נשאר להוכיח אי שוויון המשולש:

אי שוויון משולש: אי שוויון של Minkowski

משפט (אי שוויון של Young)

$p,q \geq 1$ נקראים צמודים אם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

עבור p,q כאלה מתקיים:

$$\forall a,b>0 : ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

הוכחה

$\varphi(x)=e^x$ – קמורה (קעורה למעלה)

$$\varphi''(x)=e^x>0$$

אי שוויון ינסן:

$$\varphi(tx+(1-t)y) \leq t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$$
$$e^{tx+(1-t)y} \leq te^x+(1-t)e^y$$
$$\left\{t=\frac{1}{p}, 1-t=\frac{1}{q}\right\}$$
$$x=p\ln a, y=q\ln b$$
$$e^{\frac{1}{p}*pln(a)+\frac{1}{q}qln(b)} \leq \frac{1}{p}e^{pln(a)}+\frac{1}{q}e^{qln(b)}$$
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

משפט (אי שוויון של Holder)

$$x,y \in \mathbb{R}^n$$
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

אזי:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq ||x||_p||y||_q$$

הוכחה

אם $x=0 \vee y=0$ ברור, נניח שלא.

1) $||x||_p=||y||_q=1$ אזי

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i|^p}{p}+\frac{|y_i|^p}{q}\right)=\frac{1}{p}\sum|x_i|^p+\frac{1}{q}\sum|y_i|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

2) אחרת ננרמל את הווקטורים:

$$x' \coloneqq \frac{x}{||x||_p}, y' = \frac{y}{||x||_q}$$
$$\sum |x_i' y_i'| \leq 1$$
$$\sum \frac{|x_i||y_i|}{||x||_p ||y||_q} \leq 1$$
$$\sum |x_i y_i| \leq ||x||_p ||y||_q$$

הוכחה של אי שוויון מינקובסקי

$$||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

הוכחה

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

$$||x+y||_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$
$$\leq \{Holder\} \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$||x+y||^p \leq \left(||x||_p + ||y||_p\right) \left(\sum |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

אבל

$$\left(\sum |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = ||x+y||_p^{p-1}$$

ולכן $||x+y||_p^p \leq \left(||x||_p + ||y||_p\right) ||x+y||_p^{p-1}$

$$||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

טופולוגיה ב$\mathbb{R}^n$

מרחק

$||x||$ נורמה, אזי $\rho(x,y) \coloneqq ||x-y||$ מטריקה

כדור

$$B(a,r) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(a,x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| < r\}$$

a מרכז, r רדיוס

הרצאה 2

כדורים

$a \in \mathbb{R}^n, r > 0$

כדור פתוח: $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$

כדור סגור: $\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$

ספרה: $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| = r\}$

הגדרה

יהי $\|\ \|$, $|\|\ \||$ נורמות, נאמר כי $\|\ \| \sim |\|\ \||$ (שקולות) אם קיים $k, K > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$k\,|\|x\||\le \|x\| \le K\,|\|x\||$$

הערה

$$|\|x-a\|| < \epsilon \Rightarrow \|x-a\| \le K\epsilon$$
$$x \in B_2(a,\epsilon) \Rightarrow x \in B_1(a,K\epsilon)$$

דוגמא

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \le \sqrt{n}\max|x_i| = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
$$\|x\|_\infty = \max|x_i| \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|x\|_2$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad k=1, K=\sqrt{n}$$
$$\|\ \|_2 \sim \|\ \|_\infty$$

משפט

כל שתי נורמות $|\|\ \||, \|\ \|$ ב-$\mathbb{R}^n$ שקולות.

הגדרה

הקבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ תיקרא <u>חסומה</u> אם קיים $M \ge 0$ כך $\forall x \in A\ \|x\| \le M$

$A \subseteq \bar{B}(0,M)$

הגדרה

$U \subseteq \mathbb{R}^n$. $a \in U$ תיקרא נקודה פנימית אם $\exists\epsilon: B(a,\epsilon) \subset U$

$\mathring{U} =$ {כל נק' פנימית של U} - פנים ($\mathring{U} = intU$).

הגדרה

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא קבוצה פתוחה אם $\mathring{U} = U$

U פתוחה $\Leftrightarrow$ כל נקודה פנימית $a \in U$ היא פנימית.

דוגמא

$$n = 1, U = \{0,2\}$$

הגדרה

$B(a, \epsilon)$ תקרא ϵ-סביבה של a.

אם $U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה כך ש$a \in U$ אזי U סביבה של a.

הגדרה

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה סגורה אם $\mathbb{R}^n - F$ היא קבוצה פתוחה.

דוגמא

$$[0,1] \in \mathbb{R}$$

תרגיל

$B(a, r)$ קבוצה פתוחה, $\bar{B}(a, r)$ קבוצה סגורה.

הוכחה

$$U = B(a, r)$$
$$\epsilon = r - ||x_0 - a|| > 0$$
$$x \in B(x_0, \epsilon) \Rightarrow ||x - x_0|| < \epsilon$$
$$||x - a|| = ||(x - x_0) + (x_0 - a)|| \leq ||x - x_0|| + ||x_0 - a|| < \epsilon + ||x_0 - a|| = r$$

כלומר $x \in B(a, r)$ ולכן $B(x_0, \epsilon) \subset B(a, r)$.

$\bar{B}(a, r)$ סגור אם"ם $\mathbb{R}^n - \bar{B}(a, r)$ פתוחה.

$$\mathbb{R}^n - \bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| > r\}$$
$$x_0 \in \mathbb{R}^n - \bar{B}(a, r)$$
$$0 < \epsilon < ||x_0 - a|| - r$$
$$B(x_0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n - \bar{B}(a, r)$$

אי שוויון משולש

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \left|||x|| - ||y||\right| \leq ||x - y|| \leq ||x|| + ||y||$$

הגדרה

$F \subseteq \mathbb{R}^n$. $p \in \mathbb{R}^n$ נקודת הצטברות אם $\forall \epsilon > 0 : B(p, \epsilon) \cap F \neq \phi$.

דוגמא

$$F = [0,1)$$

נקודות ההצטברות הם $[0,1]$.

הגדרה

תהי $F \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\bar{F} = \{\text{כל נקודות הצטברות של } F\}$$

$\bar{F}$-סגור של F.

$$F \subseteq \bar{F}$$

משפט

F-סגורה אם"ם $F = \bar{F}$

הוכחה

נניח שF-סגורה.

$\mathbb{R}^n - F$ פתוחה.

$p \in \bar{F}$. נניח בשלילה כי $p \notin F$, אזי $p \in \mathbb{R}^n - F$ ולכן $\exists \epsilon > 0 : B(p,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n - F$

$B(p,\epsilon) \cap F = \phi$ ולכן $p \notin \bar{F}$ בסתירה וכלן $F = \bar{F}$.

הכיוון השני דומה.

הגדרה

אם הקבוצה $F \subseteq \mathbb{R}^n$ היא

1) F חסומה
2) F סגורה

אזי F קומפקטית.

דוגמא

1) $F = [1,\infty)$ לא חסומה ולכן לא קומפקט.
2) $F = (0,1)$ לא קומפקט.
3) $\mathrm{F} = [1,2] \cup [3,4]$ קומפקטי.

אלגברה ליניארית

$X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ תת מרחב ליניארי אם"ם:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha x + \beta y \in X_0$$

בסיס

$\{e_1, \dots, e_m\} \subset X_0$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית ומקיימית $span\{e_1, \dots, e_m\} = \{\sum_{i=1}^m d_i e_i : d_i \in \mathbb{R}\} = X_0$

$$m = \dim X_0$$

מרחבים אפינים (מישוריים, affine spaces)

$$L = x_0 + X_0, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

אם $e_1, \dots, e_m$ בסיס בX_0 אזי $L = \{x = x_0 + \sum_{i=1}^m d_i e_i : d_i \in \mathbb{R}\}$

להשלים $L =$

$X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ תת מרחב ליניארי.

$$\mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^\perp$$
$$\forall x \in X_0, y \in X_0^\perp : \langle x, y \rangle = 0 \ (x \perp y)$$

נר-בסיס ב $X_0^{\perp}$

$$X_0^{\perp} = \{\lambda D : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$v = (A_1, \dots, A_n)$$

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = 0\}$$
$$dimX_n = n - 1$$

$$dimX_0 = m$$

$$dimX_0 = m \Rightarrow dimX_0^{\perp} = n - m$$

$\{v_1, \dots, v_{n-m}\}$ בסיס ב $X_0^{\perp}$.

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_1\rangle = \cdots = \langle x, v_{n-m}\rangle = 0\}$$
$$v_j = \left(A_{1j}, \dots, A_{nj}\right)$$
$$X_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} A_{ij}x_i = 0, j = 1, \dots, n - m\right\}$$

תת מרחב ליניארי X_0 $dimX_0 = m$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \cdots + A_{n1}x_n = 0 \\ \dots \dots \\ A_{1,(n-m)}x_1 + \cdots + A_{n,(n-m)}x_n = 0 \end{cases}$$

$n - m$ משוואות ליניאריות $rank\left(A_{ij}\right)_{i,j=1}^{\text{משהו}}$

מישור אפיני על Hyperplane

$$dimL = n - 1$$
$$L = a + X_0, dimX_0 = n - 1$$
$$x \in L \Leftrightarrow x = a + u, u \in X_0 \Leftrightarrow x - a = u \in X_0$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : x - a \in X_0\}$$
$$\langle x - a, v\rangle = 0, v \in X_0^{\perp}$$

$$\boxed{A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = C}$$

עבור $C = A_1a_1 + .. + A_na_n$ $a = (a_1, \dots, a_n)$

מקרא

$$dimL = m$$
$$L: \begin{cases} A_{11}(x_1 - a_1) + \cdots + A_{n1}(x_n - a_n) = 0 \\ \dots \dots \\ A_{1,(n-m)}(x_1 - a_1) + \cdots + A_{n,(n-m)}(x_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \cdots + A_{n1}x_n = C_1 \\ \dots \dots \\ A_{1,(n-m)}x_1 + \cdots + A_{n,(n-m)}x_n = C_n \end{cases}$$

קו ישר ב$\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{L} = a + X_0$$

$$\dim X_0 = 1$$

$e \in X_0 . e \neq 0$
$L = \{x = a + \lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$
$x - a = \lambda e$

$$\begin{gathered} x_1 - a_1 = \lambda e_1 \\ ------ \\ x_n - a_n = \lambda e_n \\ \lambda = \frac{x_1 - a_1}{e_1} \end{gathered}$$

הרצאה 3 – פרק 2
תורת הקבוצות ב$\mathbb{R}^n$

גבול של סדרה

$$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}, x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$$
$$x_m = (x_{m1}, \dots, x_{mn})$$

הגדרה

תהי $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ $x^m \in \mathbb{R}^n$. L גבול של הסדרה אם $\lim_{m\to\infty} ||x^m - L|| = 0$.

לא תלוי בבחירה של נורמה מכיוון שאם $|| \ ||, ||| \ |||$ נורמות ב$\mathbb{R}^n$ אזי $k\,|||x||| \le ||x|| \le k\,|||x|||$

ולכן $k\,|||x^m - L||| \le ||x^m - L|| \le K\,|||x^m - L|||$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} ||x^m - L|| = 0 \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} |||x^m - L||| = 0$$

$$L := \lim_{m\to\infty} x^m \qquad x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} L$$

$$\boxed{L = \lim_{m\to\infty} x^m \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m \ge \bar{m} : ||x^m - L|| < \epsilon}$$

משפט

$$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}, x^m \in \mathbb{R}^n$$
$$x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} L \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n : x_j^m \xrightarrow[m\to\infty]{} L_j$$

הוכחה

ניקח $||x||_1$.

בכיוון הראשון

$$||x^m - L||_1 = |x_1^m - L_1| + \dots + |x_n^m - L_n|$$
$$\forall j : \ 0 < |x_j^m - L_j| \le ||x^m - L_j||_1 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

ולכן לפי הלמה של הסנדוויץ' $\forall j : \ x_j^m \to L_j$

בכיוון השני, אם $\forall j\ |x_j^m - L_j| \to 0$ אזי

$$||x^m - L||_1 = |x_1^m - L_1| + \dots + |x_n^m - L_n| \to 0$$

ולכן $\lim_{m\to\infty} x^m = L$

תכונות

תהיו $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}, \{y^m\}_{m=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{m\to\infty} y^m = M$, $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = L$ ∃, אזי

1) $\exists \lim\limits_{m\to\infty} (\alpha x^m + \beta y^m) = \alpha L + \beta M$
2) $\exists lin_{m\to\infty} \langle x^m, y^m\rangle = \langle L, M\rangle$
3) $\lim\limits_{m\to\infty} ||x^m|| = ||L||$

הוכחות

1) לפי קורדינטות.
2) $\lim\limits_{m\to\infty} \langle x^m, y^m\rangle = \lim\limits_{m\to\infty} \sum x_i^m y_i^m = \langle L, M\rangle$
3) $\Big|||x^m|| - ||L||\Big| \le ||x^m - L||$

$$||x^m - L|| \to 0 \Rightarrow ||x^m|| \to ||L||$$

תתי סדרה

$$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$$
$$\mathbb{N} \ni j \to m_j \in \mathbb{N}$$
$$j < s \Rightarrow m_j < m_s$$
$$\{x^{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$$

משפט

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה

$$x^m \to L$$
$$\epsilon = 1\ \exists \bar{m} \forall m \ge \bar{m} : ||x^m - L|| < 1$$
$$M := \max\left\{||x^1||, \dots, ||x^{\bar{m}-1}||, ||L|| + 1\right\}$$
$$||x^m|| = ||L + (x^m - L)|| \le ||L|| + 1$$
$$m \ge \bar{m} \quad ||x^m|| \le M$$
$$m \le \bar{m} - 1 \quad ||x^m|| \le M$$

למה Balzano Weirtrass

אם $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ חסומה אז קיימת תת סדרה $\{x^{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ המתכנסת.

הוכחה

$$\forall m \in \mathbb{N} : ||x^n|| < C$$
$$||x^m||_{\infty} = \max\{|x_1^m|, \dots, |x_n^m|\}$$
$$\forall j\ |x_j^m| \le C$$

נתחיל עם $\{x_1^m\}_{m=1}^{\infty}$ חסומה, ולכן קיימת $\left\{x_1^{m_{j_1}}\right\}_{j_1=1}^{\infty}$ המתכנסת.

נתבונן בסדרה $\left\{x_2^{m_{j_1}}\right\}_{j_1=1}^{\infty}$ חסומה ולכן קיימת $\left\{x_2^{m_{j_{1_{j_2}}}}\right\}_{j_2=1}^{\infty}$ המתכנסת, נמשיך כך עם כל הקורדינטות.

בסוף: $\left\{x_n^{m_{j_{1_{\ddots_{j_n}}}}}\right\}_{j_n=1}^{\infty}$ תת סדרה של $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ המתכנסת.

פונקציות

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

$m = 1$ נאמר כי f סקלית

$m > 1$ נאמר כי f וקטור-פונקציה.

Ω – תחום הגדרה, $\Omega = Dom(f)$

גרף

$$f : \overset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\Omega} \to \mathbb{R}^m$$

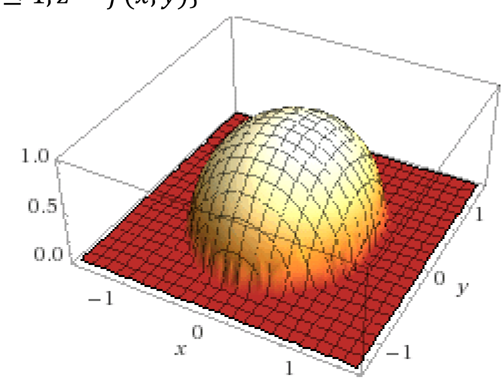
$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$Graph(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m} : x_{n+1} = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m} = f_m(x_1, \dots, x_n)\}$$

דוגמאות

1) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

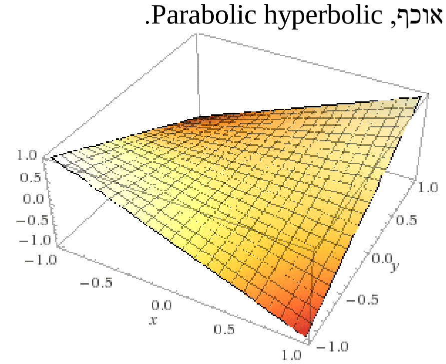
$$Dom(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = f(x, y)\}$$



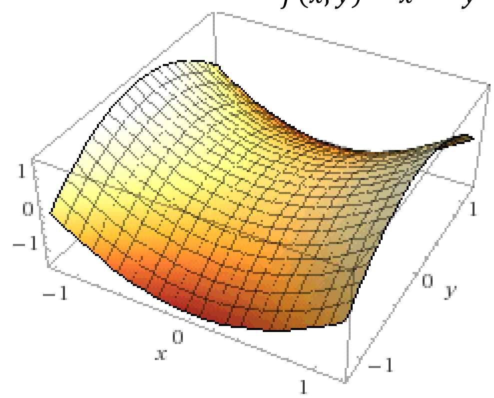
2) $f(x, y) = xy$

$$Dom(f) = \mathbb{R}^2, \qquad \Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$$

אוכף, Parabolic hyperbolic.



$f(x,y) = x^2 - y^2$ (3



נשים לב כי $z = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = \{u = x-y, v = x+y\} = uv$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

כלומר הפונקציה xy היא העצם הפונקציה שלנו עם סיבוב ב$-\frac{\pi}{4}$ ועם מתיחה $\sqrt{2}$.

גבול של פונקציה

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n$$

הגדרה

p-נקודת גבול, $p \in Lim\Omega$ אם:

$$\forall \epsilon > 0 \exists x \in \Omega, x \neq p : \left\|x - p\right\| < \epsilon$$
$$\forall \epsilon > 0 \ (B(p,\epsilon) - \{p\}) \cap \Omega \neq \phi$$

הגדרה

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^n, p \in Lim\Omega$$

אומרים שווקטור $L \in \mathbb{R}^n$ הוא גבול של f בנקודה p אם מתקיים:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega : \ x \neq p \wedge \left\|x - p\right\| < \delta \Rightarrow \left\|f(x) - L\right\| < \epsilon$$

$$L = \lim_{x \to p} f(x) \qquad f(x) \xrightarrow[x \to p]{} L$$

גאומטרי

$$L = \lim_{x \to p} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B(p,\delta) - \{p\}) \subset B(L,\epsilon)$$

הרצאה 4

גבול לפי Heine

הגדרה

$$f:\Omega \to \mathbb{R}^m$$
$$p \in Lim\Omega$$

$$L \coloneqq (H)\lim_{x\to p} f(x) \Leftrightarrow \forall\{x^k\}_{k=1}^{\infty}, x^k \in \Omega, x^k \neq p : \lim_{k\to\infty} x^k = p \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x^k) = L$$

משפט

$$L = \lim_{x\to p} f(x) \Leftrightarrow L = (H)\lim_{x\to p} f(x)$$

הוכחה

נניח כי $L = \lim_{x\to p} f(x)$

ניקח כל סדרה $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}, x^k \in \Omega, x^k \neq p, \lim_{k\to\infty} x^k = p$. נקבע $\epsilon > 0$

$$\exists\delta > 0 \forall x \in \Omega : 0 < \left\|x - p\right\| < \delta \Rightarrow \left\|f(x) - L\right\| < \epsilon$$
$$\exists\bar{k}\forall k \geq \bar{k} : \left\|x^k - p\right\| < \delta$$

בנוסף מתקיים $x^k \neq p$, ולפי בחירה של δ מתקיים $\left\|f(x^k) - L\right\| < \epsilon$ מתקיים לכל $k \geq \bar{k}$ ולכן לפי הגדרה של גבול $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = L$

נניח כי $L = (H)\lim_{x\to p} f(x)$

נניח $\neg \lim_{x\to p} f(x) = L$

$$\exists\epsilon > 0 \forall\delta > 0 \exists x_\delta, x \in \Omega, x \neq p \wedge \left\|f(x) - p\right\| \geq \epsilon$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \delta = \delta_k = \frac{1}{k}$$
$$x_{\delta_k} \coloneqq x^k$$
$$x^k \in \Omega, x^k \neq p$$
$$\left\|x^k - p\right\| < \delta_k = \frac{1}{k}$$
$$\left\|f(x^k) - L\right\| \geq \epsilon$$
$$\lim_{k\to\infty}\left\|x^k - p\right\| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^k = p \Rightarrow \left\|f(x^k) - L\right\| \geq \epsilon \Rightarrow \neg(H)\lim_{k\to\infty} f(x^k)$$

תכונות של גבול של פונקציה

$$\lim_{x\to p} f(x) = L, \lim_{x\to p} g(x) = M$$

$$p \in Lim\Omega, f, g: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

1) $\exists \lim_{x\to p} \alpha f + \beta g = \alpha L + \beta M$
2) $\exists \lim_{x\to p} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle L, M\rangle$
3) $m = 1, M \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$
4) $\lim_{x\to p} \left|\left|f(x)\right|\right| = \left|\left|L\right|\right|$

למה

$$\left|\left|f(x)\right|\right| \leq \alpha(x)$$
$$\lim_{x\to p} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = 0$$

גבול של פונקצית הרכבה

Superposition

$$\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$$
$$f: \Omega_1 \to \Omega_2$$
$$g: \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$$

$$\forall x \in \Omega_1 : \mathrm{H} \coloneqq \mathrm{g(f(x)}$$
$$h = g \circ f$$

דוגמא

$$h(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$g(u) = \sin(u)$$

$$h = g \circ f$$

משפט

תהי $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m$

$$f: \Omega_1 \to \Omega_2$$
$$g; \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$$
$$h = g \circ f$$

נניח כי

1) $p \in Lim\Omega_1 \quad \lim_{x\to p} f(x) = q$
2) $q \in Lim\Omega_1 \quad \lim_{x\to q} g(x) = L$
3) $\exists \epsilon_0 > 0 \forall x \in \Omega_1, x \in B(p, \epsilon_0)$
$x \neq p \Rightarrow f(x) \neq q$

אזי מתקיים

$$\exists \lim_{x\to p} h(x) = L$$

הוכחה

נניח כי $L = (H)\lim_{x\to p} h(x)$

ניקח $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}, x^k \in \Omega, x^k \neq p, \lim_{k\to\infty} x^k = p$.

$\lim_{x\to p} f(x) = q$ ולכן $y_k \coloneqq f(x^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} q$. לפי (3) $f(x^k) \neq q, x^k \in B(q,\epsilon_0)$

$$y_k \neq q, y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} q$$

$$L = \lim_{y\to q} g(y) \Rightarrow g(y^k) \to L$$

מה זה $g(y^k)$?

$$g(y^k) = g\big(f(x_k)\big) = h(x_k)$$

ולכן

$$\forall x^k \in \Omega_1, x^k \neq p, x^k \to p : h(x^k) \to L$$

כלומר $L = (H)\lim_{x\to p} f(x)$

דוגמא

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = x^2+y^2, g(u) = \frac{\sin(u)}{u}$$

$$p = (0,0), q = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f = q = 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

$$h = g \circ f$$

$$\lim_{x\to p} h(x) = 1$$

גבול של צמצום

$$f{:}\,\Omega \to \mathbb{R}^m$$

$$\Omega_0 \subseteq \Omega$$

$$f|_{\Omega_0}(x) = f(x), x \in \Omega_0$$

משפט

תני $\Omega_0 \subseteq \Omega$

$$p \in Lim\Omega_0 \subseteq lim\Omega$$

אם $\lim_{\substack{x\to p\\ x\in\Omega}} f(x) = L$ אזי גם קיים הגבול $\lim_{\substack{x\to p\\ x\in\Omega_0}} f|_{\Omega_0}(x) = L$

הוכחה

נקבע $\epsilon > 0$

$$\exists\delta\forall x \in \Omega\ : 0 < \big||x-p|\big| < \delta \Rightarrow \big||f(x)-L|\big| < \epsilon$$
$$\forall x \in \Omega_0 :\ 0 < \big||x-p|\big| < \delta \Rightarrow \big||f(x)-L|\big| < \epsilon$$

תוכנית

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in\Omega}} f(x)$$

1) $p\in Lim\Omega_0, \Omega_0\subseteq\Omega$

$$\nexists \lim_{x\to p} f|_{\Omega_0}(x)\Rightarrow \nexists\lim_{x\to p} f(x)$$

אחרת

2) $\Omega_1\Omega_2\subseteq\Omega$

$$\lim_{x\to p} f|_{\Omega_1}(x)\neq \lim_{x\to p} f|_{\Omega_2}(x)\Rightarrow \nexists\lim_{x\to p} f(x)$$

אחרת

3) $L=\lim_{x\to p} f|_{\Omega_0}$ מועמד לגבול.

דוגמא

1) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

$$\Omega_1 := \{(x,o) : x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$
$$\Omega_2 := \{(0,y) : y\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$
$$f(x,0)=f(0,y)=0$$

אבל

$$\Omega_3=\{(x,x): x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$
$$f(x,x)=\frac{1}{2}$$

ולכן אין גבול.

2) $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}, (x,y)\neq(0{,}0)$

$$p=(0{,}0), e=(e_1,e_2)$$

צמצום של f אל קו ישר $(x,y)=t(e_1,e_2)$

$$f(te_1,te_2)=\frac{t^2e_1^2te_2}{t^4e_1^4+t^2e_2^2}=\frac{te_1^2e_2}{t^2e_1^4+e_2^2}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{te_1^2e_2}{t^2e_1^4+e_2^2}=0 \qquad e_2\neq0$$
$$f(te_1,0)=0 \qquad e_2=0$$
$$\lim_{t\to0} f(te_1,0)=0$$

ניקח $\Omega_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\neq0, y=x^2\}$

$$f(x,x^2)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x^2)=\frac{1}{2}$$

ולכן אין גבול.

גבול מחוזרר Iterated limit

$$n=2$$
$$f(x,y) \qquad (x,y)\to(x_0,y_0)$$

גבול מחוזרר:

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

דוגמאות

1)

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},x^2+y^2\neq 0$$

$$(x_0,y_0)=(0,0)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1\Rightarrow \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)=-1$$
$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)=1$$
$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\ ?$$
$$f(x,0)=1,f(0,y)=-1\Rightarrow \lim f(x,0)=1\neq -1=\lim f(0,y)$$

ולכן אין גבול

הגבולות המחוזררים שונים ואין גבול לפונקציה עצמה.

2) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=0$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$$
$$f(x,0)=0=f(0,y)$$
$$f(x,x)=1$$

כלומר אין גבול

הרצאה 5

דוגמא

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\qquad x,y\neq 0$$

נקבע $y\neq 0$

$$\nexists\lim_{x\to 0}\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right)$$

ולכן אין גבול מחוזרר, אבל יש קיים גבול! $0\le |f(x,y)|\le x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

משפט

נניח שקיים

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

אם קיים

$$(\forall x:0<|x-x_0|<\delta)\ \lim_{y\to y_0} f(x,y)\coloneqq\varphi(x)$$

אז

$$\exists\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=L$$

הוכחה

נקבע $\epsilon>0$.

$$\exists\delta>0:|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,(x,y)\neq(x_0,y_0)$$

אז $|f(x,y)-L|<\frac{\epsilon}{2}$

$$y\to y_0\Rightarrow|\varphi(x)-L|\le\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$$
$$0<|x-x_0|<\delta$$

ואז לפי הגדרה של גבול $\exists\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=L$

מבחן קושי של קיום גבול

משפט

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$$
$$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n, p\in Lim\Omega$$

אזי:

$$\exists\lim_{x\to p} f(x)=L\in\mathbb{R}^m\Leftrightarrow$$
$$\forall\epsilon>0\exists\delta>0:\forall x,x'\in\Omega,0<\left||x-p|\right|<\delta,0<\left||x'-p|\right|<\delta:\left||f(x)-f(x')|\right|<\epsilon$$

קואורדינטות קוטביות (פולריות)

$$n = 2$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \left||x,y|\right|_2$$

$$\varphi = \tan\frac{x}{r} = \arctan\frac{y}{x}$$

דוגמאות

1) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (x,y) \neq (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

$$|\text{xy}| \le \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

ולכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

דרך נוספת:

$$x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{rcos\varphi\ rsin\varphi}{r}\right| \le r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

2) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$f(rcos\varphi, rsin\varphi) = \frac{r^2cos\varphi\ sin\varphi}{r^2} = \cos\varphi\sin\varphi$$

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi$$

תלוי ב-φ, לא מתכנס.

תרגילים

1) $f(x,y) = \left(\sqrt{1-x^2}, \ln(x^2-y^2), \sin x\sin y\right)$

$$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$$

$$\Omega = \{x,y \in \mathbb{R}^2 \colon |x| > |y|, |x| \le 1\}$$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2+x-y}{1+2x^2+3y^2} = \frac{2-1}{1+3} = \frac{1}{4}$

3) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(\frac{x-1}{y-1}, \frac{x^2+x-2}{x-1}\right) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(\frac{x-1}{y-1}, \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}\right) = (0,3)$

4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

5) $f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq 0$

$$|f(x,y)| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \le \frac{3x^2|y|}{x^2} = 3|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| \le \frac{3r^3|\sin\varphi||\cos\varphi|}{r^2} \le 3r \to 0$$

6) $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3 - y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2+y^2} = \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \le |x| + |y| \to 0$$

7) $f(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

$$f(\lambda e_1, \lambda e_2) = \frac{\lambda(e_1 - e_2)}{\lambda^{2\alpha}(e_1^2 + e_2^2)^\alpha} = \lambda^{1-2\alpha}\frac{e_1 - e_2}{(e_1^2+e_2^2)^\alpha} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0 \Leftrightarrow 1 - 2\alpha > 0$$

לכן $\exists lim f = L$ אזי $1 - 2\alpha > 0$ כלומר $\alpha < \frac{1}{2}$. אם הגבול קיים אז $L = 0$

נניח כי $\alpha < \frac{1}{2}$: $|f(x,y)| = \left|\frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}\right| \le \frac{|x|+|y|}{(x^2+y^2)^\alpha} \le \frac{\sqrt{2}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} \to 0$

כלומר גבול קיים אם"ם $\alpha < \frac{1}{2}$

תזכורת

$$a, b > 0 : a + b \le \sqrt{2}(a^2 + b^2)$$
$$a + b = 1a + 1b = |\langle(1,1),(a,b)\rangle| \le \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

8) $f(x,y) = \frac{x^\alpha y^4}{x^2+y^2}, \quad \alpha > 0, (x,y) \ne 0$

$$|f(x,y)| \le \left|\frac{x^\alpha y^4}{y^4}\right| \le |x|^\alpha \to 0$$

פונקציות רציפות ב$\mathbb{R}^n$

הגדרה

$$\Omega \in \mathbb{R}^n, p \in \Omega$$
$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

אומרים ש f רציפה בנקודה p אם מתקיים התנאי :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \; x \in \Omega \, \|x - p\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(p)\| < \epsilon$$

משפט

אם $p \in \Omega$ אבל $p \notin Lim\Omega$ (מבודדת) אז f תמיד רציפה.

אם $p \in Lim\Omega \cap \Omega$ אז f רציפה בנקודה p אם"ם $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$

תכונות

אם f, g רציפה בנקודה p אזי

1) $\alpha f + \beta g$ רציפות ב-p
2) $\langle f(x), g(x)\rangle$ רציפה בp
3) אם $m = 1, g(p) \ne 0$ אזי $\frac{f(x)}{g(x)}$ רציפה
4) $\|f(x)\|$ רציפה

משפט
יהי $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m$.

$$f: \Omega_1 \to \Omega_2, \quad f: \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$$
$$h := g \circ f$$

אם f רציפה ב$p \in \mathbb{R}$, $q = f(p) \in \Omega_2$ אזי h נרשמה בp.

דוגמא
רציפות לפי כל משתנה

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$f\left(x_1^o, \dots, x_{j-1}^o, x_j, \dots, x_n^o\right) \nRightarrow f \text{ רציפה}$$

לדוגמא $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $\nexists$ כלומר לא רציף ב$(0,0)$

אבל f כן רציפה לגבי x, y בנפרד.

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{x_0 y}{x_0^2 + y^2} & x_0^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x_0 = y = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \to 0} f(x_0, y) = 0$$

ולכן $\forall x_0$ f רציפה לגבי y.

כנ"ל f רציפה לגבי x.

משפט של $Weierstrass$ על max, min
תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה וחסומה (קומפקטית).

תהי $f: k \to \mathbb{R}$ ונניח שf רציפה על K, אזי

1) f חסומה בקטע
2) קיימות נקודות $x_{min}, x_{max} \in K$ כך ש

$$f(x_{\max}) = \sup_{x\in K} f(x) = \max_{x\in K} f(x)$$
$$f(x_{min}) = \inf_{x\in K} f(x) = \min_{x\in K} f(x)$$

הרצאה 6

הוכחה למשפט של ויירשטרס

1) נניח כי f לא חסומה

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists x_m \in K : \left||f(x_m)\right|| \geq m$$

K חסומה וסגורה $\Leftrightarrow$ K קומפקט

$K \supset \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ – חסומה ולכן $\exists C \geq 0 : \left||x_m\right|| \leq C$

לפי למה Belzana-Weierstrass קיימת תת סדרה $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת $x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, K סגורה ו$x_0$ נקודת הסתברות ולכן $x_0 \in K$. f רציפה ב-K ולכן בx_0 ולכן $f(x_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$ אז $\left||f(x_{m_k})\right|| \to \left||f(x_0)\right||$ אבל $\left||f(x_{m_k})\right|| > m_k \to \infty$ ואז $|f(x_0)| = \infty$ בסתירה.

2) $M \coloneqq \sup_{x\in K} f(x)\,,\quad m \coloneqq \inf_{x\in K} f(x)\,,\quad m, M \in \mathbb{R}$

נניח כי f לא מקבלת ערך M, כלומר $\forall x \in K : f(x) \neq M, f(x) < M$.

נגדיר $m - f(x) \geq$ $\quad g(x) \coloneqq \frac{1}{M - f(x)}$

ולכן g רציפה על K, לפי 1) g חסומה:

$$\exists C > 0 : g(x) \leq C\ \forall x \in K$$
$$\frac{1}{M - f(x)} \leq C$$
$$\frac{1}{C} \leq M - f(x)$$
$$f(x) \leq M - \frac{1}{C}$$

אבל $M - \frac{1}{C} < M$ – סתירה עם $M = \sup f(x)$

מסקנה

כל נורמות ב$\mathbb{R}^n$ שקולות.

בהוכחה שהופיע בהרצאה היית מעגל לוגי, פה יופיע ההוכחה שהמרצה הביא בהרצאה הבאה.

הוכחה

$$\left||\quad|\right|, |\quad| \Rightarrow |\quad| \sim \left||\quad|\right|$$

נראה כי כל נורמה שקולה ל$|\quad|_2$, ולכן כל זוג נורמות שקולות.

יהי $||\quad||$ נורמה ב$\mathbb{R}^n$, צ"ל $|\quad|_2 \sim ||\quad||$, כלומר $\exists m, M > 0 : m\left||x\right||_2 \leq \left||x\right|| \leq M\left||x\right||_2$

$$K \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left||x\right||_2 = 1\right\}$$

$$\varphi(x) \coloneqq \left||x\right||$$

$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$

$$||x|| = ||x_1e_1 + \cdots + x_1e_1|| \le |x_1|||e_1|| + \cdots + |x_n|||e_n|| \le \sqrt{||e_1|| + \cdots ||e_n||}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = C||x||_2$$

$$||x^k - x^0||_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,, x^k \xrightarrow[||\ \ ||_2]{} x^0$$

$$\left|||x^k|| - ||x^0||\right| \le ||x^k - x^0|| \le C\,||x^k - x^0||$$

$$x^k \xrightarrow[||\ \ ||_2]{} x^0 \Rightarrow \varphi(x^k) \to \varphi(x^0)$$

לפי משפט W. $\exists x_{max}, x_{min} \in K = \left\{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_2 = 1\right\}$

$$\sup_{x\in K} \varphi(x) = \varphi(x_{max}) = M$$

$$\inf_{x\in K} \varphi(x) = \varphi(x_{min}) = m$$

$$||x|| = \varphi(x) \ne 0, x \in K \Rightarrow m, M > 0$$

$$\exists\{x^{k_i}\}_i, ||x^{k_i} - x^0||_2 \to 0, x^{k_i} \to x^0$$

$$\forall x \in K : 0 < m \le ||x||_2 \le M$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \ne 0$$

$$x' = \frac{x}{||x||_2} \in K$$

$$m \le \left\|\frac{x}{||x||_2}\right\| \le M$$

$$m||x||_2 \le ||x|| \le M||x||_2$$

רציפות במידה שווה

הגדרה

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

f רציפה במ"ש על Ω אם $\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0: \forall x', x'' \in \Omega, ||x' - x''|| < \delta \Rightarrow ||f(x') - f(x'')|| < \epsilon$

משפט Cantor

תהי $f: \underset{\in\mathbb{R}^n}{K} \to \mathbb{R}^m$, נניח כי K קומפקט וf רציפה ב-K, אז f רציפה במ"ש.

הוכחה

נניח שf לא רציפה במ"ש.

$$\exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x', x'' \in K, ||x' - x''|| < \delta \wedge ||f(x') - f(x'')|| \ge \epsilon$$

$$\delta \coloneqq \frac{1}{k}, k = 1,2, \ldots$$

$$x' \coloneqq x'_k$$

$$x'' \coloneqq x''_k$$

$$\left|\left|x_k' - x_k''\right|\right| < \frac{1}{k} \wedge x_k', x_k'' \in K$$

וגם

$$\left|\left|f(x_k') - f(x_k'')\right|\right| \geq \epsilon$$

לפי למה B-W $\exists x_{k_i}' \to x_0 \in K$

$$x_{k_i}'' = \underset{x_0}{\underset{\downarrow}{x_{k_i}'}} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{\left(x_{k_i}'' - x_{k_i}'\right)}}$$

$$x_{k_i}'', x_{k_i}'' \to x_0$$

f רציפה ולכן $f\left(x_{k_i}'\right) \to f(x_0), f\left(x_{k_i}''\right) \to f(x_0)$

$$\lim_{i\to\infty}\left(f(x_k') - f(x_k'')\right) = 0$$

אבל $\left|\left|f(x_k') - f(x_k'')\right|\right| \geq \epsilon > 0$ בסתירה.

גזירות ב$\mathbb{R}^n$

אופרטור ליניארי $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

בסיס ב$\mathbb{R}^n$: $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_n e_i$$

נורמה של אופרטור

L – פונ' רציפה. גם $\left|\left|L(x)\right|\right|$ רציפה.

$$M \coloneqq \sup_{\left|\left|x\right|\right| \leq 1} \left|\left|L(x)\right|\right|$$

לפי משפט $Weirstrass$ $M < \infty$.

$$\left|\left|L\right|\right| \coloneqq M$$

אי שוויון נורמטיבי

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \left|\left|L(x)\right|\right| \leq \left|\left|L\right|\right| * \left|\left|x\right|\right|$$

הוכחה

$x = 0$ טריוויאלי

$x \neq 0$

$$x' = \frac{x}{\left|\left|x\right|\right|} \Rightarrow \left|\left|x'\right|\right| = 1$$

$$\left|\left|L(x')\right|\right| \leq \left|\left|L\right|\right|$$

$$\frac{1}{\left|\left|x\right|\right|}\left|\left|L(x)\right|\right| = \left|\left|L\left(\frac{x}{\left|\left|x\right|\right|}\right)\right|\right| \leq \left|\left|L\right|\right|$$

$$||L(x)|| \le ||L||||x||$$

גזירות ב$\mathbb{R}^n$

הגדרה

$$\alpha(x), \beta(x) \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

$$\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big), x \to p$$

$$\frac{\alpha(x)}{||\beta(x)||} \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

הגדרה שקולה: $\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big) \Leftrightarrow \alpha(x) = \epsilon(x)\beta(x), \epsilon(x) \xrightarrow[x\to p]{} 0$

$$\alpha(x) \to 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = o(1)_{x\to p}$$

גזירות ודיפרנציאל

$$n = 1$$

f גזירה בa אם"ם $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \coloneqq f'(a)$

$$\epsilon(x) \coloneqq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - k \xrightarrow[x\to a]{} 0$$
$$f(x) - f(a) = k(x-a) + \epsilon(x)(x-a)$$
$$x - a = h$$
$$\boxed{f(a+h) = f(a) + kh + \epsilon(a+h)h \qquad \epsilon(a+h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

הגדרה

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

$a \in \Omega$ נקודה פנימית, $a \in \Omega^o$

אומרים כי f דיפירנציאלית (גזירה) בנקודה a אם מתקיים קיים אופרטור ליניארי $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך ש:

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \epsilon(h)||h||$$

עבור $\epsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0,\quad ||h|| < \delta$. $\epsilon(h)||h|| = o(||h||), h \to 0$

אופרטור L דיפרנציאל של f בנקודה a.

$$L \coloneqq df_a$$
$$h \in \mathbb{R}^n : L(h) = df_a(h)$$

משפט

df_a הוא יחיד.

הוכחה

נניח כי $\exists L_1, L_2$ אופ' לינא'

$$f(a+h)-f(a)=L_1(h)+\epsilon_1(h)\|h\|$$
$$f(a+h)-f(a)=L_2(h)+\epsilon_2(h)\|h\|$$

$$0=L_1(h)-L_2(h)+\big(\epsilon_1(h)-\epsilon_2(h)\big)\|h\|$$

נקבע $0\neq h_0\in\mathbb{R}^n$

$$h=th_0, t\in\mathbb{R}$$
$$0=tL_1(h_0)-tL_2(h_0)+\big(\epsilon_1(th_0)-\epsilon_2(th_0)\big)|t|\|h_0\|$$
$$0=L_1(h_0)-L_2(h_0)+\big(\epsilon_1(th_0)-\epsilon_2(th_0)\big)|t|\|h_0\|\frac{1}{t}$$
$$t\to 0 : 0=L_1(h_0)-L_2(h_0)\Rightarrow L_1=L_2$$

דוגמא

$$f(x,y,z)=(xyz.x+z^2)$$
$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, a=(2,1,0)$$

$$h=(h_1,h_2,h_3)$$

$$f(2+h_1,1+h_2,h_3)=\big((2+h_1)(1+h_2)h_3,2+h_1+h_3^2\big)=(h_3(2+h_1+2h_2+h_1h_2),2+h_1+h_3^2)=$$
$$(2h_3+h_1h_3+2h_2h_3+h_1h_2h_3,2+h_1+h_3^2)=(0,2)+(2h_3,h_1)+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\right)$$

זה $o(\quad)$ כי $\left|h_ih_j\right|\le\frac{|h_i|^2+\left|h_j\right|^2}{2}\le\frac{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^3}\right)^2}{2}$

$$f(a)=(0,2), df_a=(2h_3,h_1)$$
$$\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}$$

הרצאה 7

למה .B.-W

$$\forall\{x^k\}_{k=1}^{\infty}, \left\|x^k\right\|_2 \Rightarrow \exists\{x^{k_i}\}_{i=1}^{\infty} : x^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} x^o, \left\|x^{k_i} - x_o\right\|_2 \to 0$$

גזירות

$$a \in \overset{o}{\Omega}$$

$f:\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאל ב-a אם $\exists L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך ש:

$$\left\|h\right\| < \delta : f(a+h) - f(a) = L(h) + \epsilon(h)\left\|h\right\|$$
$$\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$$

$$L \coloneqq df_a$$

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o\left(\left\|h\right\|\right)_{h\to 0}$$

משפט

אם f דיפ' ב-a אזי f רציפה שם.

$$a + h = x$$

$$f(x) = f(a) + df_a(x-a) + o\left(\left\|x-a\right\|\right)_{x\to a}$$

$$x \to a \Rightarrow f(x) \to f(a)$$

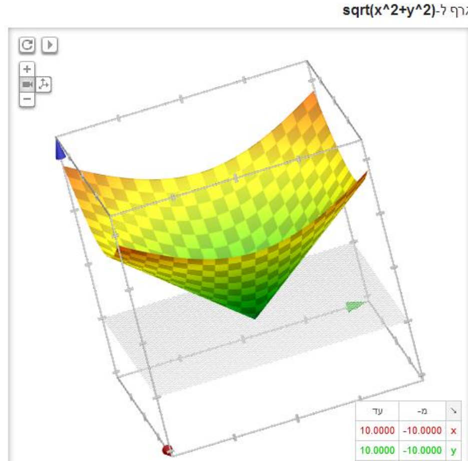
ולכן רציף.

דוגמא

1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, a = (0,0)$

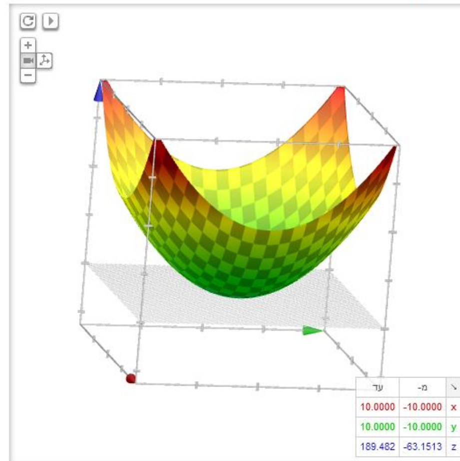
לא דיפ'.

גרף ל-sqrt(x^2+y^2)



2) $f(x,y)=x^2+y^2$

גרף ל- x^2+y^2



$$L \stackrel{?}{=} 0$$

$$f(a+h) \stackrel{?}{=} f(a)+D+\epsilon(h)\|h\|$$

$$h=(h_1,h_2) \Rightarrow h_1^2+h_2^2=\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\epsilon(h)=\frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to 0]{} 0$$

כן דיפ'.

נגזרת חלקית

הגדרה

$$f:\Omega \to \mathbb{R}^m, a \in \overset{o}{\Omega}$$

נקבע $1 \le i \le n$, קיימת נגזרת חלקית של f בנקודה a לפי x_j אם קיים הגבול

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \coloneqq \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}$$

$$e_j=(0,0,\dots,1,\dots,0)$$

סימונים

$$n=1 : f', \frac{df}{dx}$$

$$n=2 : \frac{\partial f}{\partial x_j}, D_j f\ ,\ \ f'_{x_j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{a})=\lim\frac{f(a_1,\dots,a_j+t,\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{t}$$

כלומר

$$\varphi(u) \coloneqq f(a_1, \dots, a_{j-1}, u, \dots, a_n)$$
$$\varphi(a_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

נגדיר

$$\Psi(t) \coloneqq f(a + te_j)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\Psi(t) - \Psi(0)}{t} = \Psi'(0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{d}{dt} f(a + te_j)|_{t=0}$$

דוגמא

$$f(x, y) = \arctan\left(\ln x\, e^{\sin(x^2+y^2)}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1{,}2013) = 0$$

מספיק להציב $x = 1$ בשביל למצוא את הנגזרת.

יחס בין דפר' לבין נגזרת חלקית

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$$

$$f(x)=\big(f_1(x),\dots,f_m(x)\big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a),\dots,\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a)\right)$$

משפט

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^m, a\in\overset{o}{\Omega}$$

נניח ש f דפ' בנקודה a, אזי לכל $1\le j\le n$ קיימת $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=df_a(e_j)$

הוכחה

$$L\coloneqq df_a$$

$$f(a+h)=f(a)+L(h)+\epsilon(h)||h||$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

$$f(a+te_j)-f(a)=L(te_j)+\epsilon(te_j)|t|\,||e_j||$$

$$L(te_j)=tL(e_j), ||e_j||=1$$

$$\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=L(e_j)+\underbrace{\frac{|t|}{t}\epsilon(te_j)}_{\xrightarrow[t\to 0]{}0}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=L(e_j)$$

משפט

$$\forall h\in\mathbb{R}^n: df_a(h)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$$

הוכחה

$$h=\sum_{j=1}^{n}h_je_j$$

$$df_a(h)=df_a\left(\sum_{j=1}^{n}h_je_j\right)=\sum_{j=1}^{n}h_jdf_a(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$$

$$f=(f_1,\dots,f_m)$$

$$L=df_a(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,h_j$$

$$L(h)=\big(L_1(h),\dots,L_m(h)\big)$$

$$\forall 1 \le j \le n : L_j(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(a) h_j$$

לכן:

$$\begin{pmatrix} L_1(h) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

מטריצה של האופרטור $L = df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$df_a \sim \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m,n}$$

מטריצה של Jacobi

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m,n}$$

$$df_a(h) = J_f(a)h$$

דוגמא

$$f(x,y,z) = (\sin xy , x^2 + y^2 + z), f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$df(1,2) = ?$$

$$J_f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cos xy & x \cos xy & 0 \\ 2x & 2y & 1 \end{pmatrix}_{\substack{|x=1 \\ |y=2}} = \begin{pmatrix} 2\cos 1 & \cos 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$m = 1$

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

גרדיאנט של f בנק' a

$$grad\, f(a) = \nabla f(a) \coloneqq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \dots \dots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$$

$$df_a(h) = J_f(a)h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

דוגמא

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

גזירה בנקודה $a=(0,0)$?

1) רציפה ב-a : $|f(x,y)|=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0=f(0,0)$

2) $\exists\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)$?

$$f(x,0)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{df}{dx}(x,0)|_{x=0}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{df}{dy}(0,y)|_{y=0}=0$$

3) גזירות?

$$L=df_a(h)=\sum_{j=1}^{n}\frac{df}{dx_j}(a)h_j$$

אם df_a קיים אז $df_a\equiv 0$.

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\epsilon(h)\left||h|\right|_{h\to 0}$$
$$\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0+0+\epsilon(h)\left||h|\right|_{h\to 0}$$
$$\epsilon(h)=\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\underbrace{\nrightarrow}_{\substack{\text{גבול לא קיים}\\\text{הוכח לפני}}}0$$

ולכן לא גזיר ב-a.

דוגמא

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$
$$\sqrt{|xy|}=0+\epsilon(xy)\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$
$$\epsilon(x,y)=\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$x\neq 0:\epsilon(x,x)=\frac{|x|}{\sqrt{2}|x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\nrightarrow 0$$

הרצאה 8

דוגמאות

$$f(x,y) = xy + \sin(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \cos(x^2+y^2)\,2x$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$
$a = (0,0)$

מועמד $L \equiv 0$

$$f(h) = f(0) + L(h) + \epsilon(h)\|h\| \qquad \epsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$
$$\epsilon(h) = \frac{f(h)}{\|h\|} = \sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

כלומר f דיפ' ב$a = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$
$$(x,y) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

אבל זה לא מוגדר ב$(0,0)$, גם הגבול לא מוגדר.

$$2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$
$$-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \not\to \text{אין גבול}$$

הגדרות

$U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, נסמן $U \subset_\circ \mathbb{R}^n$ ($\circ$=Open).

$$D(U) = \{\text{כל פונקציות דיפרנציאל ב } \forall u \in U\}$$
$$C(U) = \{\text{כל פונקציות רציפה ב } \forall u \in U\}$$
$$D(U) \subset C(U)$$

פעולות

1. $\forall a\in\mathbb{R}^n:\ df_a(h)\equiv 0 \qquad f(x)\equiv c$

$$f(a+h)-f(a)=df_a+o(||h||)_{h\to 0}\Rightarrow 0=c-c=0+0$$

2. $df_a(h)=h \qquad f(x)=x \qquad x\in\mathbb{R}^n \qquad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$$a+h-a=h+\epsilon(h)||h|| \qquad \epsilon(h)\equiv 0$$

3. $f(x)=L(x)$ אופרטור ליניארי, $dL_a=L$

$$L(a+h)-L(a)=L(h)+0$$
$$f(a+h)-f(a)=L(h)+0$$

4. $m=1$

$$f(x)g(x)$$
$$d_a(fg)(h)=f(a)dg_a(h)+g(a)df_a(h)$$

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+o(||h||)_{h\to 0}$$
$$g(a+h)=g(a)+dg_a(h)+o(||h||)_{h\to 0}$$

$$\begin{aligned}&f(a+h)g(a+h)\\&=f(a)g(a)+\underbrace{f(a)dg_a(h)+g(a)df_a(h)}_{\text{ליניארי}}\\&+\underbrace{f(a)o(||h||)+g(a)o(||h||)+df_a(h)o(||h||)+dg_a(h)o(||h||)+o(||h||)o(||h||)+dg_a(h)df_a(h)}_{o(||h||)}\end{aligned}$$

$$||df_a(h)||\le||df_a||||h||$$
$$||dg_a(h)||\le||dg_a||||h||$$
$$||df_a(h)dg_a(h)||\le||df_a||||dg_a||||h||$$
$$df_a(h)dg_a(h)=o(||h||)_{h\to 0}$$

נגזרת מכוונת ונגזרת לפי וקטור

הגדרה

$$f:\underset{\substack{\subseteq\mathbb{R}^n\\ o}}{\Omega}\to\mathbb{R}^m$$
$$a\in\Omega$$

נקבע $0\neq h\in\mathbb{R}^n$

אומרים קיימת נגזרת של f ב-a לפי הווקטור h אם קיים:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{t}\coloneqq\partial_h f(a)$$

$$\partial_h f(a)=\frac{d}{dt}f(a+th)|_{t=0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\partial_{e_j}f(a)$$

משפט

אם f דיפ' בנקודה a אז לכל $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ קיימת $\partial_h f(a)$ ו-$\partial_h f(a) = df_a(h)$

הוכחה

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \frac{f(a)+t*df_a(h)+o(|t||h|)-f(a)}{t} = df_a(h) + \frac{o(|t||h|)}{t}$$

$$\frac{o(|t||h|)}{t} = \frac{\epsilon(|t||h|)|t||h|}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$\exists \lim_{t\to 0}\frac{t(a+h)-f(a)}{t} = df_a(h) = \partial_h f(a)$$

$m = 1$

$$(\partial_h f)(a) = df_a(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$$

אם f דיפ' ב-a.

דוגמא

$$f(x,y) = \sqrt{||xy||}$$
$$a = (0,0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$h = (1,1) \qquad \partial_h f(0,0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\sqrt{|tt|}$$

$$\sqrt{th_1 th_2} = |t|\sqrt{h_1 h_2} = |t|$$

מסקנה: $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ לא דיפ' ב-a.

דוגמא

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & else \end{cases}$$

לא רציף ב-$(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$
$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$
$$h = (h_1, h_2)$$
$$(x,y) = t(h_1,h_2) = (th_1, th_2)$$

$$\Omega \coloneqq \{(x,y) \mid x^2 < y < 2x^2\}$$

$$(x,y)\in\Omega \Leftrightarrow x^2 < y < 2x^2 \Leftrightarrow t^2h_1^2 < th_2 < 2t^2h_1^2$$

בלי הגבלת הכלליות : $t, h_1, h_2 > 0 \Rightarrow h_2 < 2th_1^2 \wedge t > \frac{h_2}{2h_1^2}$

$$0 < t < \frac{h_2}{2h_1^2} \Rightarrow (th_1, th_2) \notin \Omega$$

אם $0 < t < \frac{h_2}{2h_1^2}$ אז $f(th_1, th_2) = 0$ ולכן $\lim_{t\to 0}\frac{f(th_1,th_2)-f(0,0)}{t} = 0$

קיבלנו $\forall h \exists \partial_h f(0,0)$ אבל f לא דיפ' ב$(0,0)$ ולא רציפה.

נגזרת מכוונת directional derivative

e כיוון, ניקח $||e|| = 1$.

הגדרה

נגזרת של f בנק' a לפי הכיוון l המוגדר ע"י e.

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \partial_e f(a)$$

דוגמא

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = ?$$

l –כיוון – זווית α עם ציר x.

$$e = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = \partial_e f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), e\rangle$$
$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}\cos\alpha + \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2}\sin\alpha$$

e – כיוון המוגדר ע"י $h = (1,1)$

$$\partial_h f(x,y) = \langle \nabla f(x,y), h\rangle$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), e\rangle$$
$$e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(1,1)}{||1,1||_2}$$

משפט

f דיפ' $(m = 1)$ ב-a, אז $\forall e: ||e||_2 = 1 \quad |\partial_e f(a)| \le ||\nabla f(a)||_2$

הוכחה

$$|\partial_e f(a)| = |\langle \nabla f(a), e\rangle| \le ||\nabla f(a)||_2 ||e||_2 = ||\nabla f(a)||_2$$

נניח $\nabla f(a) \neq 0$. נגדיר $e_0 = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$, אזי

$$\partial_{e_0} f(a) = \langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}\rangle = \frac{1}{||\nabla f(a)||}\langle \nabla f(a), \nabla f(a)\rangle = ||\nabla f(a)||$$

מסקנה

$$e_0 = \frac{\nabla f(a)}{\left|\left|\nabla f(a)\right|\right|}$$

אז לכל $\left|\left|e\right|\right|_2 = 1$:e מתקיים $\left|\partial_e f(a)\right| \leq \left|\partial_{e_0} f(a)\right|$

יש שוויון אם"ם $e = \pm\frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$

כלומר:

$$\left|\partial_{e_0} f(a)\right| = \max_{||e||=1} \left|\partial_e f(a)\right|$$

מסקנה

גרדיאנט הוא כיוון של שינוי ב-a המקסימלי.

$\partial_{e_0} f(a) = \langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||} \rangle = \left|\left|\nabla f(a)\right|\right| > 0$ כלומר עלייה מקסימלית

$\partial_{-e_0} f(a) = -\left|\left|\nabla f(a)\right|\right| \leq 0$ כלומר ירידה מקסימלית.

דוגמא

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

(x_0, y_0), מה הכיוון של שינוי מקסימלי?

$$e_0 = \frac{(-2x_0, -2y_0)}{\sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2}}$$

צריך ללכת תמיד בכיוון $(-x_0, -y_0)$

הרצאה 9

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i+o\left(\|h\|\right)_{h\to 0}$$

$$o\left(\|h\|\right)_{h\to 0}=\epsilon(h)\|h\| \qquad \epsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+o\left(\|x-a\|\right)_{x\to a}$$

$$m=1:$$

$$f(a+h)=f(a)+\langle\nabla f(a),h\rangle+o\left(\|h\|\right)_{h\to 0}$$

$$f(x)=f(a)+\langle\nabla f(a),x-a\rangle+o\left(\|x-a\|\right)_{x\to a}$$

דיפרנציאליות

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\langle\nabla f(a),h\rangle}{\|h\|}=0\Rightarrow\forall i\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}$$

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+\underbrace{\epsilon(x-a)}_{\xrightarrow[x\to a]{}0}\|x-a\|$$

זה קירוב לפונקציה: $f(x)\approx f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+o\left(\|x-a\|\right)_{x\to a}$,

דוגמא

$$f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1+xy} \qquad |x|,|y|\ll 1$$

$$a=0:f(x,y)\approx f(a)+\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}=\frac{1+xy-(x+y)y}{(1+xy)^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$$

$$\arctan\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

דוגמא

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)\ \exists$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ אבל f לא דיפ' $(0,0)$.

משפט (תנאי מספיק לדיפ')

נניח כי: $f:\Omega\to\mathbb{R}^m, a\in\overset{o}{\Omega}$

1) קיימות $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ לכל x בסביבה $B_a(\delta)\subset\Omega$.

2) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$: $\forall i$ רציפות ב$B_a(\delta)$.

אזי f דיפ' בנקודה a.

הוכחה

ניקח $n=2$.

$$\|h\|<\delta:\ f(a+h)-f(a)\overset{?}{=}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i+\underbrace{\epsilon(h)\|h\|}_{\epsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0}$$

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=\underbrace{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)}_{x\text{ שינוי לגבי }}+\underbrace{f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)}_{y\text{ שינוי לגבי }}$$

לפי משפט $Lagrange$ למשתנה אחד $g(x_0+h)-g(x_0)=g'(x_0+\theta h)h$:

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)h_1 \qquad 0<\theta_1<1$$

$$f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2 h_2)h_2 \qquad 0<\theta_2<1$$

$$\begin{aligned}f(a+h)-f(a)-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2\\ &=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1h_1,a_2+h_2)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2h_2)h_2-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_1\\ &=\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2\end{aligned}$$

עבור $\alpha(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1h_1,a_2+h_2)h_1-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1,\ \beta(h)=\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2h_2)h_2-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_1$

$$f(a+h)-f(a)-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_1=\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2$$

הנגזרות החלקיות רציפות ולכן $\begin{matrix}\alpha(h)\to 0\\ \beta(h)\underset{h\to 0}{\to} 0\end{matrix}$

$$\|\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2\|\le|h_1|\,\|\alpha(h)\|+|h_2|\,\|\beta(h)\|\le\sqrt{\|\alpha(h)\|^2+\|\beta(h)\|^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\left\|\frac{\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right\|\le\sqrt{\|\alpha(h)\|^2+\|\beta(h)\|^2}\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

$$\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2=o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)_{h\to 0}$$

לכן קיבלנו

$$f(a+h)-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

ולכן f דיפ' בנקודה a.

עבור $m>2$

$$\begin{aligned}&f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)=\\&=f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)\\&+f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_2)-f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_2)\\&+f(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)\\&+\dots+f(a_1,\dots,a_{n-1},a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)\end{aligned}$$

לפי משפט לגראנז' $f(a+h)-f(a)=\alpha_1(h)h+\dots+\alpha_n(h)h_n-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$ כאשר $\alpha_i\xrightarrow[h\to 0]{}0$

$$\left\|f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i\right\|\le\sqrt{\left|\left|\alpha_1(h)\right|\right|^2+\cdots\left|\left|\alpha_n\right|\right|^2}\sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}$$

$$\Rightarrow f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i=o\left(\left|\left|h\right|\right|\right)_{h\to 0}$$

דוגמא שבה הפונקציה דיפ' אבל התנאים לא מתקיימים

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

$$a=(0,0)$$

דיפ'? $f(h)=\underbrace{f(0)}_{0}+\underbrace{L(h)}_{0}+\underbrace{\epsilon(h)\left|\left|h\right|\right|}_{\xrightarrow[h\to 0]{}0}$

$$(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\stackrel{?}{=}o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$$

$$df_a=0$$

$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ לא חסומות סביב $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

$$(x,y)\neq(0,0):\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$$

$y=0\Rightarrow -\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$: $x=0$ לא חסומה סביב $-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

ולכן $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ לא חסומה בסביבה של $(0,0)$.

דוגמא

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & else\end{cases}$$

$$a=(0,0)$$

1) רציפות

$$|f(x,y)|=\left|\frac{x(x^2-y)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=|x|$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$ ולכן רציפה

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$f(x,0)=\begin{cases}x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$$

$$f(0,y)=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

מועמד לדיפ' : $L(h)=h_1$

$$L(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2=h_2$$

$$f(a+h)=f(a)+L(h)+\epsilon(h)\big||h|\big|_{h\to 0}$$

$$\frac{h_1^3-h_1h_2^3}{h_1^2+h_2^2}=0+h_1+\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

נבדוק כי $\epsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$

$$\epsilon(h)=\frac{\dfrac{h_1^3-h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1^3-h_1h_2^2-h_1^3-h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-2h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\epsilon(h_1,h_1)=-\frac{2h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{h_1^3}{|h_1|^3}\ \underset{h_1\to 0}{\not\to}\ 0$$

כלומר f לא דיפ' ב$(0,0)$.

תרגיל בית

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

1) $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
2) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ לא רציפות.

$$n = 1 : f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

משמעות גאומטרית של גזירות מישור משיק

מישור משיק

נניח ש f דיפ' בנקודה a, $m = 1$ אזי

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + o(\|x - a\|)_{x\to a}$$

גרף של f:

$$\boxed{\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots x_n) \in Dom(f), x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}}$$

הרצאה 10

$$\Gamma_f$$
$$l(x) = f(a) + df_a(x-a)$$
$$f(x) = l(x) + o(\|x-a\|)_{,x\to a}$$

Γ_l – מישור משיק ל-Γ_f בנקודה $(a, f(a))$.

$$l(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B$$

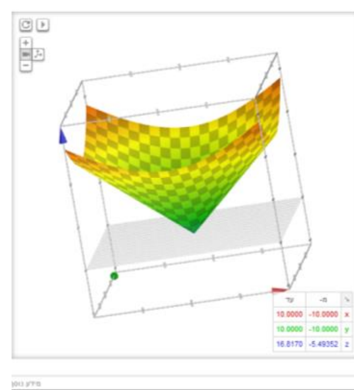
Γ_l – מישור אפיני עבור הנקודה $(a, f(a)$. $l(a) = f(a)$

$$f(x) - l(x) = o(\|x-a\|)_{,x\to a}$$

דוגמא

$$n = 2$$
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Gamma_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

ניקח מישור $z = 0$ ב-$a = (0,0)$. $f(x) - l(x) = \sqrt{x^2+y^2} = \|x,y\|$, ולכן זה לא $o(\|x-0\|)$, כל מישור משיק אחר יהיה $f(x) - f(a) = \alpha\|x,y\|$ ולכן זה לא מישור משיק.


b

משוואה של מישור משיק

$$\boxed{x_{n+1} = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)}$$

$$T_{(a,f(a))}(\Gamma_f)$$

$$a_{n+1} = f(a) = f(a_1, \dots, a_n)$$

$$\boxed{\begin{gathered} x_{n+1} - a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \\ a_{n+1} = f(a) \end{gathered}}$$

$$n = 2$$
$$a = (x_0, y_0)$$
$$f(a) = z_0$$
$$z = f(x, y), (x, y) \in U$$
$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

המשוואה של $T_{(x_0,y_0,z_0)}$:

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

דוגמא

$$z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$$

$$(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_f \text{ ,} x_0^2 + y_0^2 < 1 \text{ ,} z_0 = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}$$

$$z - z_0 = \frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}(x_0 - y_0) + \frac{-y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}(y - y_0)$$
$$z - z_0 = -\frac{x_0}{z_0}(x - x_0) - \frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

$$z_0 z - z_0^2 = -x_0 x + x_0^2 - y_0 y + y_0^2$$
$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$$

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1$$

דיפרנציאל של פונקציית הרכבה

משפט (כלל השרשרת)

$$U_1 \subset\circ \mathbb{R}^n, U_2 \subset\circ \mathbb{R}^m$$

$$U_1 \xrightarrow{u} U_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

נניח ש:

1) u דיפ' ב-$a \in U_1$
2) f דיפ' ב-$b = u(a) \in U_2$

אזי הפונ' $g(x) = f\big(u(x)\big)$ היא דיפ' ב-a ומתקיים $dg_a = df_b \circ du_a$.

הוכחה

$$L \coloneqq du_a, M \coloneqq df_b$$

$$u(a + h) = u(a) + L(h) + \underbrace{\epsilon_1(h)}_{\epsilon_1(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0} ||h||$$

$$f(b + k) = f(b) + M(k) + \underbrace{\epsilon_2(k)}_{\epsilon_2(k)\xrightarrow[k\to 0]{}0} ||k||$$

$$g(a + h) = f\big(u(a + h)\big) = f\big(u(a) + L(h) + \epsilon_1(h)||h||\big) = f\left(b + \underbrace{L(h) + \epsilon_1(h)||h||}_{k}\right)$$

$$f(b)+M\big(L(h)+\epsilon_1(h)||h||\big)+\epsilon_2\big(L(h)+\epsilon_1(h)||h||\big)\left|\left|L(h)+\epsilon_1(h)||h||\right|\right|$$

$$f(b)=f\big(u(a)\big)=g(a)$$

$$g(a+h)=g(a)+M\big(L(h)\big)+\underbrace{\overbrace{M\big(\epsilon_1(h)||h||\big)}^{\alpha(h)}+\overbrace{\epsilon_2\big(L(h)+\epsilon_1(h)||h||\big)\left|\left|L(h)+\epsilon_1(h)||h||\right|\right|}^{\beta(h)}}_{o(||h||)?}$$

$$\frac{\alpha(h)}{||h||}=\frac{||h||M\big(\epsilon_1(h)\big)}{||h||}=M\big(\epsilon_1(h)\big)$$

$$\left|\left|\frac{\alpha(h)}{||h||}\right|\right|\le ||M||||\epsilon_1(h)||\xrightarrow[h\to0]{}0\Rightarrow\alpha(h)=o\big(||h||\big)_{,h\to0}$$

$$\left|\left|L(h)+\epsilon_2(h)||h||\right|\right|\le||L(h)||+||\epsilon_1(h)||||h||\le||L||||h||+||\epsilon_1(h)||||h||$$

$$\frac{||\beta(h)||}{||h||}\le\frac{\left|\left|\epsilon_2\big(L_1(h)+\epsilon_1(h)\big)||h||\right|\right|}{||h||}\big(||L||||h||+||\epsilon_1(h)||||h||\big)$$
$$=\left|\left|\epsilon_2(L\big((h)\big)+\epsilon_2(h)||h||\right|\right|\big(||L||+||\epsilon_1(h)||\big)\xrightarrow[h\to0]{}0$$
$$\Rightarrow\beta(h)=o\big(||h||\big)_{,h\to0}$$

כלומר: $g(a+h)=g(a)+M\big(L(h)\big)+o\big(||h||\big)_{h\to0}$

ולכן g דיפ' ב-a ומתקיים $df_b\big(du_a(h)\big)=dg_a(h)$

נוסחה למטריצת יעקובי

$$\boxed{J_{f\circ u}(a)=J_f(u(a)*J_u(a)}$$

כלל שרשרת לנגזרות

$$g=f\circ u\,;l=1$$

$$g(x_1,\dots,x_n)=f\big(u_1(x_1,\dots,x_n),\dots,u_m(x_1,\dots,x_n)\big)$$

$$J_g(a)=J_f\big(u(a)\big)J_u(a)$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(u(a)\big),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\big(u(a)\big)\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial n}(a)\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\big(u(a)\big)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(a)\\ *\ g'_{x_k}=f'_{u_1}u'_{1,x_k}+\dots+f'_{u_m}u'_{m,x_k}\end{gathered}}$$

*יש להיזהר לא להתבלבל עם הצבות, ב-f'_{u_j} מציבים $u(a)$ וב-u'_{j,x_j} מציבים a.

תרגילים

1)

$$g(x,y,z)=f\left(\overbrace{x+y+z}^{u},\overbrace{x^2+y^3+z^4}^{v}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial u}(x+y+z,x^2+y^3+z^4)+\frac{\partial f}{\partial v}(x+y+z,x^2+y^3+z^4)2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial u}(\ ,)+\frac{\partial f}{\partial v}(\ ,)3y^3$$

2) $g(x,y,z)=f(xyz)$

$$f(u);u=xyz$$
$$g'_x(x,y,z)=f'_x(xyz)yz$$

הגדרה

$f(x_1,\dots,x_n)$ הומוגנית מסדר m אם $\forall\lambda\in\mathbb{R}:f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)=\lambda^m f(x_1,\dots,x_n)$

נניח f דיפ', אזי: f הומו' מסדר m $\Leftrightarrow$ $\frac{x_1\partial f}{\partial x_1(x)}+\dots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=mf(x)$ (משוואת אויילר ממד"ח).

הוכחה

$\Leftarrow$

$$f(\lambda x)=\lambda^m f(x)$$
$$\frac{d}{d\lambda}f(\lambda x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n=m\lambda^{m-1}f(x)$$
$$\lambda=1\Rightarrow\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=mf(x)$$

$\Rightarrow$

$$\lambda^{-m}f(\lambda x)=const\Leftrightarrow\frac{f}{d\lambda}(\lambda^{-m}f(\lambda x)=0?$$
$$-m\lambda^{-m-1}f(\lambda x)+\lambda^{-m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n\right)=$$
$$-m\lambda^{-m-1}f(\lambda x)+\lambda^{-m-1}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}_{mf(\lambda x)}\right)=0$$
$$\lambda=1:f(x)=c\Rightarrow\frac{f(\lambda x)}{\lambda^m}=f(x)$$

דוגמאות

$$f(x,y)=x+y,f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

הרצאה 11

נגזרות חלקיות מסדר גבוה

$$f: U \to \mathbb{R}^m$$
$$U \subset_\circ \mathbb{R}^n$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x), x \in U, 1 \le i_1 \le n$$

נניח כי קיימת $\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)(x), x \in U$

נניח שקיימת $\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-2}}}\left(\dots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\right)\right)(x), x \in U$

$$1 \le i_1, \dots, i_{r-1} \le n$$

נניח שקיימת $\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-2}}}\left(\dots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\right)\right)\right)(a), a \in U$.

דוגמא

$$f(x,y) = f(x) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \ne 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$$a = (0,0)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy} f(0,y)|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}{y} = x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1$$
$$f(x,y) = -f(y,x)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) \ne \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

משפט

$$U \subset\circ \mathbb{R}^2 \quad f: U \to \mathbb{R}$$

נניח כי:

1) $\exists \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$

2) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$ רציפות בU.

אזי $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$

הוכחה

$$\Delta^2 = f(a+h,b+h) - f(a,b+h) - f(a+h,b) + f(a,b) = \\ = [f(a+h,b+h) - f(a,b+h)] - [f(a+h,b) - f(a,b)]$$

נגדיר $\varphi(t) := f(a+h,t) - f(a,b)$

$$\Delta^2 = \varphi(b+h) - \varphi(b) = (Lagrange) = \frac{d\varphi}{dt}\left(b + \underbrace{\theta_1}_{0<\theta_1<1} h\right)h$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(b+\theta_1 h) = \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b+\theta_1 h) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_1 h) = (Lagrange) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a+\theta_2 h, b+\theta_1 h)h$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a+\theta_2 h, b+\theta_1 h)h^2 \Leftrightarrow \frac{\Delta^2}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a+\theta_2 h, b+\theta_1 h)$$

מצד שני : $\Delta^2 = [f(a+h,b+h) - f(a+h)] - [f(a,b+h) - f(a,b)]$

$$\psi(t) := f(t,b+h) - f(t,b)$$

$$\Delta^2 = \psi(a+h) - \psi(a) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(a+\mu_1 h)h$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(a+\mu_1 h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\mu_1 h, b+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\mu_1 h, b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a+\mu_1 h, b+\mu_2 h)h$$
$$(0 < \mu_1, \mu_2 < 1)$$

$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$ לפי הרציפות של הנגזרות (ולכן של פונ' הרכבה).

בנוסף $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2}{h^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)$ ולכן $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$

מסקנה

אם קיימות $\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\dots\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)(x), \frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\left(\dots\frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}\right)(x)$ $x \in U$. והן רציפות בסביבה של a אזי הן שוות.

הגדרה

$$C^r(U) := \{f: U \to \mathbb{R} : \text{כל נגזרות מסדר } r \text{ קיימות ורציפות}\}$$

$$D^r(U) := \{f: U \to \mathbb{R} : \text{כל נגזרות מסדר } r \text{ קיימות}\}$$

תהי $f \in C^r(U)$, נגזרת מסדר r: $D_{i_1,\dots,i_r}f = \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}}\left(\dots\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\right)$ (לדוגמא $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{x_2}\dots\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right)$)

$$\mathrm{D}_{i_1,\dots,i_r} f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) f \qquad \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdots \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$D_{i_1,\dots,i_r} f = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_n^{\alpha_n}}$$

מולטי אינדקסים

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

n-מימד : $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots \alpha_n = \left\| |\alpha| \right\|_1$

$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$h \in \mathbb{R}^n \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : h^\alpha := h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

הגדרה

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_n^{\alpha_n}}$$

דיפרנציאל מסדר גבוה

יהי פולינום $p(x_1, \dots, x_n) = \sum c_\alpha x^\alpha = \sum \left(c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \right)$ כאשר $|\alpha| \le N$

לדוגמא $p(x, y, z) = 4x^2 yz + 2z + x + y$

$$\deg(P) = \max\{|\alpha| : c_\alpha \ne 0\}$$

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \le N} C_\alpha x^\alpha \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

הגדרה

P פולינום הומוגני ממעלה m אם $P(\lambda x) = \lambda^m P(x)$

לדוגמא $m = 3$ $\quad f(x, y, z) = x^3 + 2x^2 y + 10z^3$

תרגיל

P הומוגני מסדר m $\Leftrightarrow P(x) = \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha x^\alpha$

בינום של ניוטון מוכלל

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^k b^{r-k} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=r} \frac{r!}{\alpha_1! \, \alpha_2!} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}$$

בינום מוכלל

$$(\alpha_1 + \cdots \alpha_n)^r = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=r} \frac{r!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha$$

הרצאה 12

$$(a_1+\dots+a_n)^r=\sum_{|\alpha|=r}\frac{r!}{\alpha!}a^\alpha$$

הוכחה

$$e^{t(a_1+\cdots a_n)}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a_1+\dots+a_n)^r t^r}{r!}$$

$$e^{t(a_1+\dots+a_n)}=e^{ta_1}\dots e^{ta_n}=\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\frac{a_1^{\alpha_1}t^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\dots\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}\frac{a_n^{\alpha_n}t^{\alpha_n}}{\alpha_n!}=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=r}\left(\frac{a_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\dots\frac{a_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}\right)t^r\right)$$

השוואה של מקדמים:

$$\frac{(a_1+\dots+a_n)^r}{r!}=\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=r}\frac{a_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\dots\frac{a_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}$$

הערה

$$f\in C^1(U)\qquad U\subset_\circ\mathbb{R}^n$$

$$a\in U: df_a(h)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(h)h_j=\frac{d}{dt}f(a+th)|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt}f(a_1+th_1,\dots,a_n+th_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)h_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+th)h_n$$

הגדרה

$$U\subset_\circ\mathbb{R}^n; a\in U; f\in C^r(U)$$

נקבע $h\in\mathbb{R}^n$. נגדיר

$$h\neq 0:\varphi(t)=f(a+th)$$

U – פתוחה, קיים $\delta>0$ כך ש $B(a,\delta)\subset U$

$$|t|\|h\|<\delta\Rightarrow a+th\in B(a,\delta)$$

$$|t|<\frac{\delta}{\|h\|}$$

$$\varphi\in C^r(I)\qquad I=\left(-\frac{\delta}{\|h\|},\frac{\delta}{\|h\|}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\varphi^r(0)=:d^rf_a(h)\\ d^rf_a(h):=\frac{d^r}{dt^r}f(a+th)|_{t=0}\end{array}}$$

משפט

$$U \subset\circ \mathbb{R}^n;\ f \in C^r(U); a \in U$$

אזי

$$\boxed{d^r f_a(h) = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha}$$

עבור

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$
$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$
$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$
$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

$d^r f_a$ פולינום הומוגני מסדר r.

הוכחה

$$r = 1$$

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

כלומר כאן $|\alpha| = r = 1 \Leftarrow \alpha = \delta_j = (0,0,..,1,\dots,0)$ כלומר $\alpha! = 1$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1!}{1!} D f^{\delta_j}(a) h^{\delta_j}$$

נניח ש:

$$\frac{d^r}{dt^r} f(a + th)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha$$

אם הדבר נכון לכל a, נחליף ל$a + sh$

$$\frac{d^r}{dt^r} f(a + sh + th)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a + sh) h^\alpha$$

$$\frac{d^r}{dt^r} f\big(a + h(s + t)\big)|_{t=0} = \{u = t + s\} = \frac{d^r}{du^r} f(a + hu)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f^\alpha(a) h^a$$

$$\frac{d}{ds} : (*) \frac{d^{r+1}}{ds^{r+1}} f(a + sh) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{r!}{\alpha!} \frac{d}{ds} D^\alpha f(a + sh) h^\alpha = \sum_{|\alpha|=1} \frac{r!}{\alpha!} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha f(a + sh) h_j \right) h^\alpha$$

נגדיר $\delta_j = (0,\dots,1,.,,0)$

$$h_j h^\alpha = h^{\alpha + \delta_j} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha f = D^{\alpha + \delta_j} f$$

$$(*) = \sum_{|\alpha|=r}\sum_{j=1}^{n} D^{\alpha+\delta_j} f(a+sh)h^{\alpha+\delta_j}$$

נסמן $\beta \coloneqq \alpha + \delta_j$

$$|\beta| = r+1 \Rightarrow \frac{\beta!}{\beta_j} = \alpha_j \Rightarrow$$

$$(*) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\beta|=r+1} \frac{r!\,\beta_j}{\beta!} D^{\beta} f(a+sh)\,h^{\beta} = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r!}{\beta!}\sum_{j=1}^{n} \beta_j D^{\beta} f(a+sh)\,h^{\beta}$$

$$\beta_1 + \cdots + \beta_n = |\beta| = r+1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \beta_j = r+1$$

$$\Rightarrow (*) = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r!\,(r+1)}{\beta!} D^{\beta} f(a+sh)h^{\beta}$$

$$s = 0 \Rightarrow \frac{d^{r+1}}{ds^{r+1}} f(a+sh)|_{s=0} = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{(r+1)!}{\beta!} D^{\beta} f(a)h^{\beta}$$

ולכן לפי אינדוקציה כדרוש.

נוסחה סימבולית

$$d^r f_a(h) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f|_{x=a}$$

כי

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=r} \frac{r!}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} \Rightarrow \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f|_{x=a}$$
$$= \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^{\alpha} f(a) h^{\alpha}$$

נוסחאות טיילור

משפט (נוסחת טיילור עם שארית בצורת לאגרנז')

תהי $U \subset_{\circ} \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(U)$, $a \in U, \|h\| < \delta, B(a,\delta) \subset U$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} d^k f_a(h) + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f_{a+\theta h} f(h)$$

כאשר $0 < \theta < 1$

$$f(a+h) = P_r f(a,h) + R_r f(a,h)$$

הוכחה

נגדיר $\varphi(t) \coloneqq f(a+th)$ (ונרצה $|t| < 1+\epsilon$) $\|th\| < \delta, B(a,\delta) \subseteq U$

אם $\|h\| < \frac{\delta}{1+\epsilon}$ אז $a+th \in B(a,\delta) \subset U$ לכל $t \in (-1-\epsilon, 1+\epsilon)$.

נוסחת טיילור לφ סביב $t=0$:

$$\varphi(\mathrm{t})=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)t+\frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2+\cdots+\frac{1}{r!}\varphi^{(r)}t^r+\frac{1}{(r+1)!}\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)t+\frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2+\cdots+\frac{1}{r!}\varphi^{(r)}(0)t^r+\frac{1}{(r+1)!}\varphi^{(r+1)}(\theta t)t^{r+1}$$

(זה נכון כי יש לנו נוסחאות טיילור ממשתנה 1).

ניקח $t=1$:

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\cdots+\frac{1}{r!}\varphi^{(r)}+\frac{1}{(r+1)!}\varphi(0)t^{r+1}$$

$$\varphi^{(k)}(0)=\frac{d^k}{dt^k}f(a+th)|_{t=0}=d^kf_a(h)$$

$$\varphi^{(r+1)}(0)=d^kf_{a+\theta h}(h)$$

מקבלים $\varphi(1)=f(a+h),\varphi(0)=f(a)$

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}d^kf_a(h)+\frac{1}{(r+1)!}df_{a+\theta h}^{r+1}(h)$$

כדרוש!

$$P_r(a,h)=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha=\sum_{|\alpha|\le r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha$$

ולכן $P_rf(a,h)$ הוא סכום של פולינומים הומוגניים.

הרצאה 13

$$f \in C^{r+1}(U)$$

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a+\theta h) h^\alpha$$

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f\big(a+\theta(x-a)\big)(x-a)^\alpha$$

$$r = 0$$

$$f(x) = f(a) + df_{a+\theta h}(h)$$

$$df_{a+\theta h}(h) = \langle \nabla f(a+\theta h), h \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+\theta h) h_j$$

מסקנה – משפט על ערך ממוצע

$$f \in C^1(U)$$

$$\boxed{f(x) - f(a) = \langle \nabla f\big(a+\theta(x-a)\big), x-a \rangle}$$

משפט על ערך ממוצע.

מסקנה

אם $\|\nabla f(z)\| \le M$ אזי $\boxed{|f(x)-f(a)| \le \mathrm{M}\|x-a\|}$

אומדן שארית בנוסחת טיילור

הגדרה

קבוצה $U \subset \mathbb{R}^n$ קמורה אם $\forall x, a \in U : [x,a] \subset U$

$$[x,a] \coloneqq \{a + \theta(x-a) : 0 \le \theta \le 1\}$$

משפט

תהי $f \in C^{r+1}(U), U \subset_\circ \mathbb{R}^n$. נניח שלכל α, $|\alpha| = r+1$; $\forall z \in U$: $|D^\alpha f(z)| \le M$, אזי:

$$a \in U \quad \boxed{|R_r f(a, x-a)| \le \frac{M}{(r+1)!} \left(\sqrt{n}\right)^{r+1} \|x-a\|_2^{r+1}}$$

הוכחה

$$R_r f(a, x-a) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f\big(a+\theta(x-a)\big)(x-a)^\alpha$$

$$|R_r f(a,x-a)| \le \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \left|D^\alpha f\big(a+\theta(x-a)\big)\right| |(x-a)^\alpha| \le M \sum \frac{1}{\alpha!} |x_1 - a_1|^{\alpha_1} \dots |x_n - a_n|^{\alpha_n}$$

$$= \frac{M}{(r+1)!} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{(r+1)!}{\alpha!} |x_1-a_1|^{\alpha_1} \dots |x_n-a_n|^{\alpha_n} \underbrace{=}_{\text{בינום של ניוטון}}$$

$$= \frac{M}{(r+1)!}\left(|x_1 - a_1|^{\alpha_1} \dots |x_n - a_n|^{\alpha_n}\right)^{r+1} = \frac{M}{(r+1)!}\left||x-a|\right|_1^{r+1}$$

$$\left||x-a|\right|_1 \le \sqrt{n}\left||x-a|\right|_2$$

נוסחת טיילור עם שארית בצורה Peano

משפט

$$U \subset_\circ \mathbb{R}^n \,; f: U \to \mathbb{R} \,; f \in C^r(U), r \ge 1 \,, a \in U$$

אזי

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + o\left(\left||h|\right|^r\right)_{h\to 0}}$$

הוכחה

$$f \in C^r(U) = C^{(r-1)+1}(U)$$

לפי נוסחת טיילור עם שארית $Lagrange$:

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \le r-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + \sum_{|\alpha| = r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a+\theta h) h^\alpha$$

$$= \underbrace{\sum_{|\alpha| \le r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha}_{P_r f(a,h)} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a+\theta h) h^\alpha - \sum_{|\alpha| = r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha}_{\alpha(h)}$$

$$|\alpha(h)| \le \sum_{|\alpha| = r} \frac{1}{\alpha!} \left(|D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)|\right) |h_1|^{\alpha_1} \dots |h_n|^{\alpha_n}$$

$$\frac{|\alpha(h)|}{\left||h|\right|^r} \le \sum_{|\alpha| = r} \frac{1}{\alpha!} \left(|D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)|\right) \frac{|h_1|^{\alpha_1} \dots |h_n|^{\alpha_n}}{\left||h|\right|_r}$$

$$|h_j| \le \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2} = \left||h|\right|_2 \Rightarrow |h_j|^{\alpha_j} \le \left||h_j|\right|^{\alpha_j}$$

$$|h_1|^{\alpha_1} \dots |h_n|^{\alpha_n} \le \left||h|\right|^{\alpha_1 + \dots \alpha_n} = ||h|^r$$

$$\frac{|h_1|^{\alpha_1} \dots |h_n|^{\alpha_n}}{\left||h|\right|_r} \le 1$$

ולכן

$$\frac{|\alpha(h)|}{\left||h|\right|^r} \le \sum_{|\alpha| = r} \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)|$$

$D^\alpha f(x)$ רציפות ל־$|\alpha| = r$ ולכן $\lim_{h\to 0} |D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)| = 0$

ולכן $\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(h)}{\left||h|\right|^r} = 0$ ולכן $\alpha(h) = o\left(\left||h|\right|^r\right)$

יחידות של פולינום טיילור

משפט

תהי $f \in C^r(U); U \subset\circ \mathbb{R}^n$

נניח כי

$$f(a+h) = P(h) + o\left(\left||h|\right|^r\right)_{h\to 0}$$
$$f(a+h) = \tilde{P}(h) + o\left(\left||h|\right|^r\right)_{h\to 0}$$

עבור $P, \tilde{P}$ פולינומים, $r \geq \max\{\deg P, \deg \tilde{P}\}$

אזי $P = \tilde{P}$

הוכחה

$$Q(h) \coloneqq P(h) - \tilde{P}(h) = o\left(\left||h|\right|^r\right)_{h\to 0}$$
$$r > \deg Q =: m$$

$$Q(h) = \sum_{|\alpha|\leq m} q_\alpha h^\alpha \qquad q_\alpha \in \mathbb{R}$$

$$Q(h) = o\left(\left||h|\right|^r\right)$$
$$h \hookrightarrow th, t \in \mathbb{R}$$

$$Q(th) = \sum_{|\alpha|\leq m} q_\alpha (th)^\alpha = o\left(|t^r|\left||h|\right|^r\right)_{t\to 0}$$

$$(th)^\alpha = (th_1)^{\alpha_1} \dots (th_n)^{\alpha_n} = t^{|\alpha|} h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow Q(th) = \sum_{|\alpha|\leq m} q_\alpha t^{|\alpha|} h^\alpha = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha t^{|\alpha|} h^\alpha = \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\left(\sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha\right)}_{c_k} t^k = \sum_{k=0}^{m} c_k t^k = o(|t|^r)_{t\to 0}, r \geq m$$

$$\sum_{k=0}^{m} c_k t^k = o(t^r), r \geq m$$

$$c_0 + c_1 t .. + c_m t^m = o(t^r)$$
$$t \to 0 : c_0 = 0$$

$$c_1 + \dots + c_m^{m-1} = o(t^{r-1})$$
$$t \to 0 : c_1 = 0$$

$$\dots$$

$$c_m = 0$$

$$q(h) = \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha = 0 \ \forall k = 0, \dots, m \ \forall h \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial h_1^{\beta_1} \dots \partial h_n^{\beta_n}} q(h)|_{h=0} = \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha D^\beta h^\alpha \,|_{h=0}$$

$$D^\beta h^\alpha = \begin{cases} 0 & \beta \neq \alpha \\ \alpha! & \beta = \alpha \end{cases}$$

וכן אם $q(h) = 0$ נקבל:

$$D^\beta \left(\sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha \right) |_{h=0} = 0 \Rightarrow q_\alpha \alpha! = 0 \Rightarrow q_\alpha = 0$$

ולכן $Q = P - \tilde{P} = 0$

מסקנה

אם $f \in C^r(U)$ קיים פולינום $P, \deg P \leq r$ כך ש$f(a+h) = P(h) + o\left(\left||h|\right|^r\right)_{h\to 0}$ אזי P פולינום טיילור בנקודה a.

דוגמא

$$f(x,y) = \frac{1}{1+2x^2y}$$

$$D^{(10,5)} f(0,0) = ?$$

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{5} (-2x^2y)^k + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{15}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{5} (-2x^2y)^k = \sum_{|\alpha|\leq 15} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0,0) h^\alpha \qquad h = (x,y)$$

$$\alpha = (10,5) \Leftrightarrow k = 5$$

$$-2^5 = \frac{1}{10!\,5!} D^{(10,5)} f(0,0)$$

נוסחת טיילור לפולינומים

משפט

אם P פולינום $\deg P = r$ אזי

$$P(x) = \sum_{|\alpha|\leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha P(a)(x-a)^\alpha$$

הוכחה

$$R_r P(a,h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha p(a+\theta h) h^\alpha = 0$$

$$|\alpha| > r \Rightarrow D^\alpha P \equiv 0$$

תרגיל

$$P(x) = \sum a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\beta|\leq r} c_{\beta_1,\ldots,\beta_n} (x_1-a_1)^{\beta_1} \ldots (x_n-a_n)^{\beta_n}$$

a מרכז.

תרגיל

$$P(x,y,z)=xy+yz,$$

$$a=(1,2,1)\quad P(x,y,z)=[(x-1)+1][(y-2)+2]+[(y-2)+2][(z-1)+1]$$
$$=(y-2)(z-1)+2(z-1)+(y-2)+2$$

הרצאה 14

אפשר להגיש את שתי התרגילים הבאים בעוד שבועיים, המרצה יבדוק ויתן ציון.

1) $f(x)=\|x\|^{\gamma}, \gamma\in 2\mathbb{N}-1, x\in\mathbb{R}^n$. צ"ל $\forall r<\gamma: f\in C^r(\mathbb{R}^n)\,;\forall r\geq\gamma: f\notin D^r(\mathbb{R}^n)$

2) $f(0,0)=0 \quad f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.

$f\in D^1(\mathbb{R}^2)-C^1(\mathbb{R}^2)$.

$$(a) f(x,y)=(x^2+y^2)^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$
$$(b) f(x,y)=(x^2+y^2)^3\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

מכל מקרה מצא r מקסימלי כך ש$f\in D^r(\mathbb{R}^2)$ וr מקסימלי כך ש$f\in C^r(\mathbb{R}^2)$.

טור טיילור

$$f\in C^{r+1}(\mathbb{R}^n)$$
$$f(x)=\sum_{|\alpha|<r}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(a)(x-a)^{\alpha}+R_rf(a,x-a)$$
$$R_rf(a,x-a)=\sum_{|\alpha|=r+1}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f\big(a+\theta(x-a)\big)(x-a)^{\alpha}$$

אם U קמורה אזי

$$|D^{\alpha}f(x)|\leq M$$
$$|R_rf|\leq\frac{M}{(r+1)!}\left(\sqrt{n}\right)^{r+1}\|x-a\|^{r+1}$$

הגדרה

אומרים שפונ' f אנליטית אם לכל $a\in U$ קיים $\delta>0$ כך ש

$$f(x)=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}(a)(x-a)^{\alpha}\qquad x\in B_{\delta}(a)$$

$$\mathrm{A(U)}=\{\text{קבוצת כל הפונקציות האנליטיות ב}-\mathrm{U}\}$$

f אנליטית אם $|R_rf|\xrightarrow{r\to\infty}0$.

$$\lim_{r\to\infty}M_{r,\delta}\frac{\left(\sqrt{n}\right)^{r+1}}{(r+1)!}\delta^{r+1}=0$$
$$M_{r,\delta}\coloneqq\max_{|\alpha|=r+1}\sup_{x\in B_{\delta(a)}}|D^{\alpha}f(x)|$$

דוגמא

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{||x||^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

בדוק : לא אנליטית $\forall\alpha : D^{\alpha}f(0)=0, f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n), f$

קיצונים מקומיים

הגדרה

$$\Omega\subset\mathbb{R}^n\ ;\ \ f:\Omega\to\mathbb{R}$$

אומרים כי $a\in\Omega$ נקודת מינימום מקומי אם קיים $\delta>0$ כל שלכל $x\in\Omega\cap B_{\delta}(a)$ מתקיים $f(x)\geq f(a)$

אם מתקיים $f(x)>f(a)$ לכל $x\in\Omega\cap B_{\delta}(a)$ נאמר כי a נקודת מינימום ממש.

$a\in\Omega$ נק' מקסימום מקומי אם היא נק' מינימום בפונקציה $-f$.

$a\in\Omega$ נק' מקסימום ממש אם היא נק' מינימום ממש בפונקציה $-f$.

אם $a\in\Omega$ מקסימום או מינימום מקומי נאמר כי a נקודת קיצון מקומי.

אם $a\in\Omega$ max או min מקומי ממש נאמר כי היא נקודת קיצון ממש.

דוגמאות

(1

$$n=2$$
$$f(x,y)=x^2+y^2$$

$a=(0,0)$ נקודת min ממש.

(2

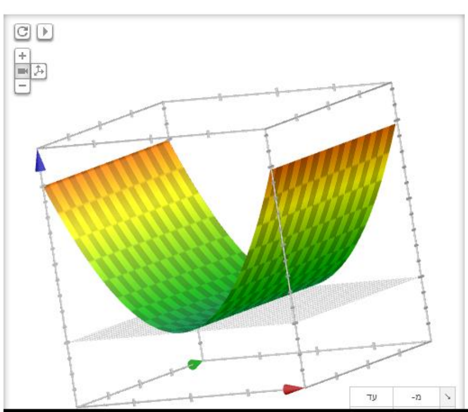
$$f(x,y)=-x^2-y^2$$

$a=(0,0)$ נקודת max ממש

(3

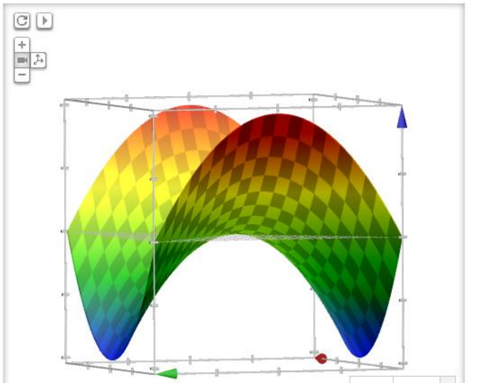
$$f(x,y)=x^2$$

$min\ a=(0,0)$ לא ממש. $f(x,y)\geq f(0,0)$



4) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$f(x,0) > f(0,0)$
$f(0,y) < f(0,0)$



לנקודה כזאת קוראים נקודת אוכף Saddle point

הגדרה

אם f דיפ' $f: U \to \mathbb{R}$ בנקודה a ומתקיים $\forall j\ :\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$ אז a נקרא נקודה קריטית $(\nabla f(a) = 0)$

משפט (תנאי הכרחי לקיצון מקומי)

$f: \Omega \to \mathbb{R}$. $a \in \mathring{\Omega}$. אם a נקודת קיצון וf דיפ' בנקודה a אזי a נקודה $\nabla f(a) = 0$.

הוכחה

a נקודת min (WLOG ב.ה.כ)

$$\exists \delta > 0\ :\ B(a,\delta) \subset \Omega$$

$$\forall x \in B(a,\delta): f(x) \geq f(a)$$

ניקח $j = 1 \dots . n$ ונגדיר $\varphi(t) \coloneqq f(a + te_j)$

$$|t| < \delta : f(a) \leq f\left(a + te_j\right) = \varphi(t)$$

$t = 0$ נק' מינימום ל$\varphi(x)$ ולכן לפי למה $Fermat$ $\varphi'(0) = 0$

$$0 = \frac{d}{dt}|_{t=0} f\left(a + te_j\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

משמעות גאומטרית

משוואה של מישור משיק לגרף

$$T_{(a,f(a))}\left(\Gamma_f\right) :\ x_{n+1} - a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\left(x_j - a_j\right)$$

$$a_{n+1} = f(a)$$

אם a נקודת קיצון אז $x_{n+1} = a_{n+1}$: $T_{(a,f(a))}\left(\Gamma_f\right) :\ x_{n+1} - a_{n+1} = 0$

כלומר מישור מקביל לציר x_{n+1}.

דוגמא

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

תנאי מספיק לקיצון מקומי

דיפרנציאל שני

$$d^2f_a(h) := \frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}f(a+th)$$

$$\frac{d}{dt}f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)h_i$$

$$\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}f(a+th) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_jh_i$$

$$f\in C^2(U) \quad : \quad d^2f_a(h) = \sum_{i,j=1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial_j}(a)h_ih_j$$

תבניות ריבועיות Quadratic Forms

הגדרה (תבנית ריבועית)

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\, h_ih_j$$

$a_{ij} = a_{ji}$ כי ניתן לסדר אותם באופן הבא:

$$Q(h) = \cdots a_{ij}h_ih_j + \cdots + a_{ji}h_jh_i + \cdots$$
$$a_{ij}h_ih_j + a_{ji}h_jh_i = \left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)h_ih_j + \left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)h_jh_i$$

אזי $Q(h) = \langle Ah, h\rangle$

הגדרה

אומרים כי תבנית ריבועית Q חיובית אם $\forall h\in\mathbb{R}^n : Q(h)\ge 0$. נסמן $Q\ge 0$

דוגמא

$$Q(h) = h_1^2+\cdots+h_n^2 \quad A=I \quad Q(h)\ge 0$$

מסקנה

תהי $Q(h)$, המטריצה A של התבנית מקיימת $A^T = A$

הגדרה

Q חיובית ממש אם $\forall h\in\mathbb{R}^n-\{0\} : Q(h)>0$. נסמן $Q>0$

דוגמא

$$Q(h_1,h_2) = h_1^2 \quad Q\ge 0 \;\; Q\ngtr 0$$

הגדרה

התבנית Q נקראת לא שומרת סימן (לא מוגדרת Indefinite) אם $Q \nless 0 \wedge Q\ngtr 0$ כלומר $\exists h_+ . h_-$ כך ש

$$Q(h_+)>0, Q(h_-)<0$$

דוגמא

$$n = 2$$

$$Q(h_1, h_2) = h_1^2 - h_2^2$$
$$Q(1,0) > 0 \quad Q(0,1) < 0$$

הרצאה 15

$$Q(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$
$$a_{ij}=a_{ji}$$
$$A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$
$$A=A^T$$

$$Q(x)=\langle Ax,x\rangle$$
$$A>0\Leftrightarrow Q>0$$
$$A\geq 0\Leftrightarrow Q\geq 0$$
$$A<0\Leftrightarrow Q<0$$
$$A\leq 0\Leftrightarrow Q\leq 0$$

מחקר לסימן של מטריצה או תבנית ריבועית

מטריצה אורטוגונלית

$$UU^T=U^TU=I$$
$$U^T=U^{-1}$$
$$\langle Ux,Uy\rangle=\langle x,U^TUy\rangle=\langle x,y\rangle$$
$$\left||Ux|\right|^2=\langle Ux,Ux\rangle=\langle x,x\rangle=\left||x|\right|^2$$
$$\left||Ux|\right|=\left||x|\right|$$

משפט

לכל מטריצה $A=A^T$ קיימת מטריצה אורטוגונלית U כך ש:

$$UAU^{-1}=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\ 0\ 0\ \dots\ 0\\ 0\ \lambda_2\ 0\ \dots\ 0\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ ..\\ 0\ 0\ \dots\ \dots\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

λ_j ע"ע, $e_j=(0,0,\dots,1,\dots 0)$

$$UAU^{-1}e_j=\Lambda e_j=\lambda_je_j\Rightarrow AU^{-1}e_j=\lambda_j\left(U^{-1}e_j\right)$$

משפט

תהי $Q(x)=\langle Ax,x\rangle$ $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ע"ע של A, אזי:

$$\lambda_1,\dots,\lambda_n>0\Leftrightarrow Q>0$$
$$\lambda_1,\dots,\lambda_n\geq 0\Leftrightarrow Q\geq 0$$
$$\lambda_1,\dots,\lambda_n<0\Leftrightarrow Q<0$$
$$\lambda_1,\dots,\lambda_n\leq 0\Leftrightarrow Q\leq 0$$

הוכחה

$$\exists U \in O(n) : UAU^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1\ 0\ 0 \dots 0 \\ 0\ \lambda_2\ 0 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots .. \\ 0\ 0 \dots \dots \lambda_n \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}^r : Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle U^{-1}\Lambda Ux, x\rangle = \langle \Lambda Ux, Ux\rangle$
$\mathrm{U}x := x'$
$Q(x) = \langle \Lambda x', x'\rangle = \lambda_1(x_1')^2 + \dots + \lambda_n(x_n')^2$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x'\rangle > 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0$$
$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x'\rangle \geq 0 \Leftrightarrow Q(x) \geq 0$$
$$\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x'\rangle < 0 \Leftrightarrow Q(x) < 0$$
$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x'\rangle \leq 0 \Leftrightarrow Q(x) \leq 0$$

A לא שומרת סימן $\Leftrightarrow \det A < 0$

קריטריון של *Silvester*

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$
$$\Delta_k = \det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{k}$$

אם $\Delta_1, \dots, \Delta_n > 0$ אז $A > 0$

אם $\forall k = 1, \dots, n : (-1)^k \Delta_k > 0$ אזי $A < 0$ $\quad (\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \dots)$

דיפרנציאל שני

$$d^2f_a(h)=Q(h)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j$$
$$f\in C^2(U)\ ;\quad U\subset\circ\,\mathbb{R}^n\quad ;\quad a\in U$$

משפט

אם תבנית ריבועית $Q>0$ אז קיים $C>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $Q(x)\geq C||x||^2$

הוכחה

1. Q – רציפה לפי משפט Weierstrass
2. $\min\limits_{||x||=1}Q(x)=Q(x_0), ||x_0||=1$

נסמן $C=Q(x_0)>0$

ניקח $x\in\mathbb{R}^n$, אם $x=0$ אזי $Q(0)=0$

אם $x\neq 0$ אזי $x':=\frac{x}{||x||}$ כאשר $||x'||=1$ ולכן $Q(x')\geq Q(x_0)=C$

$\frac{Q(x)}{||x||^2}=Q\left(\frac{x}{||x||}\right)\geq C$ ולכן $Q(x)\geq C||x||^2$

עוד הוכחה

$$UAU^{-1}=\Lambda$$
$$Q(x)=\langle Ax,x\rangle=\langle U^{-1}\Lambda Ux,x\rangle=\langle \Lambda Ux,Ux\rangle=\{x'=Ux\}=\langle\Lambda x',x'\rangle=\lambda_1(x_1')^2+\cdots+\lambda_n(x_n')^2$$
$$\geq\lambda_{min}||x'||^2=\lambda_{min}||x||^2$$
$$Q>0\Rightarrow C:=\lambda_{min}>0$$
$$Q(x)\geq C||x||^2$$

משפט

תהי פונ' $f:U\to\mathbb{R}$ $\quad U\subset\circ\,\mathbb{R}^n\quad f\in C^2(U)$

תהי $a\in U$ נקודה קריטית, כלומר $\nabla f(a)=0$

1. אם $d^2f_a>0$ אז a נקודת מינימום מקומי ממש.
2. אם $d^2f_a<0$ אז a נקודת מקסימום מקומי ממש.
3. אם d^2f_a לא מוגדרת סימן אז a לא נקודת קיצון.

הוכחה

1. $Q:=d^2f_a>0$

לפי המשפט הקודם קיים $C>0$ כך ש$\forall h\in\mathbb{R}^n: Q(h)\geq C||h||^2$

נוסחת טיילור מסדר 2 סביב נקודה a:

$$f(x)=f(a)+df_a(x-a)+\frac{1}{2}d^2f_a(x-a)+\epsilon(x-a)||x-a||^2$$
$$df_a(x-a)=\langle\nabla f(a),x-a\rangle=0$$

$$f(x)-f(a)=\frac{1}{2}d^2f_a(x-a)+\epsilon(x-a)\left\|x-a\right\|^2=\frac{1}{2}Q(x-a)+\epsilon(x-a)\left\|x-a\right\|^2$$
$$\geq\frac{1}{2}C\left\|x-a\right\|^2+\epsilon(x-a)\left\|x-a\right\|^2$$
$$f(x)-f(a)\geq\left\|x-a\right\|^2\left(\frac{1}{2}C+\epsilon(x-a)\right)$$
$$\exists\delta>0\ :\ \ \left\|x-a\right\|<\delta\Rightarrow|\epsilon(x-a)|<\frac{1}{4}C$$

לכל x בתחום מתקיים:

$$\left\|x-a\right\|<\delta\Rightarrow f(x)-f(a)\geq\frac{1}{4}C\left\|x-a\right\|\underset{x\neq a}{>}0$$
$$\forall x\in U\cap B_\delta(a),x\neq 0:f(x)-f(a)>0$$

ולכן a נק' מינימום ממש.

2. נחליף f ל $-f$.
3. נניח כי Q לא שומרת סימן.

$$\exists h_+\in\mathbb{R}^n:Q(h_+)>0$$
$$\exists h_-\in\mathbb{R}^n:Q(h_-)<0$$

$$f(a+th_\pm)=f(a)+df_a(th_\pm)+\frac{1}{2}d^2f_a(th_\pm)+\epsilon(th_\pm)\left\|th_\pm\right\|^2$$

$$f(a+th_\pm)-f(a)=\frac{1}{2}Q(th_\pm)+\epsilon(th_\pm)\left\|th_\pm\right\|^2=\frac{1}{2}t^2Q(h_\pm)+|t|^2\epsilon(th_\pm)\left\|h\right\|^2=$$
$$=t^2\left(\frac{1}{2}Q(h_\pm)+\epsilon(th_\pm)\left\|h_\pm\right\|^2\right)$$

a. $Q(h_+)>0$

$$\exists\delta>0:|t|<\delta\Rightarrow\left|\epsilon(th_\pm)\left\|h_\pm\right\|^2\right|<\frac{1}{4}Q(h_+)$$

אז אם $|t|<\delta$ אזי $f(a+th_+)-f(a)\underset{t\neq 0}{>}0$

b. $Q(h_-)<0$

$$\exists\delta'>0:\left|\epsilon(th_-)\left\|h_-\right\|^2\right|<\frac{1}{4}|Q(h_-)|\Rightarrow\frac{1}{2}Q(h_-)+\epsilon(th_-)\left\|h\right\|^2<0$$
$$f(a+th_-)-f(a)<0$$

ולכן a לא נקודת קיצון.

משמעות גאומטרית

$$f(x)=f(a)+\sum\lambda_j\left(x_j-a_j\right)^2+o\left(\left\|x-a\right\|^2\right)$$

$\lambda_j>0$ אז עבור x_j ,a היא נקודת מינימום.

$\lambda_j<0$ אז עבור x_j ,a היא נקודת מקסימום.

דוגמא

$\lambda*\mu>0$; $f(x,y)=f(a)+\lambda x^2+\mu y^2+o(x^2+y^2)$ יש קיצון.

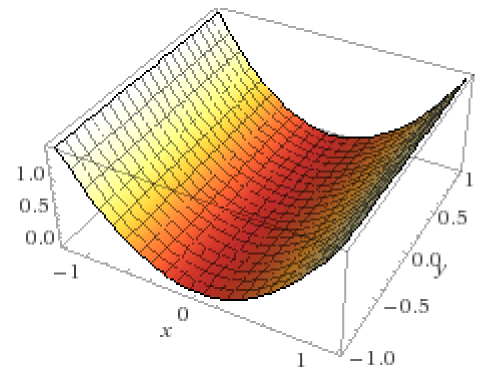
$\lambda*\mu<0$ אז אין קיצון (אוכף).

דוגמא

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n = 0 \quad \lambda_1, .., \lambda_m > 0$ אי אפשר להחליט

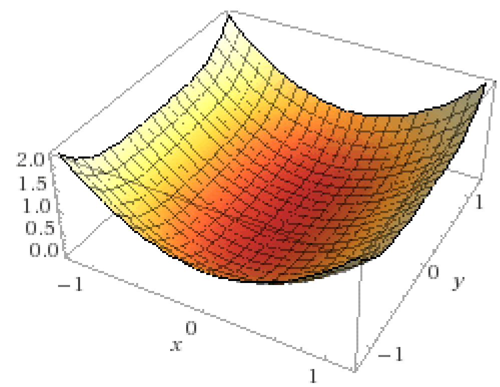
$f(x,y) = x^2$



$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$

$a = (0,0)$ נקודת מינימום לא ממש.

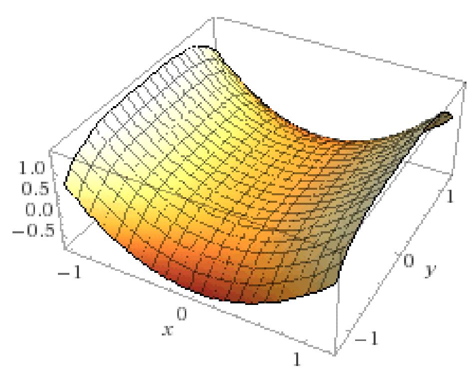
$f(x,y) = x^2 + \epsilon y^4$



$(0,0)$ מינימום ממש.

$f(x,y) = x^2 - \epsilon y^4$

$f(x,0) > 0 \quad x \neq 0$
$f(0,y) < 0 \quad y \neq 0$



$(0,0)$ אוכף.

מחקר לקיצון

$$f(x_1,\dots,x_n)$$

1) נקודות קריטיות

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=0 \end{cases}$$

a נקודה קריטית.

$$n=2$$
$$f'_x(a)=f'_y(a)=0$$
$$H=\begin{pmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} \\ f_{yx} & f'_{yy} \end{pmatrix}$$

$\det H<0 \Rightarrow$ a נקודת אוכף

דוגמא

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$$

$$\begin{cases} f'_x=3x^2-3y=0 \\ f'_y=3y^2-3x=0 \end{cases}$$

$$y^4-y=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0),(1,1)$$

נקודות קריטיות: $a=(0,0), b=(1,1)$

$$H_f=\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H_f(a)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H=-2<0$$

$(0,0)$ נקודת אוכף.

$$H_f(b)=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\Delta_1=6>0$$
$$\Delta_2=36-9>0$$

$d^2f_b>0$ ולכן b נקודת מינימום מקומי.

הרצאה 16

פונקציה סתומה Implicit Function

$$ax + by = 0$$
$$F(x,y) \coloneqq ax + by = 0$$
$$y = -\frac{a}{b}x =: \varphi(x) \quad ; \quad b \neq 0$$
$$ax = 0 \quad ; \quad b = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = b$$

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

סימון

נסמן:

$$\underset{(x,y)\in}{\mathbb{R}^{n+1}} = \underset{x\in}{\mathbb{R}^n} \times \underset{y\in}{\mathbb{R}}$$

משפט

תהי $\mathbb{W} \subset_\circ \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. נתונה $F: \mathbb{W} \to \mathbb{R} \,;\, F \in C^r(\mathbb{W})$

נתונה הנקודה $(a,b) \in W$ כך ש $F(a,b) = 0$

נניח $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$

אזי קיימות סביבות ב$a \in U, b \in V$ כך ש

$$\forall x \in U \quad \overset{\text{קיים ויחיד}}{\exists!} \quad y \in V \quad \mathrm{F}(x,y) = 0$$

נסמן $\varphi: U \to V \quad y = \varphi(x)$ ו$\varphi \in C^r(U)$

הוכחה

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0 \quad ; \quad WLOG \quad \frac{\partial F}{\partial y} > 0$$

$\frac{\partial F}{\partial y}$ – רציפה ב(a,b) ולכן

$$\exists B_{(a,b)}(\epsilon): \forall (x,y) \in B_{(a,b)}(\epsilon) \quad \frac{\partial F}{\partial b}(x,y) > 0$$

סביבות $\exists U' \ni a, V' \ni b$ כך ש$U' \times V' \subset B_{(a,b)}(\epsilon)$

בפרט $\frac{\partial F}{\partial y}(a,y) > 0$ כלומר $F(a,y) \nearrow$ ממש (לפי y).

$$V' = (b - \epsilon, b + \epsilon)$$
$$y = b : F(a, b) = 0$$
$$y = b + \epsilon : F(a, b + \epsilon) > 0$$
$$y = b - \epsilon : F(a, b - \epsilon) < 0$$

$F(x, b + \epsilon)$ רציפה ולכן $\exists U'' \ni a : F(x, b + \epsilon) > 0\ \forall x \in U''$

$F(x, b - \epsilon)$ רציפה ולכן $\exists U''' \ni a : F(x, b - \epsilon) < 0\ \forall x \in U'''$

נגדיר

$$U \coloneqq U' \cap U'' \cap U'''$$

נקבע $x \in U$

לפי הבניה $F(x, b - \epsilon) < 0$, $F(x, b + \epsilon) > 0$

$F(x, y)$ – רציפה לפי y אם x קבוע.

$F(x, b - \epsilon) < 0, F(x, b + \epsilon > 0)$ ולכן לפי משפט קושי על ערך בינוני $\exists y : F(x, y) = 0$

אבל $F(x,*) \nearrow$ ולכן y הוא יחיד.

$$y \in (b - \epsilon, b + \epsilon) = V \ ; \ y = \varphi(x), x \in U$$

1) צ"ל φ רציפה בנקודה (a, b), כלומר צ"ל:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0\ \forall x \in B(a, \delta) \subset U : \varphi(x) \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

ניקח $U \times (b - \epsilon, b + \epsilon)$ ולפי הבנייה $\exists U' \subset U$

$$x \in U' \Rightarrow y \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$$
$$U' = B(a, \delta)$$
$$y = \varphi(x)$$
$$\forall x \in B(a, \delta) \Rightarrow \varphi(x) \in (\varphi(a) - \epsilon, \varphi(a) + \epsilon)$$

ולכן φ רציפה.

2) $\varphi \in C^r(U)$

נכתוב נוסחת טיילור לF בנקודה (a, b) עם סדר 0 עם שארית *Lagrange*.

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = F(a, b) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j - a_j) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(y - b)$$

עבור $0 < \theta < 1 \ ; \ \xi = (a.b) + \theta\big((x, y) - (a, b)\big)$

$$y = \varphi(x); \quad b = \varphi(a)$$
$$F(a, b) = 0$$
$$x \in U \ni a\, ; F\big(x, \varphi(x)\big) = 0$$

$$0 = 0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j - a_j) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)\big(\varphi(x) - \varphi(a)\big)$$

$$x = (a_1, a_2, \dots, x_k, a_{k+1}, \dots a_n)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)(x_k - a_k) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)\big(\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a)\big)$$

$$\frac{\varphi(a_1,\dots,x_k,\dots,a_n)-\varphi(a_1,\dots,a_n)}{x_k-a_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x),\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)\neq 0\ \ \forall\left|\left|x-a\right|\right|<\delta$$

$$x\to a\Rightarrow \varphi(x)\to b=\varphi(a)$$

$$\big(x,\varphi(x)\big)-(a,b)\xrightarrow[x\to a]{}0$$

ולכן $\xi\xrightarrow[x\to a]{}(a,b)$

$$\frac{\varphi(a_1,\dots,x_k,\dots,a_n)-\varphi(a_1,\dots,a_n)}{x_k-a_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\big(a+\theta(x-a),b+\theta(\varphi(x)-b)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a+\theta(x-a),b+\theta(\varphi(x)-b)}$$

$$\lim_{x_k\to a_k}\frac{\varphi(a_1,\dots,x_k,\dots,a_n)-\varphi(a_1,\dots,a_n)}{x_k-a_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$$

$$\exists\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(a)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0\ \forall x\in U_a,y\in V_b$$

אז לכן אפשר להחליף (a,b) ל$\big(x,\varphi(x)\big)$

ולכן

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\big(x,\varphi(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)}\\ x\in U_a\end{array}}_{k=1,\dots,n}$$

$$\varphi\in C^r(U)?$$

$\varphi,\frac{\partial F}{\partial x_j}$ רציפות ולכן $-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))}$ רציפה בU

ולכן $x\in U,k=1,\dots,n$; $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)$ רציפות ולכן $\varphi\in C^1(U)$

נניח כי $\varphi\in C^k(U)$: $k<r$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k},\frac{\partial F}{\partial y},\varphi\in C^k(U)\Rightarrow-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\big(x,\varphi(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)}\in C^k(U)$$

ולכן

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \in C^k(U)\ \ k = 1,..,n \Rightarrow \varphi \in C^{k+1}(U)$$

ולכן לפי אינדוקציה $\varphi \in C^r(U)$

גזירות של פונקציה סתומה

$$F\big(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)\big) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}:\ \ \frac{\partial F}{\partial x_k}\big(x, \varphi(x)\big) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\big(x, \varphi(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big)}$$

$$F(x_1, .., x_n, y) = 0$$

אלגוריתם:

1) $F(a,b) = 0$

2) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$y = \varphi(x), x \in U_a$$

תרגיל

$$z^3 - xz + y = 0$$

1) $x = 3, y = -2, z = z(x,y)$

2) $\frac{\partial z}{\partial x}(3,-2) =?$

1) $F(x,y,z) = z^3 - xz + y = 0$

$$F(3,-2,2) = 8 - 6 - 2 = 0$$

2) $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - x\big|_{\substack{x=3\\ y=-2\\ z=2}} = 3 * 4 - 3 = 9 \neq 0$

ולכן קיימת פונקציה יחידה $z = z(x,y) \in C^\infty(U \times V)$

$$(3,-2) \in U\,;\, v = (2-\epsilon, 2+\epsilon)\,;\ z(3,-2) = 2$$

$$z(x,y)^3 - xz(x,y) + y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}:\ 3z^2 z'_x - z - xz'_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: 3z^2 z'_y - xz'_y + 1 = 0$$

$$3 * 4 * z'_x(3,-2) - 2 - 3z'_x(3,-2) = 0 \Rightarrow z'_x(3,-2) = \frac{2}{9}$$

$$3 * 4 * z'_y(3,-2) - 3z'_y(3,-2) + 1 = 0 \Rightarrow z'_y(3,-2) = -\frac{1}{9}$$

הרצאה 17

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases}$$

מקרה ליניארי

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}+b_{11}y_1+\cdots+b_{1m}y_m=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n+b_{m1}y_1+\cdots+b_{mm}y_m=0 \end{cases} \Rightarrow j=1\dots m: y_j=\varphi(x_1,\dots,x_m)$$ ליניאריות

$$\det\left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}\neq 0$$

משפט על פונ' סתומה כללית

משפט

תהי $\mathbb{W}\subset\circ\ \mathbb{R}^{n+m}=\underset{x\in}{\mathbb{R}^n}\times\underset{y\in}{\mathbb{R}^m}$

$$(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}\Rightarrow x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m$$

תהי $F:\mathbb{W}\to\mathbb{R}^m; F\in C^r(\mathbb{W}), r\geq 1$

1) תהי $(a,b)\in\mathbb{W}$ כך ש$F(a,b)=0$

2) נניח כי $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b)\dots\frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b)\dots\frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b)\end{pmatrix}\neq 0$

אזי קיימות סביבות $U\ni a, V\ni b$ כך ש $\forall x\in U\ \exists!\, y\in V: F(x,y)=0$

הפונקציה $y:=\varphi(x), x\in U; \varphi\in C^r(U)$

הסבר

$$M:=\{(x,y)\in\mathbb{W}: F(x,y)=0\}$$

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{i,j=1}^{m}\neq 0$$

אזי $\exists U,V$ כך ש$M\cap(U\times V)$ גרף של $y=\varphi(x)$

לדוגמא עבור $F(x,y)=xy\ m=1$

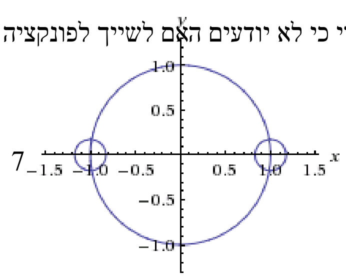
$$F(x,y)=xy=0$$

$$x=a\neq 0\Rightarrow y=0; \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x$$

כלומר המשפט לא מתקיים עבור $x=0$.

או לדוגמא $F(x,y)=x^2-y^2-1=0$

בחיתוך עם צירים אין גרף אפשרי כי לא יודעים האם לשייך לפונקציה העליונה או התחתונה, $\frac{\partial F}{\partial y}(\pm 1,0)=0$



7

סימון
$Jacobian$

$$Jacobian-\det J_f(x)\,;\quad f\colon U\to\mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x)\coloneqq\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}=\det J_f(x)$$

ניתן לרשום את תנאי 2 כך:

$\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}(a,b)\neq 0$ (2

הוכחה של המשפט
אינדוקציה לגבי m

$m=1$ הוכחנו, נניח כי המשפט נכון עבור $m-1$

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b)\dots\frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b)\dots\frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b)\end{pmatrix}\neq 0$$

WLOG : $\Delta_{m-1}\neq 0$

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b)\dots\frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}(a,b)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}(a,b)\dots\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m-1}(a,b)\end{pmatrix}\neq 0$$

מערכת:

$$\begin{cases}\mathrm{F}_1\left(\underbrace{x_1,\dots,x_n},\overline{y_1,\dots,y_{m-1}},\underbrace{y_m}\right)=0\\ \vdots\\ F_{m-1}\left(\underbrace{x_1,\dots,x_n},\overline{y_1,\dots,y_{m-1}},\underbrace{y_m}\right)=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_{m-1})}{\partial(y_1,..,y_{m-1})}(a,b)\neq 0$$

לפי הנחה של אינדוקציה

$\exists U\ni(a,b_m),V\ni(b_1,\dots,b_{m-1})$ כך ש:

$$\begin{cases}y_1=\varphi_1(x_1,\dots,x_n,y_m)\\ \vdots\\ y_{m-1}=\varphi_{m-1}(x_1,\dots,x_n,y_m)\end{cases}$$
$$(x,y_m)\in U\,,y'\coloneqq(y_1,\dots,y_{m-1})\in V$$

$$\varphi_j\in C^r(U)$$
$$F_j(x,\varphi_1(x,y_m),\dots\varphi_{m-1}(x,y_m),y_m)=0;1\le j\le m-1\quad;\quad(x,y_m)\in U$$

$$\frac{\partial}{\partial y_m}:(*)\boxed{\frac{\partial F_j}{\partial y_1}(a,b)\frac{\partial\varphi_1}{y_m}(a,b_m)+\dots+\frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}(a,b)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{y_m}(a,b_m)+\frac{\partial F_j}{\partial y_m}(a,b)=0}$$

נתבונן במשוואה

$$G(x,y_m)=F_m(x,\varphi_1(x,y_m),\dots\varphi_{m-1}(x,y_m),y_m)$$

$G=0$ משוואה!

$$x=(x_1,\dots,x_n)$$

1) $0=F_m(a,b)=F_m(a,\varphi_1(a,b_m),\dots,\varphi_{m-1}(a,b_m),b_m)=F(a,b_1,\dots,b_{m-1},b_m)=G(a,b_m)=0$

2) $\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)\overset{?}{\neq}0$

נניח כי $\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)=0$

$$(**)\ \boxed{0=\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)=\frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}(a,b_m)+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}(a,b)\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a,b_m)}$$

בצורה וקטורית, לפי (**),(*):

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(a,b)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}(a,b_m)+\dots+\frac{\partial F}{\partial y_{m-1}}(a,b)\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a,b_m)+\overbrace{\frac{\partial F}{\partial y_m}}^{\text{מקדם}=1}(a,b)=0\Rightarrow\frac{\partial(F_1,..,F_m)}{\partial(y_1,..,y_m)}=0-\text{סתירה}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)\neq 0$$

$G(a,b_m)=0$ לפי משפט למקרה $m=1$

$$F_m(x,\varphi_1(x,y_m),\dots,\varphi_{m-1}(x,y_m),y_m)=0=G(x,y_m)\Rightarrow y_m=\varphi_m(x):x\in U_a,y\in V_b$$

$$\exists U'_a,V'_b:\begin{cases}y_1=\varphi_1(x_1,\dots,x_n,y_m)=\varphi_1\big(x_1,\dots,x_n,\varphi_m(x_1,..,x_n)\big)\\ \vdots\\ y_{m-1}=\varphi_{m-1}\big(x_1,..,x_n,\varphi_m(x_1,\dots,x_n)\big)\\ y_m=\varphi_m(x_1,..,x_n)\end{cases}$$

בסביבה $U'_a\times V'_b\ni(a,b)$

$$\Psi(x):\begin{cases}y_1=\Psi_1(x_1,..,x_n)\\ \dots\\ y_{m-1}=\Psi_{m-1}(x_1,..,x_n)\\ y_m=\varphi_m(x_1,..,x_n)\end{cases}\Rightarrow y=\Psi(x):(x,y)\in U'_a\times V'_b$$

תרגילים

1) $\begin{cases}xe^{u+v}+2uv=1\\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x\end{cases}$

הוכח כי $u=u(x,y)\,,v=(x,y),u,v\in C^\infty$ כך ש $u(1,2)=v(1,2)=0$

$(x,y)\in U_{(1,2)}\,;(u,v)\in V_{(0,0)}\quad;\quad a=(1,2)\quad b=(0,0)$

א) $\begin{cases}1e^{0+0}+2*0*0=0\\ 2e^{0-0}-\frac{0}{1+0}=2\end{cases}\Rightarrow F(a,b)=0$

ב) $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_1,x_2)}(1,2,0,0)=\det\begin{pmatrix}xe^{u+v}+2v & xe^{u+v}+2u\\ ye^{u-v}-\frac{1}{1+v} & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2}\end{pmatrix}\Big|_{\substack{x=1\\y=2\\u=0\\v=0}}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}=-3\neq 0$

אין פתרון אנליטי אבל יש פתרון.

מה אם הנגזרות?

לפי המשפט הכללי $F(x,y)=0\,,y=\varphi(x)\Rightarrow F\big(x,\varphi(x)\big)\equiv 0\ x\in U_a$

כלל שרשרת:

$$dF_x\big(x,\varphi(x)\big) + dF_y\big(x,\varphi(x)\big) \circ d\varphi_x(x) \equiv 0$$
$$d\varphi_x(x) = -\big[dF_y\big(x,\varphi(x)\big)\big]^{-1} \circ dF_x\big(x,\varphi(x)\big)$$
$$J_\varphi(x) = -\big[JF_y\big(x,\varphi(x)\big)\big]^{-1} J_F\big(x,\varphi(x)\big)$$
$$J_\varphi(a) == -\big[JF_y(a,b)\big]^{-1} J_F(a.b)$$

ובתרגיל שלנו:

$$\frac{\partial}{\partial x} : e^{u+v} + xe^{u+v}(u_x' + v_x') + 2(u_x' v + u v_x') = 0$$
$$ye^{u-v}(u_x' - v_x') - (u' \frac{1}{1+v} + u \frac{-v_x'}{(1+v)^2} = 2$$

$$u_x'(1,2) =? \Rightarrow 1 + (u_x' + v_x') = 0$$
$$2(u_x' - v_x') - u_x' = 0 \Rightarrow v_x'(1,2) = -1, u_x'(1,2) = 0$$

$rpial$ יה

הרצאה 18

משפט על פונקציה הפוכה Inverse Function

$$n = 1$$
$$f: (a, b) \to \mathbb{R}$$
$$f \in C^1(a, b)$$
$$f'(x) \neq 0$$

הגדרה

$$U, V \subset\circ \mathbb{R}^n$$

אומרים כי $\varphi: U \to V$ C^r-דיפאומורפיזם אם:

1) φ חח"ע "1-1"
2) φ על : $\varphi(U) = V$
3) $\varphi \in C^r(V), \varphi^{-1} \in C^r(U)$

אומרים כי U, V C^r-דיפאומורפים אם קיים C^r-דיפאו' ביניהם.

הגדרה

$F, G \subset \mathbb{R}^n$ דיפאומורפים אם לכל $U, V \subset\circ \mathbb{R}^n$ כך ש$F \subset U, G \subset V$ קיימות $U_0 \subset\circ U, V_0 \subset\circ V$ כך ש $V_0 \sim U_0$ ($F \subset U_0, G \subset V_0$).

משפט (על פונ' הפיכה)

$$U, V \subset\circ \mathbb{R}^n, f: U \to V, f \in C^r(U), r \geq 1, a \in U$$

נניח כי $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a) \neq 0$ אז קיימות סביבות $a \in U_0, f(a) = b \in V_0$ כך ש:

$$\forall y \in V_0 \exists!\, x \in U_0\, ; x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$$
$$f^{-1} \in C^r(V_0), f^{-1}: V_0 \to U_0$$

הוכחה

$$W \coloneqq U \times V$$
$$F(x, y) \coloneqq y - f(x)$$
$$F: W \to \mathbb{R}^n\, ; F \in C^r(W)$$
$$F(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a, b) = -\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) \neq 0$$

לפי משפט על פונ' סתומה:

$$\exists \underset{a\in}{U_0}, \underset{b\in}{V_0} \subset\circ \mathbb{R}^n : \forall y \in V_0 \exists!\, x \in U_0 : y - f(x) = F(x, y) = 0$$
$$y \to x = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1} C^r(V_0)$$

מסקנה 1:

$f \in C^r(U); U \subset_\circ \mathbb{R}^n ; a \in U$

$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x) \neq 0$ $\forall x \in U$ אזי $f(U)$ קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$

הוכחה

ניקח $y_0 \in f(U)$ אזי $\exists x_0 \in U : f(x_0) = y$

לפי משפט על פונ' הפיכה : $\exists x_0 \in U_0 \subset U, y_0 \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$ כך שלכל $y \in V_0$ קיים ויחיד

$x \in U_0 \subset U: f(x) = y$ ולכן $y \in f(U)$ אז $V_0 \subset f(U)$

קיבלנו $\forall y_0 \in f(U) \exists V_0 \subset \mathbb{R}^n : V_0 \subset f(U)$ ולכן $f(U)$ קבוצה פתוחה

מסקנה 2:

אם $f: U \to V$ $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x) \neq 0$ $\forall x \in U$: אז f דיפאומורפיזם מקומי, כלומר לכל $a \in U, b \in V$ קיימות סביבות $a \ni U_a, b \ni$ V_b כך ש$f: U_a \to V_b$ היא C^r-דיפאמורפיזם.

דוגמא

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x) \neq 0 \not\Rightarrow f \text{ דיפאומורפיזם}$$

$$f(x_1,x_2) = (e^{x_1}\cos x_2, e^{x_1}\sin x_1)$$

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)} = e^{2x_1} \neq 0$$

$$f(x_1,x_2+k\tau) = f(x_1,x_2+2k\pi) = f(x_1,x_2)$$

מטריצת יעקובי על פונ' הפוכה

$$f: U \to V$$

$$f \in C^r(U); U,V \subset_\circ \mathbb{R}^n$$

$$a \in U, b = f(a) ; \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a) \neq 0$$

$$\exists f^{-1}: V_b \to U_a ; f^{-1}(f(x)) = x \in U_a$$

כלל השרשרת

$$J_{f^{-1}}(f(a))J_f(a) = I$$

$$\boxed{J_{f^{-1}}(b) = \left(J_f(a)\right)^{-1}}$$

$$d_{f^{-1}}(f(a)) \circ df(a) = I$$

$$\boxed{df_b^{-1} = (df_a)^{-1}}$$

$$\boxed{\frac{\partial(f_1^{-1},\dots,f_n^{-1})}{\partial(y_1,\dots,y_n)}(b) = \frac{1}{\frac{\partial(f_!,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots x_n)}(a)}}$$

משפט

$$U \subset\circ \mathbb{R}^n \,; f: U \to \mathbb{R}^n \,, f \in C^r(U), r \geq 1$$

נניח כי $\forall x \in U \; \frac{\partial(f_1,..,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x) \neq 0$

אז $f(U)$ קבוצה פתוחה

אם f חח"ע אז $f: U \to f(U)$-C^r-דיפאו'

תרגיל בסגנון מבחן

$$f_1(x,y,z) = e^{2y} + e^{2z}$$
$$f_2(x,y,z) = e^{2x} - e^{2z}$$
$$f_3(x,y,z) = x - y$$
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

1) יעקוביאן:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -4e^{2y+2z} - 4e^{2x+2z} < 0$$

2) $f(x,y,z) = f(x',y'z')$:

$$\begin{cases} e^{2y} + e^{2z} = e^{2y'} + e^{2z'} \\ e^{2x} - e^{2z} = e^{2x'} - e^{2z'} \\ x - y = x' - y' \end{cases}$$

$$e^{2x} + e^{2y} = e^{2x'} + e^{2y'} \Rightarrow e^{2y}(e^{2x-2y} + 1) = e^{2y'}\left(e^{2x'-2y'} + 1\right) \Rightarrow y = y' \Rightarrow$$
$$x = x', z = z'$$

משטחים דיפרנציאלים ב$\mathbb{R}^n$

$ax+by-c=0$ קו ב$\mathbb{R}^2$

$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1 \\ a_{21}x+a_{21}y+a_{23}z=d_2 \end{cases}$ קו $\mathbb{R}^3$ אם $rank(a_{ij})=2$

הגדרה

$$\Phi: U\to\mathbb{R}^m; U\subset\circ\,\mathbb{R}^n\,; m\le n$$

אומרים כי Φ רגולרית בנקודה $a\in U$ אם $rank\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m,n}=m$ (מקסימלי!).

a נקודה רגולרית.

הגדרה

$$W\subset\circ\,\mathbb{R}^n\,; F: W\to\mathbb{R}^m, m\le n, F\in C^r(W)$$

הקבוצה $M=\{x\in W : F(x)=0\}$ C^r-משטח אם כל נקודה בM רגולרית או אם F רגולרית בW

$$\dim M=n-m$$

$m=1$ משטח על Hyperspace.

דוגמאות

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-1=0\}=S^2$$

$$W=\mathbb{R}^3, F\in C^\infty(W)$$
$$J_F(x,y,z)=\nabla F(x,y,z)=(2x,2y,2z)$$

אם $rankJ_F(x,y,z)=0$ אזי $x=y=z=0$ אבל $(x,y,z)\notin S^2$ ולכן S^2-C^∞-משטח. $\operatorname{Dim} S^2=2$

$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$x+y+z=0$$

$$J_F(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$rank\,J_F<2\Rightarrow(2x,2y,2z)=\lambda(1,1,1)\Rightarrow x=y=z=\frac{\lambda}{2}$$

$$x+y+z=0\Rightarrow(0,0,0)\notin M$$
$$\dim M=3-2=1$$

הרצאה 19

הגדרה

יהיו $F,G\subset\mathbb{R}^n$. $F\sim G$ דיפאומורפי אם קיימות $U,V\mathbb{R}^n$ כך ש$F\subset U, G\subset V$ כך שקיים $\varphi:U\to V$ שהוא C^r-דיפאומורפיזם.

דוגמא

טורוס ב$\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=1 \\ x_3^2+x_4^2=1 \end{cases}$$

$$J_\Phi=\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

מישור משיק למשטח

M משטח, $W\subset\circ\mathbb{R}^n$.

$$M=\{x\in W:\Phi_1(x)=...=\Phi_m(x)=0\}$$

$\Phi=(\Phi_1,...,\Phi_m)$ רגולרית בM.

$r\geq 0$, $\Phi\in C^r(W)$ וקוראים לM C^r-משטח.

$$\dim M=k=n-m$$

נקבע $a\in M$

Φ רגולרית בa, כלומר:

$$rank\begin{pmatrix} (a) & ... & (a) \\ \vdots & ... & \vdots \\ (a) & ... & (a) \end{pmatrix}=m$$

ולכן קיים מינור $\Delta_{m\times m}\neq 0$.

לפי משפט על פונ' סתומה:

$$a=\left(\underbrace{a_1,...,a_k}_{a'},\underbrace{a_{k+1},...,a_n}_{a''}\right)=(a',a'')$$

$$\exists U_{a'},V_{a''}\ :\ \forall x'\in U_{a'}\exists! x''\in V_{a''}\ :\ \Phi(x',x'')=0$$

$$x''=\varphi(x')$$

$(x_{k+1},...,x_n)=\varphi(x_1,..,x_k)$ כך ש$(x_1,..,x_k)\in U_{a'}$, $(x_{k+1},...,x_n)\in V_{a''}$.

$m=1$

$$\Phi(x_1,...,x_n)=0, a=\left(\underbrace{a_1,...,a_{n-1}}_{a'},\underbrace{a_n}_{a''}\right)$$

$\nabla\varphi(a)\neq 0$ רגולרית, $\nabla\varphi(a)=((a),...,(a))\neq(0,0)$ כי $(a)\neq 0$, $\varphi(x_1,..,x_{n-1})=x_n$.

מישור משיק לגרף Γ_φ

$$\Gamma_\varphi=M\cap(U_{a'}\times V_{a''})$$

מישור משיק בנקודה a:

$$x_n-a_n=\sum_{j=1}^{n-1}(a')(x_j-a_j)$$

$\Phi(x_1,...,x_{n-1},\varphi(x_1,..,x_{n-1}))\equiv 0$, נגזור לפי x_j (כלל השרשרת):

$$(a)+(a)(a')=0$$

$$\Leftarrow\boxed{(a')=-\frac{(a)}{(a)}}\Leftarrow$$

$$\Gamma_\varphi : x_n - a_n = \sum_{j=1}^{n-1}\left(-\frac{(a)}{(a)}\right)(x_j - a_j) \Rightarrow (a)(x_n - a_n) = -\sum_{j=1}^{n-1}(a)(x_j - a_j)$$

$$\boxed{T_a(M) \text{ משוואה של מישור משיק } \sum_{j=1}^{n}(a)(x_j - a_j) = 0}.$$

גרף

$$\Phi(x_1, .., x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}) - x_n,\ x_n = f(x_1, ..., x_{n-1})$$

$$\begin{aligned} 1 \le j \le n-1 : &\quad (x) = (x) \\ j = n : &\quad (x) = -1 \end{aligned}$$

$$\Phi = f(x_1, ..., x_{n-1}) - x_n \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1}(x_j - a_j) - (x_n - a_n) = 0$$

משמעות גאומטרית

$$\begin{aligned} T_a(M) &: \langle \Phi(a), x - a\rangle = 0 \\ T_a(M) &: \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \Phi(a), x - a\rangle = 0\} \end{aligned}$$

דוגמאות

.1

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - r^2 &= 0 \\ \nabla\Phi &= (x, 2y) \\ r &> 0 \end{aligned}$$

יהי $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ כך ש$a_1^2 + a_2^2 = r^2$.

$T_a(a) : 2a_1(x - a_1) + 2a_2(y - a_2) = 0 \Leftarrow \nabla\Phi(a) = (2a_1, 2a_2)$

$$T_a(M) \quad : \quad a_1 x + a_2 y = r^2$$

.2 $S^2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ ספירה. $u = (x, y, z)$

$a \in S^2, \langle \nabla\Phi(a), u - a\rangle = 0$

$2a_1(x - a_1) + 2a_2(y - a_2) + 2a_3(z - a_3) = 0$

$a_1 x + a_2 y + a_3 z = a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 = 1$

$\Leftarrow T_a\left(S^2\right) : a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$

m - משוואות

$M = \{x \in W : \Phi_1(x) = ... = \Phi_m(x) = 0\}$

$\nabla\Phi_1(a), ..., \nabla\Phi_m(a)$ בת"ל $\Leftarrow$ Φ רגולרית בנקודה $a \in M$.

בפרט, $\nabla\Phi_j(a) \ne 0$ ולכן

$$M = \bigcap_{j=1}^{m}\{x : \Phi_j(x)\}$$

$$\dim M = n - m = k$$

$$T_a(M) = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 \le j \le m : \langle \nabla\Phi_j(a), x - a\rangle = 0\} = \bigcap_{j=1}^{m} T_a(M_j)$$

סה"כ קיבלנו:

$$M = \{x \in W \,:\, \Phi_1(x) = ... = \Phi_m(x) = 0\}$$
$$\dim M = n - m, m \leq n, \Phi \in C^r(W), r \geq 1$$

$$T_a(M) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \exists i : \sum_{j=1}^{n} (a)(x_j - a_j) = 0\right\}$$

$$\dim T_a(M) = n - m = \dim M$$
$$T_a(M) : \langle \nabla\Phi_j(a), x - a\rangle = 0 \Rightarrow (x - a) \perp \nabla\Phi_1(a), ..., \nabla\Phi_m(a)$$

$$\boxed{N_a(M) = \operatorname{span}\{\nabla\Phi_1(a), ..., \nabla\Phi_m(a)\} \text{ מרחב נורמלי}}$$
$$N_a(M) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x - a = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla\Phi_j(a)\right\}$$
(האם $M_a \oplus T_a = \mathbb{R}^n$?)

דוגמא

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_3^2 + x_4^2 &= 1 \end{aligned}$$

$M = T^2$ טורוס, $a = (a_1, .., a_4)$.

$$T_a(M) \,:\, \begin{matrix} 2a_1(x_1 - a_1) + 2a_2(x_2 - a_2) = 0 \\ 2a_3(x_3 - a_3) + 2a_4(x_4 - a_4) = 0 \end{matrix} \,:\, \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = 1 \\ a_3x_3 + a_4x_4 = 1 \end{cases}$$

קיצונים על תנאי (עם אילוצים)

הגדרה

יהיה M C^r-משטח ב-$\mathbb{R}^n$. $M = \{x \in W \,:\, \Phi(x) = 0\}$, $W \subset \circ\mathbb{R}^n$
תהי פונ' $f : M \to \mathbb{R}$

- אומרים ש$a \in M$ נקודת מינימום אם $\exists\epsilon > 0 \,:\, \forall x \in M \cap B(a, \epsilon) \,:\, f(x) \geq f(a)$
  - אומרים ש$a \in M$ מינימום ממש אם $\exists\epsilon > 0 \,:\, \forall x \in M \cap \underset{x \neq a}{B}(a, \epsilon) \,:\, f(x) > f(a)$
- אומרים ש$a \in M$ נקודת מקסימום אם $\exists\epsilon > 0 \,:\, \forall x \in M \cap B(a, \epsilon) \,:\, f(x) \leq f(a)$
  - אומרים ש$a \in M$ מינימום ממש אם $\exists\epsilon > 0 \,:\, \forall x \in M \cap \underset{x \neq a}{B}(a, \epsilon) \,:\, f(x) < f(a)$

משפט

$W \subset \circ\mathbb{R}^n, f : W \to \mathbb{R}, f \in C^r(W), r \geq 1$
$M = \{x \in W \,:\, \Phi_1(x) = ... = \Phi_m(x) = 0\}$ C^r משטח.
אם $a \in M$ נקודת קיצון מקומי עם התנאי $\Phi(x) = 0$ אז קייפ מספרים $\lambda_1, ..., \lambda_m$ כך ש:
$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla\Phi_1(a) + ... + \lambda_m \nabla\Phi_m(a)$
$\lambda_1, ..., \lambda_m$ נקראים כופלי לגרנז'.
ז"א $\nabla f(a) \perp T_a(M)$.

הוכחה

$a\in M$, $(\Phi_1,...,\Phi_m)$ רגולרית ב־a.

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}(a) & ... & (a)\\ \vdots & ... & \vdots\\ (a) & ... & (a)\end{pmatrix}=m$ ולכן ניתן להניח שקיים מינור בגודל $m\times m$: $\Delta_m\neq 0$.

לפי משפט על פונק' סתומה:

$\exists U_{a'}V_{a''}\ :\ \varphi:U_{a'}\to V_{a''}$

$k=n-m$

$M\cap(U_{a''}\times V_{a''})=\Gamma_\varphi$

$M\cap(U_{a''}\times V_{a''})=\{(x_1,...,x_k,\varphi_1(x_1,..,x_k),...,\varphi_m(x_1,..,x_k))\ :\ x\in U_{a'}\}$

נגדיר $g(x_1,...,x_k)=f(x_1,...,x_k,\varphi_1(x_1,...,x_n),...,\varphi_m(x_1,...,x_n))$

נניח כי a נקודת קיצון (בה"כ).

$g(a')=f(a',\varphi(a'))=f(a)$

$\forall x\in U_{a'}\ :\ g(x)\geq g(a')$

a' נקודת מינימום ל־g בלי תנאי.

$g:U_{a'}\to\mathbb{R}$. $U_{a'}\subset\circ$, ולכן a' נקודה קריטית ל־g, כלומר

$j=1,..,k\ :\ (a')=0$

נגזור את g לפי x_j:

$$(a')=(a)+\sum_{s=1}^{m}(a)(a')=0$$

$$\nabla f(a)\quad\perp\quad\underset{1\leq j\leq k}{\left(0,...,\overset{j}{1},..,0,(a'),...,(a')\right)}=E_j$$

$$\boxed{\nabla f(a)\perp E_1,...,E_k}$$

נוסיף את האילוצים:

$$(x_1,..,x_k)\in U_{a'},\begin{cases}\Phi_1(x_1,..,x_k,\varphi_1(x_1,..,x_k),...,\varphi_m(x_1,...,x_k))=0\\ \Phi_2(x_1,..,x_k,\varphi_1(x_1,..,x_k),...,\varphi_m(x_1,...,x_k))=0\\ \vdots\\ \Phi_m(x_1,..,x_k,\varphi_1(x_1,..,x_k),...,\varphi_m(x_1,...,x_k))=0\end{cases}$$

נגזור לפי x_j

$$\begin{cases}(a)+\sum_{s=1}^{m}(a)(a')&=0\\ \vdots\\ (a)+\sum_{s=1}^{m}(a)(a')&=0\end{cases}$$

$\Leftarrow\nabla\Phi_1(a),...,\nabla\Phi_m(a)\perp E_1,...,E_k$ ז"א $1\leq j\leq k:\langle\nabla\Phi_j(a),E_i\rangle$.

$\dim\operatorname{spam}\{E_1,...,E_k\}=k$ ולכן $\dim\left(\operatorname{span}\{E_1,..,E_k\}^{\perp}\right)=n-k=m$ (השלמה אורתוגנלית).

$$\nabla f(a)\underbrace{\nabla\Phi_1(a),...,\nabla\Phi_m(a)}_{\text{Independent}}\perp\operatorname{span}\{E_1,...,E_k\}$$

ולכ

$$\nabla f(a)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla\Phi_i(a)$$

הרצאה 20

$f\to min,max$
$$\begin{cases}\Phi_1\left(x_1,...,x_n\right)=0\\ ....\\ \Phi_m\left(x_1,...,x_n\right)=0\end{cases}$$
$\Phi_j\in C^r$

$\Phi=(\Phi_1,..,\Phi_m)$ רגולרית על $M=\{\Phi=0\}$

אם a נק' קיצון מקומי עם תנאי $\Phi=0$ אז $\nabla f=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla\Phi_i$

כלל כופלי לגראנז'

$f\to max,min$
$\Phi_1(x)=...=\Phi_m\left(x\right)=0$

$L:=f-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi_i$ - פונ' לגראנג'

a - נקודת קיצון $\Leftarrow\nabla L\left(a\right)=0$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\\ ...\\ \frac{\partial L}{\partial x_n}=0\end{cases},\begin{cases}\Phi_1\left(x\right)=0\\ ...\\ \Phi_m\left(x\right)=0\end{cases}$$ $n+m$ משוואות עבור $x_1,..,x_n,\lambda_1,..,\lambda_m$

דוגמא

$$u=x-2y+2z$$
$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$L=x-2y+2z-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$
$$\begin{cases}L'_x=1-2\lambda x=0 & \Rightarrow x=\frac{1}{2\lambda}\\ L'_y=-2-2\lambda y=0 & \Rightarrow y=-\frac{1}{\lambda}\\ L'_z=2-2\lambda z=0 & z=\frac{1}{\lambda}\end{cases}$$
$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1\Rightarrow\lambda=\pm\frac{3}{2}$$
$$x=\pm\frac{1}{3},y=\mp\frac{2}{3},z=\pm\frac{2}{3}$$
$$a_{1,2}=\left(\pm\frac{1}{3},\mp\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3}\right)$$
$$f\left(a_1\right)=3,f\left(a_2\right)=-3\Rightarrow\max_{s^2}f=3,\min_{s^2}f=-3$$

דוגמא

$$f\left(x,y,z\right)=xyz$$
$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$$
$$L=xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)-\mu\left(x+y+z\right)$$
$$\begin{cases}L'_x=yz-2\lambda x-\mu=0\\ L'_y=xz-2\lambda y-\mu=0\\ L'_z=xy-2\lambda z-\mu=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}xyz-2\lambda x^2-\mu x=0\\ xyz-2\lambda y^2-\mu y=0\\ xyz-2\lambda z^2-\mu z=0\end{cases}$$
$$\oplus 3xyz-2\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{3}{2}xyz$$
$$yz=\frac{2\lambda}{3x},yz-2\lambda x-\mu=0\Rightarrow\frac{2\lambda}{3x}-2\lambda x-\mu=0\Rightarrow\begin{cases}2\lambda-6\lambda x^2-3\mu x=0\\ \lambda y-6\lambda y^2-3\mu y=0\\ 2\lambda-6\lambda z^2-3\mu z=0\end{cases}\Rightarrow x=y\vee x=z\vee y=z$$

נראה עבור $x=y$

$$\begin{cases}2x^2+z^2=1\\ 2x+z=0\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{z}{2}\Rightarrow 2\frac{z^2}{4}+z^2=1\Rightarrow z=\pm\sqrt{\frac{2}{3}},x=y=\mp\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2}=...=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$$

קיצונים על תחום

$\partial\Omega$-משטח דיפרנציאבלי

$f \in C^1(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$-קומפקט. לפי משפט Weirtstrass $\exists \max_{x\in\bar{\Omega}} f(x) = f(x_{max}), \min_{x\in\bar{\Omega}} f(x) = f(x_{min})$

$a_{max} \in \Omega \Rightarrow \nabla f(a_{max}) = 0$, $a_{max} \in \partial\Omega \Leftarrow a_{max}$ נק' קיצון מקומי עם התנאי $\Phi = 0$

$a_1, .., a_n$ נקודות קריטיות $\nabla f(a) = 0$

$max(f(a_1), ..., f(a_n)) = \max_{x\in\Omega} f(x)$

תרגיל

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$
$$x^2 + y^2 \le 25$$
$$\max f(x,y) = ?, \min f(x,y) = ?$$
$$\begin{cases} f'_x = 2x - 12 = 0 & x = 6 \\ f'_y = 2y + 16 = 0 & y = -8 \end{cases} \Rightarrow a = (6,-8)$$

על השפה: $x^2 + y^2 = 25$

$$f|_{x^2+y^2=25} = 25 - 12x + 16y$$
$$(6,-8) \notin \bar{\Omega}$$
$$L = 25 - 12x + 16y - \lambda\left(x^2 + y^2 - 25\right)$$
$$L'_x = -12 - 2\lambda x = 0$$
$$L'_y = 16 - 2\lambda y = 0$$
$$x = -\frac{6}{\lambda}, y = \frac{8}{\lambda}$$

....

$$b_{1,2} = (\mp 3, \pm 4)$$

תרגיל להגשה (בונוס)

$a_i, x_i \ge 0$

הוכח כי $\sum_{i=1}^n a_i x_i \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ עבור $p, q \ge 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$|(a,x)| \le ||a||_p \, ||x||_q$$

רמז:

$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \to min$ על תנאי $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A$ $(x_i \ge 0)$

פרק 4 אינטגרציה ב$\mathbb{R}^n$ - אינטגרל של Riemann-Darboux

קטע n מימדי

$$n = 1 : [a,b]$$
$$n > 1 \Rightarrow P = [a_1, b_1] \times ... [a_n, b_n] = \{x = (x_1, ..., x_n) : a_i \le x_i \le b_i, i = 1, ..., n\}$$

נפח של P

$$V(P) = vol(P) = (b_1 - a_1) ... (b_n - a_n)$$
$$\mathring{P} = (a_1, b_1) \times ... (a_n, b_n)$$
$$P \mathring{\cap} Q = \mathring{P} \cap \mathring{Q}$$

חלוקה

$$n=1\Rightarrow [a,b]\,, a=x_0<x_1<...<x_N=b, [a,b]=\bigcup_{i=1}^{N}\Delta^{(i)}$$
$$n>1\Rightarrow P=[a_1,b_1]\times...[a_n,b_n]\,,\begin{cases}[a_1,b_1]=\bigcup_{i_1=1}^{n}\Delta_1^{(i_1)}\\ \vdots\\ [a_n,b_n]=\bigcup_{i_n=1}^{n}\Delta_n^{(i_n)}\end{cases}$$
$$P_{i_1,..,i_n}=\Delta_1^{(i_1)}\times...\times\Delta_n^{(i_n)}$$

חלוקה - $\mathcal{P}=\left\{\mathrm{P_{i_1,..,i_n}}\right\}$ של P, בנייה של אינטגרל

הגדרה

תהי פונ' $f:P\to R$.P קטע n מימדי, f חסומה $\forall x\in P:|f(x)|\leq M$

אם $\mathcal{P}$ חלוקה של P אז סכום עליון:

$\bar{S}(f,\mathcal{P}):=\sum_{i=1}^{n}M_iV(P_i)$ עבור $M_i=sup_{x\in P_i}f(x)$

סכום תחתון:

$\underline{m_iV(P_i)}(f,\mathcal{P}):=\sum_{i=1}^{n}M_iV(P_i)$ עבור $m_i=inf_{x\in P_i}f(x)$

$\underline{S}(f,P)\leq\overline{S}(f,P)$

הגדרה

אם $\mathcal{Q},\mathcal{P}$ חלוקות של P אז נגדיר $\mathcal{Q}\cap\mathcal{P}:=\left\{\mathcal{Q}_i\mathring{\cap}\mathcal{P}_i\right\}$

למה

מלבן n מימדי P ו-$\mathcal{Q},\mathcal{P}$ חלוקות של P, אזי $\underline{S(f,Q)}\leq\overline{s(f,P)}$.

הרצאה 21

למה:

P מלבן n מימדי, $f:P\to\mathbb{R},|f(x)|<C$, אזי:
$\forall\mathcal{P},\mathcal{Q}:\underline{S}(f,\mathcal{Q})\le\overline{S}(f,\mathcal{P})$

הוכחה

$\mathcal{R}:=\mathcal{P}\mathring{\cap}\mathcal{Q}$

$$\overline{S}(f,\mathcal{F})=\sum_{i,j}\sup_{x\in P_i\mathring{\cap}Q_j}vol\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)=$$

$$\sum_i\left(\sum_j\sup_{x\in P_i\mathring{\cap}Q_j}f(x)\,vol\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)\right)\le\sum_i\left(\sum_j\sup_{x\in P_i}f(x)\,vol\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)\right)$$

$$=\sum_i\sup_{x\in P_i}f(x)\sum_j vol\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)=\sum_i\sup_{x\in P_i}f(x)\,vol(P_i)=\overline{S}(f,P)$$

הוכחנו כי $\overline{S}(f,\mathcal{R})\le\overline{S}(f,P)$. מתקיים גם $\underline{S}(f,\mathcal{R})\ge\underline{S}(f,Q)$ ולכן:

$$\underline{S}(f,Q)\le\underline{S}(f,\mathcal{R})\le\overline{S}(f,\mathcal{R})\le\overline{S}(f,P)$$
$$\Rightarrow\underline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,P)$$
$$M:=\sup_{x\in P}f(x)$$
$$m:=\inf_{x\in P}f(x)$$
$$\overline{S}(f,P)=\textstyle\sum_i\sup_{x\in P_i}f(x)\,vol(P_i)\le M\sum_i vol(P_i)=Mvol(P)$$
$$\underline{S}(f,P)=\textstyle\sum_i\inf_{x\in P_i}f(x)\,vol(P_i)\ge m\sum_i vol(P_i)=mvol(P)$$
$$mvol(P)\le\underline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,P)\le Mvol(P)$$

הגדרה

$f:P\to P,|f(x)|\le C$

$\inf_P\overline{S}(f,P):=\overline{I}$ אינטגרל עליון

$\sup_Q\underline{S}(f,Q):=\underline{I}$ אינטגרל תחתון

נשים לב כי: $\forall P_1,Q_1:\underline{I}\le\sup_Q\underline{S}(f,Q)\le\underline{S}(f,Q_1)\le\overline{S}(f,P_1)\le\inf_P\overline{S}(f,P)=\overline{I}$

הגדרה

$f:P\to\mathbb{R},|f(x)|\le C$

אומרים כי f אינטגרבילית לפי רימן־דרבו $f\in\mathcal{R}(P)$ אם $\underline{I}(f)=\overline{I}(f):=I(f)=\int_P f(x)$

משפט

$f:P\to\mathbb{R},|f(x)|\le C$

$f\in\mathcal{R}(P)$ אם ורק אם $\forall\epsilon>0\exists P:0\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\epsilon$

הוכחה

נניח כי התנאי מתקיים

$$\forall\epsilon>0\exists P:0\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\epsilon$$
$$\overline{S}(f,P)<\underline{S}(f,P)+\epsilon$$
$$\overline{I}=\inf_Q\overline{S}(f,Q)<\underline{S}(f,P)+\epsilon$$
$$\overline{I}-\epsilon<\underline{S}(f,P)$$
$$\overline{I}-\epsilon<\sup_Q\underline{\mathrm{S}}(f,Q)=\underline{\mathrm{I}}$$

$0 \leq \overline{I} - \underline{I} < \epsilon$
$\epsilon \to 0 \Rightarrow \overline{I} = \underline{I} \Rightarrow f \in \mathcal{R}(P)$

בכיוון השני, נניח כי $f \in \mathcal{R}(P)$
נקבע $\epsilon > 0$
$\exists Q : I - \epsilon < \underline{S}(f,Q) \leq I$
$\exists P : I < \overline{S}(f,P) \leq I + \epsilon$
$I - \epsilon < \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P) \leq I + \epsilon$
$F := P \overset{\circ}{\cap} Q$ אז:
$I - \epsilon < \underline{S}(f,Q) \leq \underline{S}(f,F) \leq \overline{S}(f,F) \leq \underline{S}(f,P) \leq I + \epsilon$
$0 \leq \overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) \leq 2\epsilon$
$\boxed{f \in \mathcal{R}(P) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists P : 0 \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon}$

משפט

אם $f \in C(P)$ אזי $f \in \mathcal{F}(P)$

הוכחה

נקבע $\epsilon > 0$, לפי משפט קנטור f רציפה במ"ש בP.
$\exists \delta > 0 : \forall x,y \in P : ||x-y||_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
$P = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$
ניקח N טבעי כך ש: $\frac{\max(b_i - a_i)}{N} < \delta$
$\frac{\max(b_I - a_i)}{\delta} < N$
$\Delta_i^{(s)} = a_i + \frac{s}{N}(b_i - a_i)$
$P = \left\{\Delta_1^{(i_1)} \times ... \times \Delta_n^{(i_n)}\right\} = \{P_i\}$
$x,y \in P_i$ כי $||x-y||_\infty < \delta$ ולכן $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ וגם $|M_i - m_i| < \epsilon$
$M_i = \sup_{x \in P_i} f(x) = f(x_{max}), m_i = \inf_{x \in P_i} f(x) = f(x_{min})$
$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_i M_i V(P_i) - \sum_i m_i V(P_i) = \sum_i (M_i - m_i) V(P_i) < \epsilon \sum_i V(P_i) = \epsilon V(P)$
$\forall \epsilon > 0 \exists P : 0 \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon V(P)$
ולכן לפי הקריטריון $f \in \mathcal{R}(P)$

קבוצות ממידה אפס

הגדרה

$N \subset \mathbb{R}^n$ ממידה 0. $mesN = 0$ אם $\forall \epsilon \exists \{P_i\}_{i=1}^\infty$ P_i קטעים, כך ש $N \subset \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{P_i}$ ו$\sum_{i=1}^\infty V(P_i) < \epsilon$

דוגמא

רציונלים $n = 1 : \{r_n\}_{n=1}^\infty$
נקבע $\epsilon > 0$
$P_n = \left(r_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)$
$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n=1}^\infty P_n$
$\sum_{n=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$
עוד דוגמא היא קבוצת קנטור.

הערה

אם N קומפקטית:
$mesN = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \{P_i\}_{i=1}^M : N \subset \bigcup_{i=1}^M P_i, \sum_{i=1}^m V(P_i) < \epsilon$

למה

N קומפקטית אז כל כיסוי $N \subset_{i=1}^\infty P_i$ כולל תת־כיסוי סופי.

משפט

$f:P\to\mathbb{R},|f(x)|<C$. נניח ש$f\in C(P-N)$ עבור N קבוצה קומפקטית, $mesN=0$, אזי $f\in\mathcal{R}(P)$

הוכחה

נקבע $\epsilon>0$
מלמה קודמת $N\subset P_1\cup...P_M$ כך ש$\sum_{i=1}^{M}V(P_i)<\epsilon$.
נתבונן ב$K:=P-\left(\bigcup_{i=1}^{M}P_i\right)$
K קבוצה חסומה וסגורה, קומפקטית.
$\mathcal{P}'$ חלוקה שמוכלת ב $\{P_i\}_{i=1}^{M}$, $f\in C(K)$ ולכן לפי משפט קנטור f רציפה במ"ש.
$\exists\delta>0:||x-y||<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon$
בונים חלוקה $\mathcal{P}''$ כך ש:
$$\forall P_i''\subset K:\left|\sup_{P_i}f(x)-\inf_{P_i}f(x)\right|<\epsilon$$
$\mathcal{P}'''=\mathcal{P}'\mathring{\cap}\mathcal{P}''$
מקבלים חלוקה $\{Q_j\}=\mathcal{P}'''$
$\forall Q_j\in\mathcal{P}'':Q_j\mathring{\cap}P_i\neq\phi$
$\left|\sup_{Q_j}f(x)-\inf_{Q_j}f(x)\right|<\epsilon$ לפי רציפות במ"ש.
$\overline{S}(f,\mathcal{P}''')-\underline{S}(f,\mathcal{P}''')=$
$\sum_{i=1}^{M}\left(\sup_{x\in P_i}f(x)-\inf_{x\in P_i}f(x)\right)V(P_i)+\sum_{Q_j\in\mathcal{P}'''}\left(\sup_{x\in Q_j}f(x)-\inf_{c\in Q_j}f(x)\right)V(Q_j)$
$|f(x)|\leq C$
$\left|\sup_{x\in P_i}f(x)-\inf_{c\in P_i}f(x)\right|\leq 2C$

1. $\sum_{i=1}^{M}\left(\sup_{x\in P_i}f(x)-\inf_{x\in P_i}f(x)\right)V(P_i)\leq 2C\sum_{i=1}^{M}V(P_i)<2c\epsilon$
2. $\sum_{Q_j\in\mathcal{P}'''}\left(\sup_{x\in Q_j}f(x)-\inf_{c\in Q_j}f(x)\right)Vol(Q_j)\leq\epsilon Vol(P)$

$\Rightarrow\left|\overline{S}-\underline{S}\right|\leq 2C\epsilon+\epsilon Vol(P)$
כלומר אם היינו לוקחים $\frac{\epsilon}{2C+Vol(P)}$ היה יוצא קטן מϵ.

נפח

הגדרה

תהי $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, פונקציה קרקטריסטית characteric function (indicator) :
$$\chi_\Omega(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\Omega\\ 0 & ,x\notin\Omega\end{cases}$$

הגדרה

Ω קבוצה חסומה: $\exists P:\Omega\subset P$
Ω בעלת נפח (מדידה לפי רימן) אם $\chi_\Omega\in\mathcal{R}(P)$

הגדרה

אם Ω מדידה אז $\int\chi_\Omega(x)dx:=Vol(\Omega)$

הרצאה 22

$\Omega\subset P$

$\chi\in\mathcal{R}\left(P\right)$

$n=1:\ \Omega=\left\{ r\in\mathbb{Q}:r\in\left[0,1\right]\right\}$ χ_{Ω}־פ' דיריכלה לא דיפ' כי $\underline{S}\left(\chi_{\Omega},P\right)=0,\overline{S}\left(\chi_{\Omega},P\right)=1$

אינטגרל על קבוצה

הגדרה:

$A\subset P;\ A\in\mathcal{R}\left(P\right)$

$\int_{A}f\left(x\right):=\int_{P}\chi_{A}\left(x\right)f\left(x\right)dx$

תכונות

אדטיביות:

1. A,B
   $A\cap B=\phi$
   $\chi_{A\cup B}=\chi_{A}+\chi_{B}$
   $\left(\chi_{A\cup B}=\chi_{A}+\chi_{B}-\chi_{A\cap B}\right)$
2. $A,B\subset P$

$$A\cap B=\phi\Rightarrow\int_{A\cup B}f\left(x\right)dx=\int_{A}f\left(x\right)dx+\int_{B}f\left(x\right)dx$$

3. חיוביות:
   $f\geq0\Rightarrow\int_{P}f\left(x\right)dx\geq0$
   $f,g\in\mathcal{R}\left(P\right):f\left(x\right)\geq g\left(x\right)\Rightarrow\overline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)\geq\overline{S}\left(g,\mathcal{P}\right)\Rightarrow\int_{p}f\left(x\right)dx\geq\int_{P}g\left(x\right)dx$

מסקנה

1. $m\leq f\left(x\right)\leq M$ כאשר

$$M=\sup_{x\in P}f\left(x\right),m=\inf_{x\in P}f\left(x\right)$$

$$mV\left(P\right)=\int_{P}mdx\leq\int_{P}f\left(x\right)dx\leq\int_{P}Mdx=MV\left(P\right)$$

2.

$$-\left|f\left(x\right)\right|\leq f\left(x\right)\leq\left|f\left(x\right)\right|\Rightarrow-\int_{P}\left|f\left(x\right)\right|dx\leq\int_{P}f\left(x\right)dx\leq\int_{P}\left|f\left(x\right)\right|$$

אי שוויון המשולש

$\boxed{\left|\int_{P}f\left(x\right)dx\right|\leq\int_{P}\left|f\left(x\right)\right|}$

$\left|\int_{A}f\left(x\right)dx\right|\leq\sup_{x\in A}\left|f\left(x\right)\right|\int_{A}dx=\sup_{x\in A}\left|f\left(x\right)\right|V\left(A\right)$

$\boxed{\int_{P}\left(-f\left(x\right)\right)dx=-\int_{P}f\left(x\right)dx}$

הוכחה

$\sup_{x\in B}(-f,(x)) = -\inf_{x\in B} f(x)$

$\mathcal{P}$חלוקה של P:

$\overline{S}(-f,\mathcal{P}) = -\underline{S}(f,\mathcal{P})$

$$\inf_{\mathcal{P}}\overline{S}(-f,\mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}}\underline{S}(-f,\mathcal{P}) = -\sup_{\mathcal{P}}\underline{S}(f,\mathcal{P}) = -\inf_{\mathcal{P}}\overline{S}(f,\mathcal{P}) = -\int_{\mathcal{P}} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow \int_P(-f(x)\,dx) = -\int_P f(x)\,dx$

$\boxed{\int_P \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_P f(x)\,dx}$

הוכחה

$\alpha = \begin{cases} |\alpha| & \alpha\geq 0 \\ -|\alpha| & \alpha\leq 0\end{cases}$ ולכן מספיק לקחת $\alpha \geq 0$.

$\sup_x \alpha f(x) = \alpha\sup_x f(x)$

$\inf_x \alpha f(x) = \alpha\inf_x f(x)$

$\Downarrow$

$\overline{S}(\alpha f,P) = \alpha\overline{S}(f,P)$

$\underline{S}(\alpha f,P) = \alpha\underline{S}(f,P)$

$\int_P \alpha f(x)\,dx = \int\inf_P\overline{S}(\alpha f,P) = \alpha\inf_P\overline{S}(f,P) = \alpha I(f)$

$\boxed{\int_P(f+g)\,dx = \int_P f dx + \int_P g dx}$

הוכחה

$\mathcal{P},\mathcal{Q}$ חלוקות של P.

$$\overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)$$
$$=\sum_{i,j}\sup_{x\in P_i\mathring{\cap}Q_j}\left(f(x)+g(x)V\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)\right)+\sum_{i,j}\sup_{x\in P_i\mathring{\cap}Q_j}g(x)V\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)$$

$\leq \overline{S}\left(f,P\mathring{\cap}Q\right)+\overline{S}\left(g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,Q)$

קיבלנו $\overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,Q)$

וגם $\underline{S}(f,P)+\underline{S}(g,Q)\leq\underline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,Q)$

$\overline{I}(f+g)\leq\overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,Q)$

$\underline{S}(f,P)+\underline{S}(g,Q)\leq\underline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\underline{I}(f+g)$

קיבלנו:

$\underline{S}(f,P)+\underline{S}(g,Q)\leq\underline{I}(f+g)\leq\overline{I}(f+g)\leq\overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,Q)$

$\Downarrow$

$\sup_P\underline{S}(f,P)+\sup_Q\underline{S}(g,Q)\leq\underline{I}(f+g)\leq\overline{I}(f+g)\leq\inf_P\overline{S}(f,P)+\inf_Q\overline{S}(g,Q)$

$I(f)+I(g)\leq\underline{I}(f+g)\leq\overline{I}(f+g)\leq I(f)+I(g)$

ולכן $I(f)+I(g)=I(f+g)$

הערה

אם $N\subseteq P$ קבוצה קומפקטית, $mesN=0$ ו־$f(x)=g(x)\,\forall x\in P\backslash N$ אז:
$f\in\mathcal{F}(P)\Leftrightarrow g\in\mathcal{F}(P)$ ו$I(f)=I(g)$.

מחלקה $E\left(P\right)$

הגדרה

$f\in E\left(P\right)$ אם:
$\exists A_{1},...,A_{k}\subset P$ כך ש:

1. A_{j} קומפקטית
2. $A_{J}\subset M_{j}$ עבור M_{j} משטח דפ' מ $C^{r},r\geq1$
3. $f\in C\left(P\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{k}A_{j}\right)\right)$

משפט

אם $f:P\rightarrow\mathbb{R}$ חסומה ו$f\in E\left(P\right)$ אז $f\in\mathcal{R}\left(P\right)$.

מספיק להראות כי

אם $A\subset M\subset P$ עבור M-C^{r}-משטח, $r\geq1$ אז $mesA=0$.

למה

K-קטע n מימדי ו$\varphi:K\rightarrow\mathbb{R}$ C^{1}-פונקציה, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j}}\left(x\right)\right|\leq C$ $x\in K,1\leq j\leq n:$
אז φ רציפה במידה שווה ב-K

הוכחה

$\forall x,y\in K:\varphi\left(x\right)-\varphi\left(y\right)=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j}}\left(x+\theta\left(y-x\right)\right)\left(x_{j}-y_{j}\right)_{0<\theta<1}$
ולכן
$\left|\varphi\left(x\right)-\varphi\left(y\right)\right|\leq\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j}}\left(x+\theta\left(y-x\right)\right)\right|\left|x_{j}-y_{j}\right|\leq\max_{1\leq i\leq n}\left|x_{i}-y_{i}\right|\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j}}\left(x+\theta\left(y-x\right)\right)\right|\leq$
$\leq C_{n}\max_{1\leq i\leq n}\left|x_{i}-x_{j}\right|=C_{n}\left|\left|x_{i}-y_{i}\right|\right|$
נקבע $\epsilon>0$, $\delta:=\frac{\epsilon}{C_{n}}$ ואז:
$\left|\varphi\left(x\right)-\varphi\left(y\right)\right|\leq\epsilon$

למה

אם $A\subset M\subset P$, M-C^{r}-משטח, $r\geq1$ אז $mesA=0$
(A קבוצה קומפקטית)

הוכחה

גרף$\forall x\in M\exists U_{x}\ni x:U_{x}\cap M=\Gamma_{\varphi}$
כיסוי פתוח $M\subseteq\bigcup_{x\in M}U_{x}$
A קומפקטית ולכן קיים כיסוי סופי $M\subseteq\bigcup_{s=1}^{N}U_{s}$
$A=\bigcup_{s=1}^{N}\left(U_{s}\cap A\right)$
$mes\left(U_{s}\cap A\right)=0?$
בה"כ נניח $x_{n}=\varphi\left(x_{1},..,x_{n-1}\right)$
$\Gamma_{\varphi}=\left\{ x:x_{n}=\varphi\left(x_{1},..,x_{n-1}\right),x_{1},..,x_{n-1}\in K\right\}$ K קטע $n-1$ מימדי.
$\varphi\in C^{1}\left(K\right)\Leftarrow$ $\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j}}$ רציפות בK ולפי הלמה φ רציפה במ"ש בK ולכל $\forall\epsilon>0\exists\delta>0:\forall x',x''\in$
$K\left|\left|x'-x''\right|\right|_{\infty}<\delta\Rightarrow\left|\varphi\left(x'\right)-\varphi\left(x''\right)\right|<\epsilon$
ניקח חלוקה של K: $K=\bigcup_{i=1}^{s}P'_{i}$ כל ש$\forall x',x''\in P'_{i}:\left|\left|x'-x''\right|\right|_{\infty}<\delta$
נבחר $\xi_{i}\in P'_{i}$
נגדיר $P_{i}=P'\times\left[\varphi\left(\xi_{i}\right)-\frac{\epsilon}{2},\varphi\left(\xi_{i}\right)+\frac{\epsilon}{2}\right]$
$x'\in K$, $x_{1}=\varphi\left(x'\right)$
$K=\bigcup P'_{i}\Rightarrow\exists x'\in P'_{i}$
לפי בחירה
$\left|\varphi\left(x'\right)-\varphi\left(\xi_{i}\right)\right|<\epsilon$

$x_n \in \left[\varphi\left(\xi_i\right) - \frac{\epsilon}{2}, \varphi\left(\xi_i\right) + \frac{\epsilon}{2}\right]$
קיבלנו $P_i = \left[\varphi\left(\xi_i\right) - \frac{\epsilon}{2}, \varphi\left(\xi_i\right) + \frac{\epsilon}{2}\right] \times \forall x \in \Gamma_\varphi \exists i : P_i'$
$\Gamma_\varphi \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} P_i$ - כיסוי!
$\sum_{i=1}^{s} v\left(P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} v\left(P_i'\right)\epsilon = v\left(K\right)\epsilon$ ולכן $mes\left(\Gamma_\varphi\right) = 0$

מסקנה

f-חסומה ב-P
$f \in E\left(P\right) \Rightarrow f \in \mathcal{F}\left(P\right)$

הגדרה

1. Ω תחום סגור אם $\Omega = \overline{\overset{\circ}{\Omega}}$
2. $\partial\Omega = \overline{\Omega} \backslash \overset{\circ}{\Omega}$ שפה
3. Ω תחום פשוט אם $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{s} M_j$ עבור M_j-C^r-משטחים.

הערה

אם Ω תחום חסום ופשוט אז $\Omega \in \mathcal{R}\left(P\right)$.

הוכחה

Ω חסומה ולכן קיים קטע n מימדי כך ש$\Omega \subset P$
χ_Ω אי רציפה לכל היותר ב$\partial\Omega$
$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} M_j \Leftarrow$ χ_Ω רציפה חוץ מקבוצה במידה 0 ולכן $\chi_\Omega \in \mathcal{R}\left(P\right)$.

הגדרה

אם Ω קבוצה מדידה $\Omega \in \mathcal{R}\left(P\right)$ (וחסומה) אז לפי ההגדרה:
$V\left(\Omega\right) = \int_P \chi_\Omega dx = \int_\Omega 1dx$

הרצאה 23

Ω תחום פשוט
$f\in E\left(\Omega\right)$
$\exists A_{1},..,A_{k}\subset\Omega$ כך שA_{j}-קומפקטית
M_{k} C^{r}-משטח, $A_{k}\subset M_{k}$
$\Omega\subset P$
$f\left(x\right)\chi_{\Omega}\left(x\right)$ - אי רציפות ב$A_{1}\cup...\cup A_{k}$ וגם ב$\partial\Omega$, ולכן $f\chi_{\Omega}$ אינטגרבילית בP.

משפט של Fubini

$\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{m}$
$\mathbb{R}^{n+m}\ni x=\left(x',x''\right):x'\in\mathbb{R}^{n},x''\in\mathbb{R}^{m}$
P קטע $n+m$ מימדי
$P=P'\times P''$
$P=\prod_{j=1}^{n+m}\left[a_{j},b_{j}\right]=\prod_{j=1}^{n}\left[a_{j},b_{j}\right]\times\prod_{j=n+1}^{m+n}\left[a_{j},b_{j}\right]$
אם $\mathcal{P}$-חלוקה של P אז $\mathcal{P}=\left\{ P_{ij}:P_{ij}=P'_{i}\times P''_{j};\mathcal{P}'=\left\{ P'_{i}\right\} ,\mathcal{P}''=\left\{ P''_{j}\right\} \right\}$ כאשר $\mathcal{P}',\mathcal{P}''$ חלוקות של P',P'' בהתאמה.
$P=P'\times P''\Rightarrow\mathcal{P}=\mathcal{P}'\times\mathcal{P}''$

משפט (Fubini)

$\mathbb{R}^{n+m}\supset P=P'\times P''$
תהי $f\in\mathcal{R}\left(P\right)$, נניח שלכל $x'\in P'$ הפונקציה $f\left(x',x''\right)\to x''\ni P''$ אינטגרבילית בP'' ונגדיר $\Phi\left(x'\right)=\int_{P''}f\left(x',x''\right)dx''$.
אז $\Phi\in\mathcal{R}\left(P'\right)$ ו$\int_{P'}\Phi\left(x'\right)dx'=\int_{P}f\left(x\right)dx$
כלומר $\int_{P'}\left(\int_{P''}f\left(x',x''\right)dx''\right)dx'=\int_{P=P'\times P''}f\left(x\right)dx$

הוכחה

נקח חלוקה $\mathcal{P}'$ של P'

$$\begin{aligned}\overline{S}\left(\Phi,\mathcal{P}'\right) & = & \sum_{i=1}^{N}\sup_{x'\in P'_{i}}\Phi\left(x'\right)v\left(P'_{i}\right)\\
 & = & \sum_{i=1}^{n}\sup_{x'\in P'_{i}}\left(\int_{P''}f\left(x',x''\right)dx''\right)v\left(P'_{i}\right)\\
 & = & \sum_{i=1}^{n}\sup_{x'\in P'_{i}}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{P''_{j}}f\left(x',x''\right)dx''\right)v\left(P'_{i}\right)\\
 & \leq & \sum_{i}\sup_{x'\in P'_{i}}\left(\sum_{j}\sup_{x''\in P''_{j}}f\left(x',x''\right)v\left(P''_{j}\right)\right)v\left(P'_{i}\right)\\
 & \leq & \sum_{i,j}\sup_{x'\in P'_{i}}\sup_{x''\in P''_{j}}f\left(x',x''\right)v\left(P''_{j}\right)v\left(P'_{i}\right)\\
 & = & \sum_{i,j}\sup_{x\in P'_{i}\times P''_{j}}f\left(x\right)v\left(P'_{i}\times P''_{j}\right)\\
 & = & \overline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}=\mathcal{P}'\times\mathcal{P}''$-חלוקה של P.
$\overline{S}\left(\Phi,\mathcal{P}'\right)\leq\overline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)$
וגם באותה הדרך $\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)\leq\underline{S}\left(\Phi,\mathcal{P}'\right)$

ולכן $\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \underline{S}(\Phi,\mathcal{P}') \leq \overline{S}(\Phi,\mathcal{P}') \leq \overline{S}(f,\mathcal{P})$

$\mathcal{P} = \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$

נקבע $\epsilon > 0$

$\exists\mathcal{P} : \overline{S}(f,\mathcal{P}) < I(f) + \epsilon$

$\mathcal{P} = \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$

אז $\overline{S}(\Phi,\mathcal{P}') < I(f) + \epsilon$

$\overline{I}(\Phi) = \inf_{\mathcal{P}'} \overline{S}(f,\mathcal{P}') < I(f) + \epsilon$

$\exists\mathcal{P} : I(f) - \epsilon \leq \underline{S}(f,\mathcal{P})$

$\mathcal{P} = \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$

אז $I(f) - \epsilon < \underline{S}(\Phi)$

ולכן:

$I(f) - \epsilon < \underline{I}(\Phi) \leq \overline{I}(\Phi) < I(f) + \epsilon$

$\epsilon \to 0 \Rightarrow I(\Phi) = \underline{I}(\Phi) = \overline{I}(\Phi) \Rightarrow \Phi \in \mathcal{R}(\mathcal{P}')$

הערה

גם אם לכל $x'' \in P''$ הפונקציה $P' \ni x' \to f(x',x'') \in \mathcal{R}(P')$ אז $\Psi(x'') := \int_{P'} f(x',x'')\,dx'$ היא אינטגרבילית ב־P'' ו־$\int_{P''} \Psi(x'')\,dx'' = \int_P f(x)\,dx$

משפט Fubini

$P = P' \times P'', f \in \mathcal{R}(P)$

אם:

$\forall x' \in P' : f(x',*) \in \mathcal{R}(P'')$

$\forall x'' \in P'' : f(*,x'') \in \mathcal{R}(P')$

אז קיימים האינטגרלים:

$\int_{P'} \left(\int_{P''} f(x',x'')\,dx''\right) dx' = \int_{P''} \left(\int_{P'} f(x',x'')\,dx'\right) dx'' = \int_P f(x)\,dx$

$P = P' \times P'$

$\int_{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]} f(x)\,dx = \int_{[a_1,b_1]} .. \int_{[a_n,b_n]} f(x_1,..,x_n)\,dx_n..dx_1$

$f \in E(\Omega)$, Ω-תחום פשוט

דוגמא

$I = \int_0^2 \int_x^{2x} (f(x,y)\,dy)\,dx$

$0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x$

$$I = \iint\limits_{\substack{0\leq x\leq 2\\ x\leq y\leq 2x}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\min(y,2)} f(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dxdy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dxdy$$

דוגמא

$\int_0^1 \left(\int_0^1 y^3 e^{xy^2} dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 y^3 e^{xy^2} dx\right) dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2}\left(e^{y^2} - 1\right) dy = \int_0^1 y\left(e^{y^2} - 1\right) dy = \int y e^{y^2} dy - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}$

דוגמא - נוסחת דיריכלה

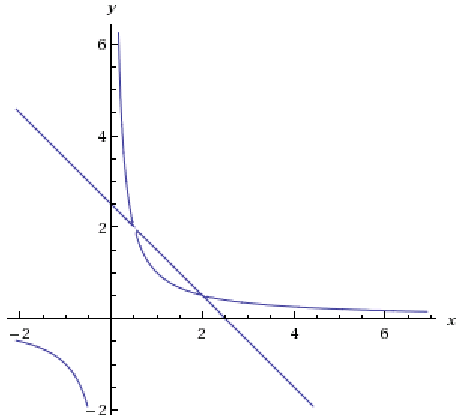
$a > 0$ $\int_0^a dx \left(\int_0^x f(x,y)\,dy\right) = \int_0^a dy \left(\int_y^a f(x,y)\,dx\right)$

נהוג גם לכתוב אינטגרלים כפולים באופן הזה.

$\Omega : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x$

שטח

$$\Omega:\begin{cases} xy=a^2 \\ x+y=\frac{5}{2}a & ,a>0 \end{cases}$$
$$y=\frac{5}{2}a-x$$
$$x\left(\frac{5}{2}a-x\right)=a^2$$
$$x_1=2a, x_2=\frac{a}{2}$$
$$S=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}\left(\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x}dy\right)dx=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}\left(\frac{5}{2}a-x-\frac{a^2}{x}\right)dx=\ldots$$



דוגמא ב$n=3$

$$\int_0^1 dx\left(\int_0^{1-x}dy\left(\int_0^{x+y}f(x,y,z)\,dz\right)\right)=\int dz\,(dx\,(fdy))$$
$$\Omega:\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$\Omega:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1-x & \downarrow\uparrow \\ 0\le z\le x+y \end{cases}$$
$$0\le z\le 1, 0\le x\le 1, y\le 1-x$$
$$\max(z-x,0)\le y\ \begin{cases} z-x\le y \\ 0\le y \end{cases}$$
$$I=\int_0^1 dz\left(\int_0^1 dx\left(\int_{\max(z-x,0)}^{1-x}f(x,y,z)\,dy\right)\right)$$
$$z=x+y\Rightarrow x+y-z=0\Rightarrow \overrightarrow{n}=(1,1,-1)$$

נוסחת החלפת משתנים

עבור $n=1$:
$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\{y=\varphi(x)\}=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(y)\,dy$$
$$x\in(a,b)\,;\varphi'(x)\neq 0;\varphi\in C^1(a,b)$$
$\varphi'(x)\neq 0 \Leftarrow \varphi$ יורד או עולה ממש

1. אם φ עולה $c>d$: $\int_{[a,b]}f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int_{[c,d]}f(y)\,dy$
2. אם φ יורד $\int_{[a,b]}f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=-\int_{[d,c]}f(y)\,dy$

$$\Downarrow$$
$$\int_{[a,b]}f(\varphi(x))(-\varphi'(x))\,dx=-\int f(y)\,dy$$

בכל מקרה: $\int_{[a,b]}f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi[a,b]}f(y)\,dy$

הרצאה 24

משפט (החלפת משתנים)

$\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ - תחומים פשוטים
$\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ - C^r - דיפאומורפיזם, $r \geq 1$
תהי $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$ (למשל f חסומה ו$f \in E(\Omega_2)$).
אז הפונקציה $\left|\frac{\partial(\varphi_1,..,\varphi_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(x)\right| f(\varphi(x))$ - אינטגרבילית בΩ_1 ו $\boxed{\int_{\Omega_1} f(\varphi(x)) \left|\frac{\partial(\varphi_1,..,\varphi_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(x)\right| dx = \int_{\Omega_2} f(y)\, dy}$

למה 1

אם $\Omega_1 = \bigcup_{j=1}^{N} \Omega^j$, Ω^j תחום פשוט, $\overset{\circ}{\Omega^j} \cap \overset{\circ}{\Omega^i} = \phi$ לכל $i \neq j$
והמשפט נכון לכל Ω^j אז הוא נכון לΩ.

הוכחה

$$\forall j = 1...N : \int_{\Omega^j} f(\varphi(x)) \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| dx = \int_{\varphi(\Omega^j)} f(y)\, dy$$
$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega^j} f(\varphi(x)) \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{\varphi(\Omega_1)} f(y)\, dy$$
$$\int_{\Omega_1} f(\varphi(x)) \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| dx = \int_{\varphi(\Omega_1)} f(y)\, dy$$

למה 2

$\Omega_1 \xrightarrow{h} \Omega_2 \xrightarrow{k} \Omega_3$, h,k-C^rדיפ', $\Omega_j \subset^n$.
אם המשפט נכון לh ולk אז המשפט נכון ל$k \circ h$ $k \circ h : \Omega_1 \to \Omega_3$.

הוכחה

סימון: $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x) := \frac{\partial(\varphi_1,..,\varphi_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(x)$
$$\int_{\Omega_3} f(z)\, dz = \{z = k(y) ; y \in \Omega_2\} = \int_{\Omega_2} f(k(y)) \left|\frac{\partial k}{\partial y}(y)\right| dy =$$
$$= \{y = h(x), x \in \Omega_1\} = \int_{\Omega_1} f(k(h(x))) \left|\frac{\partial k}{\partial y}(h(x))\right| \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right| dx = \int_{\Omega_1} f((k \circ h)(x)) \left|\frac{\partial (k \circ h)}{\partial x}(x)\right| dx$$

הגדרה

φ שומרת קאורדינטות $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ אם $\varphi(x_1,..,x_n) = (\varphi_1(x), ..., x_{i_1}, ..., x_{i_k}, ..., \varphi_n(x))$ כלומר $\varphi_{i_j}(x) = x_{i_j}$ לכל $1 \leq j \leq k$.

דוגמא

$n = 2 : \varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), y)$ שומר y.

למה 3

יהי דיפאומורפיזם $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ אז לכל נקודה $a \in \Omega_1$ קיימת סביבה $U_a \ni a$ כך ש $\forall x \in U_a : \varphi(x) = (k \circ h)(x)$,
k, h - שומרים קאורדינטות (לפחות 1).

הוכחה

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a) \neq 0$$
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(a) & .... & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & .... & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(a) & .... & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0$$
$\Delta_{n-1} \neq 0$ קיים מינור כזה, בה"כ:
$$\frac{\partial(\varphi_1,..,\varphi_{n-1})}{\partial(x_1,...,x_{n-1})}(a) \neq 0$$
$$x = (x', x_n)$$

$x' = (x_1, ..., x_{n-1})$

נגדיר $h(x) := (\varphi_1(x), ..., \varphi_{n-1}(x), x_n)$, h שומר x_n.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(a) = \det \begin{pmatrix} & & \vdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ & \Delta_{n-1} & \vdots & \\ ... & ... & . & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}(a) \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = \Delta_{n-1}(a) \neq 0$$

לפי משפט על פונ' הפוכה $a \ni \exists U_a$ כך ש$h : U_a \to h(U_a)$ C^r דיפאמורפיזם.

$\exists h^{-1} : h(U_a) \to U_a$ - C^r דיפאומורפיזם.

נגדיר $k(y) = \left(y_1, ..., y_{n-1}.\varphi\left(h^{-1}(y)\right)\right)$

k שומר $y_1, .., y_{n-1}$

$$k(h(x)) = \left(h_1(x), ..., h_{n-1}(x), \varphi_n\left(h^{-1}(h(x))\right)\right) = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \varphi = k \circ h$$

הוכחה של המשפט

$\forall a \in \Omega \exists U_a$ מלמה 3. $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{a_j}$

$\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j$, Ω_j - תחום פשוט, $\Omega_j \subset U_{a_j}$

לפי למה 1 מספיק להוכיח לכל Ω_j.ולכן נסמן $\Omega = \Omega_j$, h $\varphi = k \circ h$לפי למה 3.

לפי למה 2 מספיק להוכיח עבור או לk או לh.

נראה באינדוקציה לפי n.

עבור $n = 1$ הוכחנו, נניח כי נכון עבור $n-1$.

נראה עבור n, ועבור h:

$$h(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_{n-1}(x), x_n)$$

$$x = (x', x_n)$$

$$Pr_n \Omega = \left\{t \in : \exists x' \in^{n-1} \ (x', t) \in \Omega\right\}$$

$$\frac{\partial h(h', t)}{\partial (x', t)}(x', t) = \frac{\partial (h_1, .., h_{n-1})}{\partial (x_1, .., x_{n-1})}(x', t) = \frac{\partial (\varphi_1, .., \varphi_{n-1})}{\partial (x_1, .., x_{n-1})}(x', t)$$

$$\int_\Omega (f \circ h) \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right| dx = \int_{t \in Pr_n \Omega} \left(\int_{\Omega_t = \Omega \cap \{x_n = t\} \subset^{n-1}} f(\varphi_1(x', t), ..., \varphi_{n-1}(x', t), t) \left|\frac{\partial h(x', t)}{\partial (x', t)}\right| dx'\right) dt =$$

$$= \int_{t \in Pr_n \Omega} \left(\int_{x' \in \Omega_t \subset^{n-1}} f(h(x', t)) \left|\frac{\partial (\varphi_1, .., \varphi_{n-1})}{\partial (x_1, .., x_{n-1})}(x', t)\right| dx'\right) dt =$$

נבצע החלפת משתנים ב$^{n-1}$:

$$= \int_{t \in Pr_n \Omega} \left(\int f(y, t)\, dy\right) dt = \int_\Omega f(x)\, dx$$

$$\boxed{\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\, dy = \{y = \varphi(x)\} = \int_\Omega f(\varphi(x)) \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right| dx}$$

משמעות גאומטרית של יעקוביאן:

$\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ דיפאומרפיזם, $a \in \Omega$, $a \in^n$.

$$B(a, \epsilon) = \{x \in^n : ||x - a|| < \epsilon\}$$

$$\varphi : B(a, \epsilon) \to \varphi(B(a, \epsilon))$$

$$V(\varphi(B(a, \epsilon))) = \int_{\varphi(B(a, \epsilon))} dy = \{y = \varphi(x)\} = \int_{B(a, \epsilon)} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right| dx$$

$$\min_{x \in B(a, \epsilon)} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right| v(B(a, \epsilon)) \leq \int_{B(a, \epsilon)} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right| dx \leq \max_{x \in B(a, \epsilon)} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right| v(B(a, \epsilon))$$

$$\min_{B(a, \epsilon)} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| \leq \frac{1}{V(B(a, \epsilon))} \leq \max_{x \in B(a, \epsilon)} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right|$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{V(B(a, \epsilon))} \int_{B(a, \epsilon)} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right| dx = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a)\right|$$

ולכן

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{V\left(\varphi\left(B\left(a,\epsilon\right)\right)\right)}{V\left(B\left(a,\epsilon\right)\right)}=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(a\right)\right|$$

$n=2$ קאורדינטות קוטביות

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$$

$$\int_{\varphi(\Omega)}f\left(y_1,...,y_n\right)dy_1..dy_n=\left\{y=\varphi\left(x\right),y_i=\varphi_j\left(x\right)\right\}=\int_{\Omega}f\left(y_1\left(x\right),...,y_n\left(x\right)\right)\left|\frac{\partial(y_1,..,y_n)}{\partial(x_1,..,x_n)}\left(x\right)\right|dx_1..dx_n$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r$$

$\boxed{\iint_{\varphi(\Omega)}f\left(x,y\right)dxdy=}$ להשלים :(

דוגמא

$$\int_{x^2+y^2=1}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^1\int_0^{2\pi}r^2rdrd\varphi=\frac{1}{4}2\pi=\frac{\pi}{2}$$

$$S\left(B\left(0,R\right)\right)=\int_{x^2+y^2=R}dxdy=...=\pi R^2$$

דוגמא

$$S\left(\Omega\right)=?$$

$$\Omega=\left\{\left(x,y\right)\in^2:\left(x^2+y^2\right)^2\leq 2a^2xy\right\}$$

$$\partial\Omega:\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$$

$$\partial\Omega:r^4=2a^2r^2\cos\varphi\sin\varphi$$

$$r^2=2a^2\cos\varphi\sin\varphi=a^2\sin2\varphi$$

$$\sin2\varphi\geq0,0\leq2\varphi\leq\pi,2\pi\leq2\varphi\leq3\pi$$

$$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\pi\leq\varphi\leq\frac{3}{2}\pi$$

$$S\left(\Omega\right)=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{\sin2\varphi}}rdr\right)d\varphi=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{r^2}{2}|_0^{a\sqrt{\sin2\varphi}}\right)d\varphi=...=a^2$$

דוגמא ב$n=3$ קאורדינטות ספריות

$$R,\varphi,\psi$$

$$-\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2}$$

$$0<\varphi<2\pi$$

$$z=R\sin\psi$$

$$x=R\cos\psi\cos\varphi$$

$$y=R\cos\psi\sin\varphi$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(R,\varphi,\psi)}=R^2\cos\psi$$

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

הרצאה 25

$$z=r\sin\psi$$

$$x=r\cos\psi\cos\varphi$$

$$y=r\cos\psi\sin\varphi$$

$$-\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2}$$

$$0<\varphi<2\pi$$

$$D=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)}=r^2\cos\psi$$

$$V\left(B^3\left(0,R\right)\right)=\int_{B^3(0,R)}dxdydz=\int_0^Rr^2dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\int_0^{2\pi}dp=\frac{r^3}{3}|_0^R\sin\psi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\pi=\frac{4}{3}\pi Rr^3$$

$\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ .... \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\cos\varphi_{n-1} \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{n-1} \end{cases}$$

$$D = \frac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial(r,\varphi_1,...,\varphi_{n-1})} = r\sin\varphi_1...\sin\varphi_{n-1}$$

$$V\left(B^n\left(0,R\right)\right) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n$$

להשלים $\Gamma\left(x\right) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}$

שטח

$$\Omega = \left\{(x,y) : a < x < b, 0 < y < f\left(x\right)\right\}$$

$$S\left(\Omega\right) = \iint_\Omega dxdy = \int_{[a,b]}\left(\int_0^{f(x)}dy\right)dx = \int_{[a,b]} f\left(x\right)dx$$

תרגיל

$$\Omega : xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x$$

$$S\left(\Omega\right) = ?$$

$$u = xy, v = \frac{y}{x}$$

$$\varphi : \Omega \to D, \varphi\left(x,y\right) = \left(u,v\right) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

$$D = \left\{\left(u,v\right), \begin{array}{c} a^2 \le u \le 2a^2 \\ 1 \le v \le 2 \end{array}\right\}$$

$$S\left(\Omega\right) = \iint_\Omega dxdy = \iint_D \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2v$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2v}$$

$$S\left(\Omega\right) = \iint_{\substack{a^2 \le u \le 2a^2 \\ 1 \le v \le 2}} \frac{1}{2v}dudv = \frac{a^2}{2}\int_{[1,2]}\frac{1}{v}dv = \frac{a^2}{2}\ln\left(2\right)$$

נפח של מקבילון n מימדי

$$\Omega : \begin{array}{c} A_1 \le a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \le B_1 \\ ... \\ A_n \le a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n \le B_n \end{array}$$

$$V\left(\Omega\right) = ?$$

$$u_j = a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n$$

$$P : \begin{array}{c} A_1 \le u_1 \le B_1 \\ \vdots \\ A_n \le u_n \le B_n \end{array}$$

$$\varphi : \left(x_1,...,x_n\right) \mapsto \left(u_1,...,u_n\right)$$

$$\varphi : \Omega \to P$$

$$V\left(\Omega\right) = \iint_\Omega dx_1...dx_n = \iint_P \left|\frac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial(u_1,...,u_n)}\right| du_1...du_n$$

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n \Rightarrow \frac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial(u_1,...,u_n)} = \det\left(A\right)$$

$$V\left(\Omega\right) = \int_P \frac{1}{|\det(A)|}du = \frac{1}{|\det(A)|}\left(B_1 - A_1\right)...\left(B_n - A_n\right)$$

$$V\left(P\right) = \left|\det A\right| V\left(\Omega\right)$$

נפח של פירמידה n מימדית

$$\Omega: \begin{array}{c}\frac{x_1}{a_1}+...+\frac{x_n}{a_n}<1\\ x_i>0, a_i>0\end{array}$$

קו ישר: $n=1: \frac{x_1}{a_1}\leq 1\Rightarrow S=a_1$

$n=2: \frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}<1\Rightarrow S=\frac{a_1a_2}{2}$

$n=3$:

$\frac{x_1}{a_1}+...+\frac{x_n}{a_n}<R$

$$V\left(a_1,...,a_n,R\right)=\int dx_1..dx_n=\left\{\frac{x_i}{R}=u_i\right\}=\int_{\frac{u_1}{a_1}+...+\frac{u_n}{a_n}<1}R^n du_1..du_n=R^nV\left(a_1,...,a_n,1\right)$$

$$\frac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial(u_1,..,u_n)}=R^n$$

$$\begin{aligned}V_n\left(a_1,..,a_n,1\right) &= \int_{\frac{x1}{a_1}+...+\frac{x_n}{a_n}<1}dx_1..dx_n=\int_0^{a_n}\left(\int_{\frac{x1}{a_1}+...+\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}<1-\frac{x_n}{a_n}}dx_1..x_{n-1}\right)dx_n\\ &= \int_0^{a_n}V_{n-1}\left(a_1,..,a_{n-1},1-\frac{x_n}{a_n}\right)dx_n\\ &= \int_0^{a_n}\left(\int_{\frac{x1}{a_1}+...+\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}<1-\frac{x_n}{a_n}}dx_1..x_{n-1}\right)dx_n=\int_0^{a_n}V_{n-1}\left(a_1,..,a_{n-1},1-\frac{x_n}{a_n}\right)dx_n\end{aligned}$$

$$=\int_0^{a_n}\left(1-\frac{x_n}{a_n}\right)^{n-1}V_{n-1}\left(a_1,..a_{n-1},1\right)dx_n$$

$$\begin{aligned}V_n\left(a_1,..,a_n,1\right) &= \int_{\frac{x_1}{a_1}+...+\frac{x_n}{a_n}<1}dx_1..dx_n\\ &\quad\left\{\frac{x_i}{a_i}=t_i\right\}\\ &= \int_{\substack{t_1+..+t_n<1\\ t_i>0}}a_1..a_ndt_1..dt_n\\ &= a_1..a_nV\left(1,..,1\right)\end{aligned}$$

$$V_n\left(a_1,..,a_n\right)=a_1..a_nV_n\left(1,..,1\right)=a_1..a_nV_n$$

$$V_n=\int_0^1\left(1-x_n\right)^{n-1}V_{n-1}dx_n=\frac{1}{n}V_{n-1}\Rightarrow V_n=\frac{1}{n!}$$

$$V_n\left(a_1,..,a_n\right)=a_1...a_nV_n=\frac{a_1...a_n}{n!}$$

נפח של גליל

$$n=3:\Omega=\left\{(x,y)\in D:0\leq z\leq f\left(x,y\right)\right\}$$

$$V\left(\Omega\right)=\iiint_\Omega dxdydz=\iint_D\left(\int_{z\in[0,f(x,y)]}dz\right)dxdy=\iint_D f\left(x,y\right)dxdy$$

נפח של גוף סיבובי:

$n=3$:

$$\int_{[a,b]}\pi f\left(y\right)dy=V\left(\Omega\right)$$

אינטגרל לא אמיתי ב$\mathbb{R}^n$

נניח כי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך שלכל קבוצה $K\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית $f|_K$ חסומה ולכל תחום פשוט $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $f|_\Omega$ פשוטה. $f\in E\left(\Omega\right)$.

מוגדר $\int_\Omega f\left(x\right)dx$ לכל תחום Ω פשוט.

כיסוי של $\mathbb{R}^n$

$\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}\,;\Omega_j\subset\mathbb{R}^n$

1. $\forall j:\Omega_j\subset\Omega_{j+1}$
2. $\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j=\mathbb{R}^n$
3. לכל קבוצה קומפקטית $K\subset\mathbb{R}^n$ קיים j כך ש$K\subset\Omega_j$.

נגדיר עבור $f>0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}f\left(x\right)dx:=\lim_{j\to\infty}\int_{\Omega_j}f\left(x\right)dx$$

נגדיר:
$f^+=\frac{|f|+f}{2}\geq0$
$f^-=\frac{|f|-f}{2}\geq0$
$f=f^+-f^-$
$\int_{\mathbb{R}^n}fdx:=\int_{\mathbb{R}^n}f^+dx-\int_{\mathbb{R}^n}f^-dx$
$\int_{\mathbb{R}^n}|f|\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}f^+dx+\int_{\mathbb{R}^n}f^-dx$
$f\in\mathcal{R}\left(\mathbb{R}^n\right)\Leftrightarrow f^+,f^{-1}\in\mathcal{R}\left(\mathbb{R}^n\right)$

למה:

$\int_{\mathbb{R}^n}fdx$ לא תלוי בבחירה של הכיסוי$\{\Omega_j\}$.

הוכחה

נניח כי $\mathbb{R}^n=\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j=\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega'_j$
$\forall j\exists i:\Omega'_j\subset\Omega_i$
$f\geq0:\int_{\Omega'_J}fdx\leq\int_{\Omega_i}fdx\leq\int_{\mathbb{R}^n}fdx$
ולכן $\left(\Omega_j\right)\int_{\mathbb{R}^n}fdx\leq\left(\Omega'_j\right)\int_{\mathbb{R}^n}fdx$ ובנוסף $\left(\Omega'_j\right)\int_{\mathbb{R}^n}fdx\leq\left(\Omega_j\right)\int_{\mathbb{R}^n}fdx$

דוגמא

$E=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$

$$2E=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}e^{-x^2}dx$$

$$\begin{aligned}RE^2&=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}e^{-x^2}dx\int_{-A}^{A}e^{-y^2}dy\\&=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\int_{-A}^{A}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\\&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{R}e^{-r^2}rdrd\varphi\\&=\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{r^2}|_0^R\right)2\pi=\pi\end{aligned}$$

$E^2=\frac{\pi}{4}\Rightarrow E=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$

פונקציה לא חסומה

f לא חסומה סביבה של a.
$\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ כך שu_j סביבה של a.
$u_{j+1} \subset u_j$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} u_j = \{a\}$$

$\forall \epsilon > 0 \exists j : u_j \subset B(a, \epsilon)$.
נניח שf אינטגרבילית בכל $\Omega \backslash u_j$, $f \geq 0$, f אינטגרבילית אם:
$\exists \lim_{j\to\infty} \int_{\Omega\backslash u_j} f(x)\,dx = \sup_j \int_{\Omega\backslash u_j} f dx := \int_\Omega f(x)\,dx < \infty$
$f = f_+ - f_- \Rightarrow \int_\Omega f dx = \int_\Omega f_+ dx - \int f_- dx$
$\frac{m}{r^\alpha} \leq |f(x)| \leq \frac{M}{r^\alpha}$
$r = ||x||$
$\int_{|x|\geq R_0} \frac{1}{r^\alpha} dx = \int_{\varphi_1,..,\varphi_{n-1}} \int_{R_0}^{\infty} \frac{1}{r^\alpha} A(\varphi_1, .., \varphi_{n-1})\, dr d\varphi_1 ... \varphi_{n-1} = c \int_{R_0}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr$
$\boxed{\infty\!:\ \alpha > n \Leftrightarrow \int_{|x|>R_0} \frac{1}{||x||^\alpha} dx < \infty}$
$\boxed{0\!:\ \alpha < n \Leftrightarrow \int_{||x||<R_0} \frac{1}{||x||^\alpha} dx < \infty}$